MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

SERIE TERZA

TOMO XIV.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. VINCENZO SALVIUCCI

1907

ELENCO DEI MEMBRI
DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE
(1° Luglio 1907).

Presidente

CANNIZZARO STANISLAO

Segretari

PATERNÒ EMANUELE — DINI ULISSE

Amministratore e Bibliotecario

CERRUTI VALENTINO

Soci Nazionali.

		Data della nomina		Residenza
1.	Tardy Placido	Giugno	1864	Firenze
2.	Cannizzaro Stanislao	Settembre	1865	Roma
3.	Schiaparelli Giovanni	Aprile	1867	Milano
4.	Dini Ulisse	Dicembre	1875	Pisa
5.	Blaserna Pietro	Maggio	1877	Roma
6.	Fergola Emanuele	Agosto	1878	Napoli
7.	Capellini Giovanni	Giugno	1879	Bologna
8.	Albini Giuseppe	Giugno	1880	Napoli
9.	D'Ovidio Enrico	Dicembre	1884	Torino
10.	Celoria Giovanni	Novembre	1885	Milano
11.	Pacinotti Antonio	Luglio	1886	Pisa
12.	Paternò Emanuele	Luglio	1889	Roma
13.	Cerruti Valentino	Agosto	1889	Roma
14.	Taramelli Torquato	Dicembre	1889	Pavia
15.	Bassani Francesco	Febbraio	1890	Napoli
16.	Righi Augusto	Febbraio	1891	Bologna
17.	Bianchi Luigi	Aprile	1892	Pisa
18.	Ròiti Antonio	Giugno	1892	Firenze

	Data della nomina		Residenza
19. VERONESE GIUSEPPE	Febbraio	1894	Padova
20. STRUEVER GIOVANNI	Marzo	1894	Roma
21. LORENZONI GIUSEPPE	Marzo	1895	Padova
22. VOLTERRA VITO	Novembre	1896	Roma
23. GOLGI CAMILLO	Dicembre	1896	Pavia
24. SEGRE CORRADO	Gennaio	1897	Torino
25. MOSSO ANGELO	Marzo	1897	Torino
26. GRASSI BATTISTA	Maggio	1897	Roma
27. BERTINI EUGENIO	Aprile	1898	Pisa
28. CIAMICIAN GIACOMO	Giugno	1898	Bologna
29. NACCARI ANDREA	Giugno	1899	Torino
30. TODARO FRANCESCO	Gennaio	1900	Roma
31. LUCIANI LUIGI	Dicembre	1902	Roma
32. KOERNER GUGLIELMO	Febbraio	1903	Milano
33. PINCHERLE SALVATORE	Gennaio	1904	Bologna
34. SPEZIA GIORGIO	Febbraio	1904	Torino
35. NASINI RAFFAELLO	Maggio	1904	Padova
36. FOÀ PIO	Dicembre	1904	Torino
37. BRIOSI GIOVANNI	Gennaio	1905	Pavia
38. CASTELNUOVO GUIDO	Marzo	1906	Roma
39.			
40.			

Soci Stranieri.

	Data della nomina		Residenza
1. THOMSON GUGLIELMO (Lord KELVIN)	Luglio	1884	Largs (Ayr)
2. KLEIN FELICE	Gennaio	1896	Gottinga
3. DOHRN ANTONIO	Marzo	1896	Napoli
4. NEUMANN CARLO	Novembre	1896	Lipsia
5. HOOKER GIUSEPPE DALTON	Dicembre	1896	Sunningdale (Surrey)
6. NEWCOMB SIMONE	Marzo	1897	Washington
7. STRUTT GIOVANNI GUGLIELMO (Lord RAYLEIGH)	Aprile	1898	Witham (Essex)
8. POINCARÉ GIULIO ENRICO	Gennaio	1900	Parigi
9. MITTAG-LEFFLER GUSTAVO	Febbraio	1904	Stoccolma
10.			
11.			
12.			

ELENCO DE' SOCI NAZIONALI
NELL'ORDINE CHE SON SUCCEDUTI A CIASCUNO DE' QUARANTA DELLA PRIMA ELEZIONE

I. ARDUINO — Maironi Daponte 1796 — Marianini 1833 — Parlatore 1866 — Respighi 1878 — Bassani 1890.

II. BARLETTI — Fabbroni 1800 — Palletta 1823 — Savi Gaetano 1833 — De Vico 1844 — Brignoli 1849 — Minich 1857 — Villari 1884 — Briosi 1905.

III. BONATI — Calandrelli 1820 — Piola 1828 — Capocci 1851 — De Filippi 1864 — Stoppani 1867 — Ciaccio 1891 — Cesàro 1902 — .....

IV. BOSCOVICH — Fortis 1788 — Targioni-Tozzetti 1804 — Bianchi Giuseppe 1829 — Schiaparelli 1867.

V. CAGNOLI — Carlini 1816 — Gasparrini 1862 — Donati 1867 — Battaglini 1875 — Lorenzoni 1895.

VI. CALDANI LEOPOLDO — Manzoni 1814 — Ranzani 1819 — Ridolfi 1841 — Lombardini 1865 — Nicolucci 1879 — Foà 1904.

VII. CANTERZANI — Tramontini 1819 — Piria 1852 — Cannizzaro 1865.

VIII. CESARIS — Giorgini 1832 — Saint-Robert 1875 — Paternò 1889.

IX. CIGNA — Amoretti 1791 — Carradori 1816 — Amici 1819 — Turazza 1863 — Bianchi Luigi 1892.

X. CIRILLO — San Martino 1791 — Ruffini 1800 — Bidone 1822 — Genè 1839 — Tortolini 1847 — Ponzi 1875 — Pacinotti 1886.

XI. COTUGNO — Mascagni 1791 — Configliacchi 1816 — Moris 1844 — Gastaldi 1870 — Gemmellaro 1879 — Nasini 1904.

XII. DE LAGRANGE — Mascheroni 1791 — Racagni 1801 — Mossotti 1822 — De Notaris 1863 — Blaserna 1877.

XIII. DE LANGES — Magistrini 1811 — Bellavitis 1850 — Cossa 1881 — Bombicci 1903 — Spezia 1904.

XIV. FERRONI — Abbati-Marescotti 1826 — Delle Chiaie 1842 — Menabrea 1861 — Volterra 1896.

XV. FONTANA FELICE — Pessuti 1803 — Plana 1815 — Tardy 1864.

XVI. FONTANA GREGORIO — Cossali 1793 — Bordoni 1816 — Betti 1860 — Ferraris 1892 — Grassi 1897.

XVII. FOSSOMBRONI — Sismonda Angelo 1844 — Capellini 1879.

XVIII. GIRARDI — Giobert 1798 — Raddi 1816 — Nobili 1830 — Dal Negro 1835 — Rusconi 1839 — Taddei 1849 — Porta 1860 — Cesati 1876 — Govi 1883 — Taramelli 1889.

XIX. LANDRIANI — Fontana Mariano 1793 — Piazzi 1803 — Conti 1823 — Matteucci 1840 — Palmieri 1869 — Golgi 1896.

XX. LORGNA — Franceschinis 1797 — Araldi 1803 — Morichini 1814 — Tenore 1837 — Felici 1861 — Luciani 1902.

XXI. MALACARNE MICHELE VINCENZO — Malacarne Vincenzo Gaetano 1816 — Belli 1832 — Paleocapa 1860 — Cornalia 1869 — Zurria 1882 — Segre 1897.

XXII. MALFATTI — Brunacci 1808 — Lombardi 1818 — Savi Paolo 1847 — Namias 1871 — Panceri 1875 — Costa 1877 — Naccari 1899.

XXIII. MOROZZO — Bondioli 1805 — Brera 1808 — Catullo 1840 — Casorati 1869 — Righi 1891.

XXIV. MOSCATI — Barani 1824 — Alessandrini 1838 — Genocchi 1861 — Caruel 1889 — Todaro 1900.

XXV. ORIANI — Marino 1793 — Re 1806 — Fattori 1817 — Avogadro 1821 — Malaguti 1856 — Cantoni 1878 — Bertini 1898.

XXVI. PAOLI — Melloni 1839 — Secchi 1854 — Fergola 1878.

XXVII. PINI — Frullani 1825 — Mainardi 1834 — Siacci 1879 — .....

XXVIII. RICCATI — Caluso 1791 — Collalto 1815 — Rangoni 1820 — Bufalini 1844 — Dini 1875.

XXIX. ROSSI — Aldini 1804 — Cacciatore 1834 — Bizio 1841 — Chelini 1863 — Rossetti 1879 — Celoria 1885.

XXX. SABADINI — Rosa 1791 — Brugnatelli 1803 — Dandolo 1807 — Zamboni 1820 — Medici 1846 — Meneghini 1860 — Cerruti 1889.

XXXI. SALIMBENI — Venturoli 1803 — Pareto 1847 — Cremona 1865 — Pincherle 1904.

XXXII. SALUZZO — Pezzi 1791 — Santini 1815 — De Zigno 1877 — Ròiti 1892.

XXXIII. SCARPA — Soave 1791 — Saladini 1804 (1) — Avanzini 1813 — Baccelli 1827 — Panizza 1835 — Padula 1867 — Ferrero 1881 — Koerner 1903.

XXXIV. SLOP DE CADENBERG — Paradisi 1808 — Inghirami 1827 — Spinola 1846 — Sismonda Eugenio 1858 — Trudi 1871 — Trinchese 1885 — Mosso 1897.

XXXV. SPALLANZANI — Giovene 1800 — Pianciani 1837 — Sella 1862 — D'Ovidio 1884.

XXXVI. STRATICO — Caldani Floriano 1803 — Bellani 1836 — De Gasparis 1852 — Passerini 1892 — Veronese 1894.

XXXVII. VAIRO — Toaldo 1791 — Chiminello 1798 — Mengotti 1814 — Bertoloni 1829 — Beltrami 1870 — Tacchini 1901. — Castelnuovo 1906.

XXXVIII. VENTURI — Olivi 1793 — Vassalli Eandi 1796 — Michelotti 1825 — Giulio 1845 — Brioschi 1860 — Ciamician 1898.

XXXIX. VOLTA — Poli 1803 — Rubini 1807 — Tommasini 1819 — Flauti 1847 — Scacchi 1863 — Struever 1894.

XL. ZEVIANI — Gallini 1808 — Fusinieri 1836 — Frisiani 1853 — Albini 1880.

(1) È lo stesso SALADINI della prima elezione che, divenuto Emerito nel 1790, riprende il posto di Socio Attuale dopo SOAVE nel 1804.

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

dal 1 luglio 1905 al 30 giugno 1907.

(*Continuazione*, v. Ser. III, t. XIII).

1905 — *648.* — Nel corso del mese di luglio ed in conformità delle proposte delle Commissioni nominate a' sensi dell'art. XXI dello Statuto furono conferiti i seguenti premi del 1905:

premio per la matematica al prof. Cesare Arzelà, dell'Università di Bologna;

premio per le scienze fisiche e naturali al dott. Andrea Giardina, assistente nel Gabinetto di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università di Palermo;

la medaglia Matteucci al prof. Enrico Poincaré di Parigi.

1906 — *649.* — Per incarico del Presidente, i Segretari Blaserna e Dini con lettera del 15 gennaio 1906 proponevano a' colleghi per la nomina di un Socio nazionale in sostituzione del defunto Pietro Tacchini la seguente sestupla: Castelnuovo Guido, Capelli Alfredo, Macaluso Damiano, Sella Alfonso, Pirotta Romualdo, Tizzoni Guido; ed in sostituzione del defunto Socio straniero Ottone Guglielmo Struve quest'altra sestupla: Berthelot Marcellino, Roentgen Guglielmo, Darboux Gastone, Noether Massimiliano, Buetschli Oscar. Riuscirono eletti a Socio nazionale il prof. Guido Castelnuovo, matematico a Roma, ed a Socio straniero il prof. Marcellino Berthelot, chimico a Parigi.

650. — Nelle feste del secondo centenario dalla nascita di Beniamino Franklin, celebratesi in Filadelfia (17-20 aprile) per cura della Società filosofica americana, fu delegato a rappresentarvi la nostra il membro straniero Simone Newcomb.

651. — Con circolare del Presidente in data del 12 luglio fu portato a cognizione dei Soci che secondo le proposte delle competenti Commissioni, i premi del 1906 risultarono conferiti come segue:

il premio per la matematica al prof. Francesco Severi, dell'Università di Padova;

il premio per le scienze fisiche e naturali al prof. Carlo Viola, dell'Università di Parma;

la medaglia Matteucci al prof. Giacomo Dewar, dell'Istituto reale di Londra.

652. — Due gravi perdite subì la Società nel mese di settembre.

Il giorno 5 del mese moriva in Trieste l'illustre fisico Luigi Boltzmann, che apparteneva al nostro sodalizio quale Socio straniero dal maggio 1897; e il giorno 12 periva miseramente in Torre Annunziata il Socio nazionale prof. Ernesto Cesàro, nei tentativi, purtroppo riusciti vani, di salvare dalle onde del mare il proprio figlio. Il Cesàro era stato aggregato alla Società nell'aprile del 1902.

653. — Avendo il Socio PIETRO BLASERNA chiesto, per le sue molteplici occupazioni, di essere esonerato dall'ufficio di Segretario, il Presidente lo sostituì col Socio EMANUELE PATERNÒ.

654. — Celebrandosi in Napoli nel dì 30 dicembre il primo centenario dalla fondazione del reale Istituto di Incoraggiamento, la nostra Società, invitata, vi si fece rappresentare da' membri residenti in quella città, i professori ALBINI, BASSANI, FERGOLA e SIACCI.

1907. — *655.* — Nel giro di pochi mesi la morte mieteva tre de' più illustri nostri colleghi:

DEMETRIO MENDELEEFF, Socio straniero dal marzo 1901, mancato a' vivi in Pietroburgo il 2 febbraio;

MARCELLINO BERTHELOT, Socio straniero dal marzo 1906, deceduto a Parigi il 18 marzo;

FRANCESCO SIACCI, Socio nazionale dall'agosto 1879, rapito il 31 maggio dopo lunga e penosa malattia.

656. — Alle onoranze tributate in Bologna nei giorni 12 e 13 giugno al grande naturalista ULISSE ALDROVANDI, ricorrendo il terzo centenario dalla sua morte, furono dal Presidente delegati a rappresentare la Società i membri di essa residenti in Bologna: CAPELLINI, CIAMICIAN, PINCHERLE e RIGHI.

657. — In seguito al giudizio delle Commissioni di cui all'art. XXI dello Statuto, i premi del 1907 furono conferiti:

per la matematica al prof. GIUSEPPE LAURICELLA, dell'Università di Catania;

per le scienze fisiche e naturali al prof. BIAGIO LONGO, dell'Università di Siena;

e la medaglia MATTEUCCI al prof. GUGLIELMO RAMSAY, dell'Università di Londra.

CONTO ATTIVO e PASSIVO dal 1° luglio 1905 al 30 giugno 1906.

ATTIVO

N.	Voce		L.	c.
1	Resto di cassa al 1° luglio 1905	L.	13838	40
2	Assegno governativo dal 1° luglio 1905 al 30 giugno 1906	»	3787	68
3	Rendita italiana 5 % (1° e 2° semestre 1905)	»	4000	00
4	Interessi sulle somme depositate alla Banca d'Italia	»	73	21
5	Dalla Ditta Fratelli Bocca per un esemplare del t. XII (Serie 3ª) delle Memorie sociali	»	18	00
	Totale L.		21717	29

PASSIVO

N.	Voce		L.	c.
1	Pensioni accademiche ai Soci Tardy, Cannizzaro e Schiaparelli (1° e 2° semestre 1905)	L.	832	50
2	Remunerazioni ai sigg. I. Sonzogno e R. Inverardi per lavori in servizio della Società	»	225	00
3	Alla R. Zecca per coniazione di tre medaglie d'oro pei premi	»	1081	18
4	Al Demanio per tassa di manomorta 2° semestre 1905 e 1° semestre 1906	»	126	72
5	Al Tipografo V. Salviucci per la stampa del Volume XIII delle Memorie sociali ed Estratti	»	4800	00
6	Al tipografo D. Battarelli per stampe diverse	»	30	00
7	Al sig. A. Staderini per schede e cartoline stampate	»	85	50
8	Al sig. S. Ciari per legatura di libri, scatole, oggetti di cancelleria ecc.	»	104	80
9	Ai librai Hoepli e Loescher per porto di libri	»	36	65
10	Per telegrammi diversi ad alcune Accademie americane ed a nuovi Soci	»	105	35
11	Spedizione di libri, diplomi, medaglie e spese postali diverse	»	126	59
12	Rimborsi di spese di vetture ed altre spese minute	»	5	10
	Totale L.		7509	39
	Resto di cassa al 30 giugno 1906	L.	14207	90
	Totale L.		21717	29

Roma, 30 giugno 1906.

Il Tesoriere: V. CERRUTI.

Il Presidente: S. CANNIZZARO.

CONTO ATTIVO e PASSIVO dal 1° luglio 1906 al 30 giugno 1907.

ATTIVO

N.	Voce		L.	c.
1	Resto di cassa al 1° luglio 1906	L.	14207	90
2	Assegno governativo dal 1° luglio 1906 al 30 giugno 1907	»	3787	68
3	Rendita italiana 5 % (1° e 2° semestre 1906) .	»	4000	00
4	Interessi sulle somme depositate alla Banca d'Italia (1° e 2° semestre 1906)	»	69	74
5	Dalla libreria Nardecchia per 2 volumi delle Memorie della Società	»	32	50
6	Dalla libreria Friedländer per un volume id. .	»	20	00
7	Dalla libreria Bocca per 4 volumi id. . . .	»	66	00
8	Dal prof. Mittag-Leffler, per 18 volumi id. .	»	262	00
	Totale	L.	22445	82

PASSIVO

N.	Voce		L.	c.
1	Pensioni accademiche ai Soci Tardy, Cannizzaro e Schiaparelli (1° e 2° semestre 1906) . .	L.	832	50
2	Remunerazioni ai sigg. Dr. L. Silla, ing. I. Sonzogno e R. Inverardi per lavori in servizio della Società	»	325	00
3	Alla Zecca per coniazione di cinque medaglie pei premi.	»	1518	75
4	Al Demanio per tassa di manomorta (2° semestre 1906 e 1° semestre 1907)	»	126	72
5	Al tipografo D. Battarelli per stampe diverse .	»	27	00
6	Al libraio Hoepli per porto di libri	»	18	70
7	Al sig. S. Ciari per legatura di libri. oggetti di cancelleria, ecc. ecc..	»	18	00
8	Al sig. Battisti per tavole della Memoria Grassi	»	800	00
9	Al tipografo V. Salviucci in acconto per la stampa del vol. XIV delle Memorie sociali	»	2500	00
10	Porto e spedizione di volumi, medaglie e spese postali diverse	»	44	46
11	Astucci per medaglie.	»	2	50
12	Vetture, aggio valuta, e rimborso piccole spese	»	11	25
	Totale	L.	6224	88
	Resto di cassa al 30 giugno 1907 . . .	L.	16220	94
	Totale	L.	22445	82

Roma, 30 giugno 1907.

Il Tesoriere: V. CERRUTI.

Il Presidente: S. CANNIZZARO.

Relazione sul premio per la matematica (anno 1905), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: BIANCHI, DINI, VOLTERRA.

La Commissione incaricata di proporre l'autore italiano della migliore Memoria di matematica, inedita o pubblicata dopo il 1900, ha deciso all'unanimità di designare il prof. CESARE ARZELÀ della R. Università di Bologna.

Il prof. ARZELÀ ha pubblicato varie Memorie dopo il 1900, tutte nel campo dell'Analisi matematica, sopra la integrazione per sostituzioni, sopra gli integrali doppii, nelle serie di funzioni, sulle serie di funzioni analitiche, ecc.

Tutti questi lavori hanno grandi pregi e confermano la non comune acutezza dell'ingegno e la profondità del sapere dell'ARZELÀ, doti queste che le precedenti opere e le numerose Memorie di questo chiaro autore avevano già rivelato.

Ma fra tutti i suoi lavori quello riguardante le serie di funzioni eccelle sugli altri.

Già da molti anni il prof. ARZELÀ aveva studiato questo argomento e si era principalmente applicato a cercare la condizione necessaria e sufficiente per la integrabilità di una serie di funzioni.

Egli si era avvicinato alla soluzione della importante ed intricata questione fino dal 1884, ma i suoi resultati non erano completamente esatti, come egli stesso si era accorto.

Però, ripreso recentemente con nuova lena lo stesso studio, egli diede alla luce nel 1900, nei volumi delle Memorie della R. Accademia di Bologna, un grosso lavoro avente per titolo: *Sulle serie di funzioni* (parte seconda) in cui stabilisce il resultato definitivo.

Questa pubblicazione era stata bensì preceduta da un'altra in cui si gettavano le basi della teoria che doveva guidarlo alla scoperta, la quale riposa su quella specie di convergenza che l'ARZELÀ ha chiamato *uniforme a tratti*, ma sta di fatto che il resultato veramente importante e culminante si trova nella Memoria del 1900. Esso corona una lunga serie di sforzi perseveranti diretti ad ottenere un resultato molto difficile a conseguirsi e di non dubbia importanza.

La difficoltà appare manifesta a chiunque conosca quanto siano delicate e spinose quelle questioni che riguardano i fondamenti dell'Analisi, e come sia necessaria una mente acuta e lungamente esercitata per progredire con rigore e con sicurezza in questo campo di ricerche. L'importanza poi del resultato è stata già riconosciuta da matematici italiani e stranieri che lo hanno citato ed applicato. Una traduzione tedesca della prima parte della ricerca è già escita per le stampe.

Roma, giugno 1905.

La Commissione:
L. BIANCHI
U. DINI
V. VOLTERRA.

Relazione sul premio per le scienze fisiche e naturali (anno 1905), *presentata dalla Commissione composta dai Soci*: Golgi, Grassi, Struever.

La Commissione incaricata di conferire per l'anno 1904 la medaglia d'oro all'autore della migliore Memoria, nel campo delle scienze naturali, di data posteriore al 1900, ha raccolto i suoi voti sul dott. Andrea Giardina, per il suo lavoro *Origine dell'oocite e delle cellule nutrici nel Dytiscus* pubblicato nell'Internat. Monatschrift f. Anat. und Physiol. del 1901.

L'A. affronta la tanto dibattuta questione sul modo d'origine dei vari elementi costituenti l'ovario degli insetti. Il Giardina contraddicendo l'ipotesi del Korschelt ed accordandosi invece colle ricerche del Metschnikoff (1886) e dell'Heymons (1891-95) ammette per le cellule epiteliali (follicolari) un'origine differente da quelle germinative, che formano le cellule nutrici e l'oocite.

Nel suo lavoro il Giardina espone anche molte osservazioni sulla struttura del filo terminale e della camera terminale, sui rapporti anatomici tra oocite e cellule follicolari e sull'orientazione della rosetta (formata dall'uovo e dalle cellule nutrici corrispondenti) in relazione colla polarità dell'uovo.

Tutti questi particolari costituiscono un interessante complemento ad un fatto fondamentale, scoperto dell'A. riguardante il differenziamento dell'oocite e delle cellule nutrici. Questo differenziamento avviene nel seguente modo. Dapprima le cellule germinative si dividono per due o tre generazioni; le cellule così prodottesi danno luogo all'oocite e alle cellule nutrici mediante quattro divisioni caratterizzate da un modo speciale di comportarsi della cromatina. Viene ad originarsi per effetto di queste quattro divisioni un gruppo di 16 cellule, di cui una è l'oocite, le altre 15 le cellule nutrici. Lo special modo di comportarsi della cromatina, che il Giardina illustra ampiamente, consiste in ciò che *non tutta la cromatina partecipa alla mitosi e non tutta la cromatina viene ripartita ugualmente tra le cellule figlie.* Precisamente accade un processo che il Giardina denomina sinapsi differenziale: la cromatina dapprima ripartita uniformemente sul reticolo acromatico a poco a poco si distingue in due parti: una costituita da finissimi granuli, formanti *una densa massa*, si raccoglie in un emisfero del nucleo, l'altra costituita da grossi granuli, formanti *una massa meno densa*, si raccoglie nell'altro emisfero. Questi grossi granuli sono i cromosomi della piastra equatoriale della prossima mitosi. A questa mitosi non partecipa la cromatina della massa densa, la quale si limita a circondare il fuso di divisione a guisa di anello cromatico. Questo anello e il residuo del fuso passano a una sola delle cellule figlie, quella precisamente che appartiene, come dice l'A., alla genealogia dell'oocite, mentre la cellula, che non ha ereditato l'anello cromatico, appartiene alla genealogia delle cellule nutrici. Da questa ultima mediante tre divisioni ordinarie si formano otto cellule nutrici. La prima cel-

lula invece ritorna nelle condizioni di riposo sopradescritte della cellula madre; riacquista, cioè, un reticolo sparso di cromatina uniformente ripartita, cromatina formatasi a spese tanto dei cromosomi quanto dell'anello cromatico. Questa cellula alla sua volta va incontro alla distiuzione dei due emisferi del nucleo (sinapsi differenziale) come nella cellula madre e come essa si divide formando una cellula appartenente alla genealogia dell'oocite e una cellula appartenente alla genealogia delle cellule nutrici. Quest'ultima per mezzo di due successive divisioni ordinarie viene a formare quattro cellule nutrici. Il processo si ripete, ancora accompagnato da sinapsi differenziale, per la cellula appartenente alla genealogia dell'oocite; la cellula appartenente alla genealogia delle cellule nutrici così formatasi si divide producendo due altre cellule nutrici. Finalmente la cellula appartenente alla genealogia dell'oocite, sempre precedendo la sinapsi differenziale, si divide un'ultima volta e produce un oocite e una cellula nutrice.

Si ottengono perciò in tutto *un oocite, a cui è toccato in eredità oltre ai cromosomi anche l'anello cromatico e quindici celle nutrici, alle quali sono toccati in eredità soltanto cromosomi.*

Questo differente modo di ripartirsi della cromatina nella cellula oocite e nelle cellule nutrici è senza dubbio un fatto di fondamentale importanza per chi tenta di valutare il significato fisiologico della cromatina, significato che si ritiene grandissimo da tutti i citologi.

Un sol fatto, differente, ma però dello stesso ordine, era noto prima di quello del Giardina (processo di segmentazione dell'*ascaris* scoperto da Boveri). Un altro fatto dello stesso ordine, ma più vicino a quello del Giardina, è stato recentemente (1905) scoperto dal Bonnevie in un mollusco.

Il Giardina nella sua Memoria discute ampiamente il fenomeno della ripartizione singolare della cromatina, da lui scoperta nel *Dytiscus*, e ammette che viene a contraddire in punti essenziali le note teorie del Boveri. Il Boveri alla sua volta ha tentato di dimostrare che il nuovo dato portato in campo dal Giardina, piuttosto che infirmare, rafforza i suoi argomenti.

Il Goldschmidt d'altra parte (1904) si vale dei reperti del Giardina per illustrare le vedute teoriche di Schaudinn e le sue proprie sull'esistenza di due nuclei (vegetativo e animale) nella cellula.

In ogni caso, per quanto varino i modi di vedere, tutti sono d'accordo nel ritenere che il fatto scoperto dal Giardina è di grandissimo interesse.

Questo è il motivo principale per il quale noi abbiamo creduto di segnalare il lavoro del Giardina, lavoro che appare tanto più degno di plauso, se si considera quanto scarsi siano finora nel nostro paese, in confronto alle altre nazioni, i contributi citologici.

Roma, giugno 1905.

La Commissione:
C. Golgi
B. Grassi
G. Struever.

Relazione sul conferimento della medaglia Matteucci (anno 1905), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: BLASERNA, RIGHI, RÓITI.

La sottosegnata Commissione, incaricata di proporre la persona a cui conferire la medaglia Matteucci, ha iniziato il proprio lavoro coll'esaminare le assegnazioni già fatte di tale medaglia, ed i criteri che le determinarono. In séguito a questo esame la Commissione si è persuasa che sia conveniente il conferirla quest'anno ad un cultore della Fisica matematica, in base alla seguente considerazione.

Mentre ai progressi della Fisica contribuiscono sopra tutto, ed in grado non molto diverso, l'abilità sperimentale, il genio inventivo e la cultura matematica di chi la professa, nell'assegnare la medaglia Matteucci si è tenuto conto in passato quasi esclusivamente delle prime di queste doti. Di qui l'indicazione della via da seguirsi nella circostanza attuale, e cioè l'opportunità di accordare questa volta l'ambita distinzione a chi abbia, con ricerche fisico-matematiche, fornito rilevanti aiuti alla Fisica sperimentale.

Adottata questa massima, i Commissarî si sono trovati immediatamente d'accordo nel proporre il nome del prof. H. POINCARÉ di Parigi, e poche parole basteranno a giustificarne la scelta.

Lasciando a parte le sue numerosissime pubblicazioni d'indole prettamente matematica, il POINCARÈ ha dato alla luce molte Memorie e Libri divenuti classici, in cui la trattazione matematica di questioni di Fisica è, come troppo di rado accade, così strettamente connessa alle esperienze, da fornire a queste chiare interpretazioni o consigli preziosi.

Basterà citare, fra le Memorie presentanti tali rimarchevoli caratteristiche, quelle relative:

alle esperienze di HERTZ in generale;

al calcolo del periodo oscillatorio dell'eccitatore adoperato in tale esperienze;

alla propagazione delle onde hertziane nei fili;

alla spiegazione dei fenomeni, che SARASIN e DE-LA-RIVE chiamarono *di risonanza* multipla;

alla teoria cinetica dei gas;

a certe esperienze e a certe teorie concernenti i raggi catodici, ed i fenomeni connessi a quelli prodotti da questi raggi;

alla discussione della portata da attribuirsi alla nota esperienza di WIENER;

alla teoria del fenomeno di ZEEMAN, ecc.

E quanto alle opere di maggior mole basterà citare i titoli delle principali, come:

le Lezioni di Termodinamica;

quelle sulle Oscillazioni elettriche:

il trattato di Elettricità e Ottica, il quale fra l'altro contiene un interessantissimo confronto fra le teorie di HERTZ, di LORENTZ e di LARMOR;

come pure il volumetto, di cristallina chiarezza, sulla teoria di MAXWELL e le oscillazioni hertziane.

Consci dell'alto valore di questi scritti, i Commissarî unanimemente propongono di assegnare la medaglia Matteucci al prof. POINCARÉ.

Roma, giugno 1905.

La Commissione:

P. BLASERNA

A. RIGHI

A. RÒITI.

Relazione sul premio per la matematica (anno 1906), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: BIANCHI, DINI, VOLTERRA.

La Commissione sottoscritta, a cui la Società ha affidato l'incarico di proporre per il premio del 1906 l'autore della migliore Memoria di matematica, inedita o pubblicata dopo il 1901, ha rivolta la sua attenzione sui lavori pubblicati nell'ultimo quinquennio da matematici italiani. E dopo maturo esame unanimemente ha riconosciuto l'alto valore scientifico dell'opera compiuta dal prof. FRANCESCO SEVERI che nell'importante e difficile teoria delle funzioni algebriche di due variabili, ha arrecato alla scienza notevoli contributi e progressi.

I lavori che il SEVERI ha pubblicato in pochi anni e particolarmente quelli, in numero di 24, usciti nell'ultimo quinquennio (dopo il 1901), gli hanno già dato una elevata posizione fra i cultori della geometria. Unanime è il giudizio che in quei lavori vi è grande forza e genialità d'invenzione, assoluta padronanza dei metodi sintetici ed analitici e che queste qualità si associano a scrupoloso rigore e ad una esposizione lucida ed elegante.

Senza fermarci sulla Memoria relativa al difficile argomento delle intersezioni delle varietà algebriche (Mem. Torino 1902) e sui tre lavori (Lincei 1902; Rend. Palermo 1902; Rend. Torino 1906) consacrati ai moduli delle funzioni algebriche nei quali sono raccolti in semplice trattazione parecchi risultati noti, insieme ad altri nuovi ed interessanti, e tralasciando pur di dire di qualche altra pubblicazione pregevole, si può affermare che l'opera del SEVERI ha assunta una singolare importanza nelle ricerche sulla Geometria sopra una superficie, ossia nella teoria delle funzioni algebriche di due variabili.

Per queste ricerche è notevole dapprima la Memoria: *Sulla corrispondenza* ecc. (Memorie dell'Acc. di Torino, 1903), ove il SEVERI aggiunge ai risultati dell'HURWITZ sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica belle ed utili interpretazioni geometriche e ne fa poi una notevole applicazione allo studio delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve o di una curva. Questa memoria e varie note, uscite nel 1902 e 1903 e rivolte a semplificare e perfezionare varie teorie aprirono al SEVERI la via a maggiori scoperte.

Basta ricordare due memorie. L'una è *Il teorema d'*ABEL *sulle superficie algebriche* (Annali di matematica 1905), completata e perfezionata dal lavoro sullo stesso argomento dei Rendiconti di Palermo (1906). Nella detta Memoria il Severi estende, in due modi diversi, alle superficie il teorema d'ABEL e ricava da quello che egli chiama 1° teorema d'ABEL la dimostrazione di un teorema di straordinaria importanza [una superficie algebrica di generi geometrico, aritmetico p_g, p_a possiede $q = p_g - p_a$ integrali semplici di 1ª specie ed $n = 2\ (p_g - p_a)$ integrali semplici

di 2ª specie], al quale teorema l'A. aveva già consacrato parecchi lavori precedenti (arrivando fino alla diseguaglianza $q \leq p_g - p_a$ ed $r \leq 2(p_g - p_a)$ e, simultaneamente col PICARD, alla eguaglianza $r - q = p_g - p_a$) e che era stato poi completamente raggiunto dal CASTELNUOVO.

L'altra Memoria del SEVERI è: *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (Math. Annalen, 1905); ivi è stabilita l'esistenza di una base sopra una superficie algebrica qualunque, cioè la possibilità di determinare un numero intero positivo ϱ tale che ogni curva della superficie appartenga ad un medesimo sistema algebrico irriducibile con una combinazione lineare di ϱ curve comunque prese sulla superficie stessa. È questo un risultato di singolare importanza, prima noto solo in alcuni casi particolari, e dal quale il SEVERI trae notevoli conseguenze, ad es. questa che gli integrali semplici di 3ª specie relativi ad una superficie algebrica si riducono a combinazioni algebrico-logaritmiche se la superficie è regolare $(p_g = p_a)$ e soltanto allora. Ciascuna delle tre Memorie di cui si è detto particolarmente ed in ispecie ciascuna delle due ultime, costituisce da sola titoli di tale valore da rendere l'autore degno del premio della nostra Società.

I sottoscritti propongono per ciò che al prof. FRANCESCO SEVERI venga conferito il premio di matematica per l'anno 1906.

Roma, giugno, 1906.

La Commissione:
L. BIANCHI
U. DINI
V. VOLTERRA

Relazione sul premio per le scienze fisiche e naturali (anno 1906), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: Golgi, Grassi, Strüver.

La Commissione composta dei Soci Golgi, Grassi e Strüver, incaricata di proporre l'autore italiano della migliore Memoria delle scienze fisiche e naturali inedita o pubblicata dal 1901 in poi, dopo maturo esame è venuta alla determinazione di far cadere la scelta sul nome dell' ing. Carlo Viola, ora professore di mineralogia nella R. Università di Parma.

Da molto tempo il Viola si è dedicato principalmente agli studî cristallografici e ha efficacemente contribuito al progresso della cristallografia colle sue numerose ricerche sperimentali e investigazioni teoriche su quasi tutte le proprietà geometriche e fisiche dei cristalli. È noto l'interesse che provocò la sua ultima pubblicazione *Grundzüge der Kristallographie* (Lipsia 1904).

Ma la Commissione ha portato la sua attenzione in particolare modo sugli studî ottici del Viola pubblicati, dopo tanti altri precedenti, nel 1904 e anni seguenti, nelle Petrographische Mittheilungen dello Tschermak ora redatte dal prof. Becke di Vienna, nella Zeitschrift für Krystallographie ecc. del prof. Groth di Monaco di Baviera e nel Bulletin de la Société française de Minéralogie.

Nella Memoria *Ueber das Glaukisiren verschiedener Feldspäthe* (Groth, Zeitschrift, 1901, 34, pag. 171-195) il Viola studia il fenomeno della glaucescenza nella « pietra della luna » dell'isola di Ceylan, nell'albite di Amelia Co. Va., nella adularia del Zillerthal, nell'albite di Lakous e di Schmirn. Egli viene alla conclusione che il fenomeno si deve a minutissimi corpuscoli racchiusi dai feldspati suddetti, mettendo in rilievo l'analogia della glaucescenza col colore celeste del cielo, spiegato dal Rayleigh colla teoria dei mezzi torbidi. In una appendice dimostra che non è possibile di ricondurre il fenomeno della glaucescenza a quello dei colori di polarizzazione delle lamelle sottili.

Nello stesso anno 1901 il Viola pubblicò nelle Petrogr. Mitth., vol. 20, pp. 199-209, una breve Memoria dal titolo *Ueber die optische Orientirung des Albits und das Tschermak'sche Gesetz*, nella quale difende i risultati prima da lui ottenuti dalla critica del Becke e sostiene che le proprietà ottiche dei plagioclasi si prestano ugualmente bene alla teoria di Tschermak, la quale considera i plagioclasi come una serie continua di miscele isomorfe, come all'opinione, sostenuta anche dai più illustri petrografi francesi, che cioè abbiamo da fare con un certo numero (l'autore ne ammette 7) di specie distinte.

Colla Memoria dal titolo *Lichtbrechungsverhältnisse des Turmalins* (Groth, Zeitschrift, 1902, vol. 37, pp. 120-137) l'autore torna a trattare un argomento già prima da lui studiato. Applicando il metodo di Stokes studia la dipendenza degli

indici di rifrazione della tormalina dalla direzione e, in base ai suoi resultati, viene alla conclusione che la tormalina o è otticamente biasse, o che è uniasse ma non segue la legge di FRESNEL, ovvero non segue la legge di FRESNEL, sia uniasse o biasse.

Oltre alle Memorie suindicate d'indole più sperimentale, il VIOLA ha pubblicato, nel periodo dal 1901-5, una serie di investigazioni d'indole generale e teorica sulle proprietà ottiche dei cristalli birifrangenti. Sono:

I. *Die Bestimmung der optischen Constanten eines Krystalles aus einem einzigen beliebiegen Schnitte* (GROTH, Zeitsch., vol. 36, 1902, pp. 245-251).

II. *Observation sur la Note de M. A. CORNU* (Bull. Soc. française de Min., 1902, vol. 25, pag. 88).

III. *Détermination des trois paramètres optiques principaux d'un cristal* (ibid., pp. 147-154).

IV. *Die Minimalablenkungen des Lichtes durch doppeltbrechende Prismen und die Totalreflexion der optisch zweiaxigen Krystalle* (GROTH, Zeitsch., 1903, vol. 37, pp. 358-368),

Nella prima Nota l'autore discute i casi eccezionali, già prima del 1900 da lui rilevati, in cui il metodo allora adoperato per la determinazione delle costanti ottiche da una sola sezione non dà risultato univoco, e dimostra come si possa eliminare l'incertezza.

Nelle due Note stampate in francese il VIOLA rivendica anzitutto per sè la priorità di una formola data più tardi anche dal CORNU, e espone, come nella prima Nota, il modo di risolvere il problema indicato nei casi dubbi.

Nell'ultima Memoria l'autore tratta il problema della minima deviazione della luce in prismi di cristalli otticamente biassi in modo più generale di quel che si era fatto prima, indicando tutti i casi in cui un tale prisma può esser tagliato in modo che nella posizione della deviazione minima l'angolo d'incidenza delle onde entranti diventa uguale all'angolo di uscita, supposto l'ambiente isotropo. In seguito risolve il problema di indicare tutte le orientazioni che deve possedere un prisma, il cui spigolo rifrangente deve coincidere con una direzione cristallografica data, e che produce deviazione minima per angoli d'entrata e uscita uguali. Egli trova che la bisettrice esterna di un tale prisma può avere quattro diverse direzioni. Aggiungendo osservazioni sulla riflessione totale, il risultato dall'autore ottenuto guadagna in applicabilità pratica.

Roma, giugno 1906.

La Commissione:
C. GOLGI
B. GRASSI
G. STRUEVER.

Relazione sul conferimento della medaglia Matteucci (anno 1906), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: Blaserna, Righi, Ròiti.

James Dewar, nato nel 1842 a Kincardine-on-Forth in Scozia, compiè i suoi studî e mosse i primi passi nell'insegnamento presso l'Università di Edimburgo; nel 1873 passò professore di filosofia naturale a Cambridge, indi fu nominato *Fallerian Professor* presso l'Istituzione Reale di Londra, ove è pure direttore del Laboratorio fondato in onore di Davy e Faraday.

Non ci soffermeremo a ricordare i contributi ch'egli recò alla conoscenza dei composti aromatici, nè le altre importanti ricerche di chimica colle quali iniziò la sua carriera scientifica. Ma non possiamo non rilevare i lavori che eseguì dal 1878 al 1890, per lo più in comune col prof. G. D. Liveing di Cambridge, e che senza dubbio fanno parte della produzione più eletta nel campo della spettrometria. Essi sono descritti in una cinquantina di brevi Note libere da ogni preconcetto, ammirevoli per genialità sperimentale, ricche di dati perfettamente attendibili ed universalmente accettati, feconde per la loro portata teorica. Dewar e Liveing indagarono da prima i fenomeni d'inversione per molti elementi, poi studiarono l'influenza della temperatura sugli spettri degli elementi medesimi, e come essi spettri vengano modificati dalla presenza di altri elementi. Interessantissime sono le loro ricerche intorno ai vari spettri del carbonio e de' suoi composti, ed intorno ai fenomeni di sintesi che si manifestano nell'arco elettrico. Fornirono poi le prime determinazioni esatte nella regione spettrale ultravioletta, assegnando con la massima cura le lunghezze d'onda per un buon numero d'elementi.

Diversi altri problemi misero in evidenza la straordinaria abilità sperimentale del Dewar e sopra ogni altro gli procurò fama mondiale il problema di effettuare temperature bassissime, cui egli si dedica indefessamente e coraggiosamente da oltre un ventennio, con la soddisfazione di veder coronata l'opera propria dalla liquefazione e solidificazione dell'idrogeno, che gli permise di studiare le proprietà chimiche e fisiche dei gas, già ritenuti incoercibili, quando hanno cambiato il loro stato di aggregazione.

Essendosi ingegnosamente procurato i mezzi di render lievi le perdite per evaporazione di questi nuovi liquidi volatilissimi, e così di conservarli a lungo in grandi quantità, ne fece un uso sagace pei indagare gli svariati fenomeni che si producono alle loro temperature d'ebollizione, già basse, ed ulteriormente abbassate per espansione.

Estesissimo è il campo coperto dal Dewar in siffatti studî: variazioni di densità e di coesione, azioni chimiche e fotografiche, fosforescenza e radioattività, proprietà ottiche, termo-elettricità, conduttività ed induttività elettriche, suscettività

magnetica. Troppo lunga e superflua sarebbe qui, perchè presente a tutti, l'enumerazione degl' importanti ed in parte inattesi risultati da lui conseguiti. Meglio limitarci ad accompagnare la medaglia Matteucci, che gli conferiamo, coll'augurio che dai 13°, cui è giunto, egli scenda ancora più giù verso lo zero assoluto, e riesca a liquefare anche l'elio.

Roma, luglio 1906.

La Commissione:

P. Blaserna

A. Righi

A. Ròiti.

Relazione sul premio per la Matematica (anno 1907), *presentata dalla Commissione composta dei Soci:* BIANCHI, DINI, VOLTERRA.

La Commissione incaricata di proporre l'autore della migliore Memoria (inedita o pubblicata dopo il 1902) di Matematica, dopo maturo esame, si è unanimemente pronunziata in favore del prof. GIUSEPPE LAURICELLA della R. Università di Catania.

Questo chiaro Autore prosegue da lunghi anni con mirabile perseveranza delle ricerche dirette a porre sopra solide e sicure basi la teoria matematica della elasticità ed altre dottrine affini della fisica matematica.

Una delle questioni che hanno presentato maggiori difficoltà sulla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici è stata quella di stabilire con rigore il *teorema di esistenza* pur limitandosi al caso dei corpi omogenei e isotropi.

Già nel suo antico lavoro sull'*equilibrio dei corpi elastici isotropi* pubblicato negli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa nel 1895, il LAURICELLA aveva tentato di dimostrare il teorema di esistenza giovandosi del *metodo di Neumann*, metodo che aveva dato resultati di così grande importanza nella trattazione della equazione differenziale di LAPLACE. Ma in quel lavoro il LAURICELLA era riescito a provare l'esistenza degli integrali delle equazioni dell'elasticità solo nel caso in cui il rapporto delle costanti elastiche è compreso entro certi limiti, i quali sono tali che rendono il caso stesso di interesse puramente teorico.

Si trattava quindi di estendere il teorema togliendo questa restrizione e supponendo che il parametro, il quale comparisce nelle equazioni differenziali, avesse un valore positivo qualunque. Una tale estensione venne cercata dal LAURICELLA in una successiva Memoria pubblicata nel Nuovo Cimento nel 1899, nella quale egli opportunamente si giovava dei metodi escogitati dal POINCARÉ nella teoria della propagazione del calore.

Ma questo lavoro, in alcune parti assai faticoso, meritava di essere perfezionato e semplificato. E tale perfezionamento venne raggiunto dal nostro Autore nella Memoria inserita nel 1905 negli Annali di Matematica nella quale egli ha impiegato con successo i resultati ottenuti dal LIAPOUNOFF nelle sue belle ricerche sul problema di DIRICHLET. Per tutti quei campi nei quali sono validi i resultati del LIAPOUNOFF il LAURICELLA ha dimostrato l'esistenza degli integrali regolari delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi ed omogenei qualunque sia il valore positivo del parametro che comparisce nelle suddette equazioni.

Il LAURICELLA non si è accontentato però di aver raggiunto questo resultato. In due recenti scritti pubblicati nel 1906 nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei egli ha applicato felicemente al problema dell'equilibrio elastico il fecondo metodo

delle equazioni integrali analogamente a quanto aveva fatto il FREDHOLM per la equazione di LAPLACE, trattando tanto il caso di un mezzo elastico finito, quanto d'un mezzo indefinito. Egli è riescito così ad estendere notevolmente i resultati già ottenuti. Le applicazioni poi del metodo delle equazioni integrali a queste questioni e ad altre pure importanti della fisica matematica vennero raccolte dal LAURICELLA in una grossa e bella Memoria attualmente in corso di stampa nel Nuovo Cimento, di cui la prima parte è già stata stampata, mentre le altre sono tuttora manoscritte e compariranno nei prossimi fascicoli del giornale.

Il contributo apportato dal LAURICELLA alla teoria della elasticità con ciascuno degli scritti precedentemente esaminati, posteriori al 1902, lo rendono meritevole di essere prescelto per il premio che deve conferire quest'anno la Società Italiana delle Scienze. Non vogliamo però passare sotto silenzio, perchè meritevoli di lode, altri lavori da lui compiuti nello stesso periodo di tempo nel campo della elasticità, come quelli: *Sulla deformazione della sfera elastica*, pubblicati nel 1903 nel Nuovo Cimento e nel 1904 nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei coi quali si apportano eleganti contributi alla soluzione dell'Almansi; la Nota *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche* (Rend. Lincei 1905) ed infine la Memoria *Sui potenziali elastici ritardati* (Atti della Accademia Gioenia, 1906) in cui vengono estesi all'insieme di questi, teoremi ben conosciuti per i potenziali ordinarî.

Roma, marzo 1907.

La Commissione:

L. BIANCHI.

U. DINI.

V. VOLTERRA.

Relazione sul premio per le scienze fisiche e naturali (anno 1907), *presentata dalla Commissione composta de' Soci*: Golgi, Grassi, Struever.

La Commissione incaricata di conferire la Medaglia dei Quaranta « all'Autore della migliore Memoria di scienza naturale durante il triennio 1904-1906 » dopo maturo esame, sentito anche il parere del collega prof. R. Pirotta, ha stabilito di conferire questo premio al sig. Biagio Longo, professore di botanica nell'Università di Siena.

Da parecchi anni egli si occupa della fecondazione e dei processi, che possono accompagnarla, nei vegetali ed è arrivato a conclusioni nuove molto interessanti e in gran parte già confermate da altri autori botanici. I lavori del Longo sull'argomento in discorso sono parecchi: per tenerci nei limiti del triennio prescritto dal regolamento, noi abbiamo deliberato di premiare la Memoria dal titolo, *Osservazioni e ricerche sulla nutrizione dell'embrione vegetale*, con 4 tavole, pubblicata nel II vol. degli Annali di Botanica del prof. R. Pirotta (1905), e le Note *Acrogamia aporogama nel Fico domestico* (idem, III vol., 1906) e *Ricerche sul Fico e sul Caprifico* (Rendiconti Lincei, Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XV, S. V, 1° sem., pag. 373, 1906).

La Memoria tratta della zucca, le Note trattano del fico; sono argomenti differenti, ma il punto di partenza delle ricerche è sotto un certo aspetto lo stesso, la mancanza, cioè, del micropilo che si verifica sì nella zucca che nel fico.

Il Longo ha studiato appunto dapprima col suo maestro prof. Pirotta e poi da solo il modo di penetrazione del tubetto pollinico nei casi in cui manca il micropilo. Egli aveva scoperto che nella *Cucurbita Pepo* il tubetto pollinico penetra secondo il tipo mesogamico ed a percorso endotropico ed era stato condotto a formulare una nuova interpretazione di questo percorso, alla quale si associarono poi Giard, Lloyd, Kirwood e altri. Successivamente — e ciò forma appunto oggetto della Memoria a cui conferiamo il premio — dallo speciale comportamento del tubetto pollinico, sempre nella *Cucurbita pepo* fu condotto dopo lunghe, accuratissime e difficili ricerche, a scoprire in questo vegetale un modo affatto nuovo e da nessuno mai sospettato di nutrizione dell'embrione, fenomeno che è già stato confermato dal Kirwood.

Prima del Longo erano stati osservati soltanto casi di nutrizione dell'embrione operata coll'intervento di parti che appartengono all'ovulo, anzi al sacco embrionale (sospensore, finergidi, antipodi, albume). Il Longo ha trovato che nella zucca è il tubo pollinico, che, dopo aver compiuto l'ufficio che sembrava fosse il solo a lui assegnato, di trasportare, cioè, dove sta la cellula sessuale femminea gli spermatozoi per rendere possibile la fecondazione, cambia di funzione e ne assume una nuova non meno importante, incaricandosi esso stesso di andare a cercare e di prendere dai

luoghi di deposito e trasportare all'embrione in via di sviluppo i materiali nutritizi necessari per assicurarne lo sviluppo completo.

L'A. stabilisce che la curiosa struttura del tubo pollinico di questa pianta e il modo assolutamente nuovo di comportarsi di esso anche prima ma specialmente dopo avvenuta la fecondazione, sono in relazione con questa funzione di nutrizione dell'embrione, dimostrando con accurate osservazioni, con interessanti ricerche e con sana e fina critica, che la nutrizione dell'embrione in questa pianta non può essere fatta che dal tubo pollinico, il quale pertanto si comporta in modo affatto speciale sia morfologicamente che fisiologicamente.

Ben nota è la annosa e vessata questione della caprificazione, collegata intimamente col modo di impollinazione e colla fecondazione. Il Longo con ricerche di molto valore, oltre a correggere errori nei quali erano caduti i predecessori nella interpretazione della struttura dei ricettacoli fiorali dei fichi, ed a far rilevare particolari interessanti sulla caprificazione, porta un contributo notevolissimo alla soluzione del problema, e anche questa volta i suoi risultati sono già stati confermati dal Leclerc du Sablon. Il Longo trova che l'ovulo del fico è senza micropilo, che ha luogo penetrazione del tubo pollinico nell'ovulo secondo il tipo della acrogamia aporogama, tipo fatto conoscere dal Pirotta e dal Longo stesso per il *Cynomarium coccineum*, stabilisce quindi che nel fico comune ha luogo fecondazione (e ne segue tutto il processo) e non vi è partenogenesi come si tendeva a ritenere dopo le osservazioni di Treub sopra un fico esotico.

I fatti nuovi messi in luce dal Longo contribuiscono senza dubbio al progresso della scienza e giustificano la nostra deliberazione di conferire il premio per le scienze naturali dei Quaranta al prof. Biagio Longo per le sue ricerche sulla nutrizione dell'embrione della zuoca, operata coll'intervento del tubo pollinico, e per la definitiva soluzione del problema della caprificazione.

Roma, giugno 1907.

La Commissione:

C. Golgi

B. Grassi

G. Struever.

Relazione sul conferimento della medaglia Matteucci (anno 1907), *presentata dalla Commissione composta dei Soci*: Blaserna, Righi, Ròiti.

Sir William Ramsay, nato nel 1852 a Glasgow, fece quivi i suoi studi fino al 1870, poi frequentò per due anni il laboratorio di Fittig a Tubinga, dove conseguì il grado di dottore in filosofia con una tesi di chimica organica: e seguitò ad occuparsi di chimica organica negli otto anni successivi, mentre era assistente di chimica nella sua città natale. Ma dal 1880, quando fu nominato professore a Bristol d'onde passò a Londra nel 1887, egli dedica una indefessa operosità a coltivare quella zona che è comune ai due dominî della chimica e della fisica.

Copioso ed importante è, fra l'altro, il suo contributo nelle questioni che riguardano i volumi molecolari, lo stato critico e le proprietà dei liquidi, l'energia molecolare superficiale, l'espansione dei gas rarefatti ed in generale la termodinamica.

La sua fama mondiale è però legata più specialmente alla scoperta ed allo studio dei così detti gas nobili.

Nelle classiche determinazioni di densità, Lord Rayleigh, avendo trovato l'azoto atmosferico per circa $^1/_{200}$ più denso dell'azoto estratto dai composti chimici, si associò il prof. Ramsay per approfondire lo studio di quest'anomalia. Entrambi erano convinti ch'essa derivasse dalla presenza nell'aria d'un gas fino allora ignoto, e si accinsero a provarlo sperimentando ciascuno nel proprio laboratorio, ma conferendo continuamente intorno al procedere delle loro indagini, sino a che nell'agosto del 1894 poterono annunziare all'Associazione Britannica la scoperta dell'*argon*, e successivamente pubblicarono nelle *Philosophical Transactions* del 1895 la magistrale Memoria sul nuovo costituente dell'atmosfera.

Non soltanto nell'aria, ma anche nella parte solida del nostro globo Sir William Ramsay, di propria iniziativa, si diede a ricercare l'argon e tale ricerca lo condusse ad estrarre da certi minerali uranitici un altro gas ancora, il cui spettro presenta la linea D_3 osservata fin dal 1868 nella cromosfera del sole ed attribuita all'ipotetico elemento al quale si era per ciò dato il nome di *helium*. Il nostro Palmieri asseriva bensì nel 1881 d'aver riscontrato la medesima linea nello spettro d'una sublimazione vesuviana (¹) che forza maggiore gl'impedì d'analizzare compiutamente; ma rimane senza contestazione al Ramsay il merito d'aver separato, quattordici anni dopo, e di avere studiato pel primo una sostanza per tanto tempo ricercata invano sulla terra.

L'acume, l'abilità, la sicurezza da lui spiegate in queste fortunate ricerche che aprivano nuovi orizzonti alla scienza, gli valsero il plauso universale. L'America gli

(¹) Rendiconto dell'Accademia di Napoli, anno XX, pag. 233.

conferì la medaglia Barnard ed un premio di 5000 dollari, l'Accademia di Parigi il premio Leconte di 25000 franchi e l'accolse nel suo seno, la Società Reale di Londra, che già lo contava fra i suoi, gli assegnò la medaglia Davy, la Società chimica inglese la medaglia Longstaff.

Ma qui non finisce l'opera feconda di Sir William Ramsay. Guidato da considerazioni teoriche, egli si mise a rintracciare un elemento che avrebbe dovuto avere un peso atomico intermedio fra quelli dell'argon e dell'helium, già da lui determinati: e dopo aver battuto indarno cammini diversi, prese trionfalmente la via allora allora dischiusa colla produzione di bassissime temperature, e mercè distillazioni frazionate arrivò, coll'aiuto di Travers, ad impossessarsi dell'elemento agognato che chiamò *neon*, e di più ne scoprì altri due, il *krypton* e lo *xenon*, la cui esistenza aveva pure intraveduto teoricamente.

Questi corpi, gassosi alle temperature ordinarie, si trovano nella nostra atmosfera, ma in proporzioni così esigue da renderci ammirati davanti a chi seppe vincere le difficoltà enormi di separarli in quantità sufficienti per individuarli e metterli a posto nella serie periodica degli elementi chimici. Egli riuscì in tal modo a stabilire un nuovo gruppo del quale nessuno aveva mai avuto la menoma idea, e che si differenzia profondamente da tutti gli altri.

E come se ciò non bastasse, ad accrescere interesse ai nuovi corpi, egli constatò che uno di essi, l'helium, si può considerare come un prodotto delle evoluzioni del radio. E con altri contributi ancora egli ha avvantaggiato lo studio della radioattività in genere.

Allo scienziato insigne la Germania conferì nel 1903 la medaglia Hoffmann, e la Svezia il premio Nobel per la chimica nel 1904.

Ma noi confidiamo che, non ostante gli altissimi attestati di stima tributatigli dai Chimici d'ogni paese, Sir William Ramsay gradirà la medaglia Matteucci che gli offriamo come una dimostrazione che, anche nei riguardi della fisica, le sue conquiste ed i suoi metodi sono dai Fisici degnamente apprezzati.

Roma, marzo 1907.

La Commissione:

P. Blaserna

A. Righi

A. Ròiti.

STATUTO
DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

I. — La Società Italiana delle Scienze è composta di *quaranta* Soci tutti Italiani.

II. — L'oggetto precipuo che la Società medesima si propone è di raccogliere e di pubblicare sotto il titolo di *Memorie di Matematica e di Scienze Fisiche e Naturali*, i lavori più importanti de' Soci, o anche di estranei alla Società, nel campo delle dette scienze, secondo le norme fissate in questo Statuto.

III. — Dei quaranta Soci uno sarà Presidente, e durerà in carica sei anni.

IV. — La Società avrà due Segretari scelti fra i Soci, uno per le Matematiche e le Scienze Fisiche, ed uno per le Scienze Naturali.

Avrà pure un Socio Amministratore residente in Roma.

V. — La Società, oltre i quaranta Soci Nazionali, avrà una Classe formata di dodici Soci Stranieri; istituita per segnalare e onorare il merito nelle scienze in qualunque paese fuori d'Italia.

VI. — L'aggregazione alle Classi de' Soci Nazionali e degli Stranieri si farà nel modo seguente. Per ogni posto che resti vacante, dovrà il Presidente col mezzo d'uno dei Segretari proporre sei nomi a ciascuno dei Soci Nazionali, il quale ne sceglierà uno, indicandolo in una scheda con la propria firma da inviarsi al Presidente. Quello dei sei che entro il termine di un mese dalla proposta raccoglierà più suffragi, s'intenderà aggregato. Qualora l'elezione per parità di voti riuscisse indecisa fra due o più candidati, il Presidente avrà il voto di preponderanza per decidere sulla scelta.

Ognuno dei Soci nel rimandare la scheda col nome della persona da lui scelta, potrà anche inscrivervi un nome fuori dei proposti dal Presidente. Nel caso che un nome si trovi così ripetuto in sei schede nella stessa votazione, dovrà il Presidente comprenderlo tra i sei che proporrà nella prossima vacanza. Se più d'un nome si troverà raccomandato da sei Soci, il Presidente potrà limitarsi a proporre nella prossima nomina uno solo di essi.

Se più posti di Soci Nazionali o Stranieri si troveranno vacanti, il Presidente non potrà proporre per ciascuna categoria di Soci, se non la nomina di un Socio per volta.

Lo spoglio delle schede sarà fatto dal Presidente assistito da uno dei Segretari, il quale parteciperà ai Soci l'avvenuta elezione.

VII. — All'elezione del Presidente saranno invitati i Soci Nazionali con lettera circolare firmata dai due Segretari; ai quali i medesimi Soci faranno tenere in iscritto il nome del Socio che scelgono a Presidente. La pluralità dei voti, che arriveranno ai Segretari dentro il termine di due mesi dalla data dell'invito, determinerà la elezione, che sarà dagli stessi Segretari annunziata ai Soci Nazionali.

Nel caso di parità di voti sarà Presidente il Socio di più antica nomina.

VIII. — Ciascheduno dei Soci Nazionali ha facoltà di fare inserire negli Atti la relazione d'una scoperta utile o altro scritto importante anche di persona non

aggregata, semprechè italiana; a patto per altro che quello scritto o quella scoperta siano giudicati degni degli Atti stessi anche da un altro Socio, che verrà delegato segretamente dal Presidente, di volta in volta, all'esame del lavoro presentato; e che il nome di questo Socio (quando il suo giudizio sia stato favorevole) si stampi insieme con quello del presentatore.

IX. — Nel caso che alcuni di questi Autori non Soci, abbiano presentato tre Memorie giudicate degne d'essere inserite negli Atti della Società, il Presidente dovrà, per tre volte successive, aggiungere i loro nomi, segnandoli con asterisco, ai sei che a tenore dell'articolo VI, presenta per l'elezione d'un Socio Nazionale.

X. — Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi nei volumi della Società debbono essere scritte in lingua italiana. Quello dei due Segretari incaricati della pubblicazione degli Atti, che riceverà il manoscritto, dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sia stampato con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pei tomi susseguenti.

XI. — Tutto ciò che è destinato per gli Atti dev'essere nuovo, inedito, ed analogo all'indole scientifica di questi volumi, che non ammette sfoggio di erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XII. — I fogli stampati di ciascun volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le domandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Soci dovranno cedere il luogo a quelle dei Soci.

XIII. — La Società non si fa responsabile delle opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev'essere mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XIV. — Non permette per altro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario rispettivo, e, avverandosi il caso, ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XV. — Gli Autori, sia delle Memorie, sia di Elogi avranno in dono cento esemplari dei loro scritti, con frontispizio apposito e con la numerazione delle pagine ed il registro ricominciati. Coloro che ne desiderassero di più, pagheranno la spesa occorrente pel maggior numero di copie, senza calcolare la composizione tipografica.

XVI. — Alle principali Accademie nazionali ed estere che mandano le loro pubblicazioni alla Società, ai Soci Nazionali ed ai Soci Stranieri sarà inviato un esemplare di ogni volume delle Memorie sociali che andrà successivamente uscendo alla luce.

XVII. — I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantenere l'osservanza dello Statuto; eleggere i Segretari ed il Socio Amministratore; avere in governo e cura ogni interesse della Società; rivedere e sottoscrivere i conti dell'amministrazione partecipandone ai Soci i risultati; e ragguagliare finalmente il successore dello stato degli affari nell'atto di cedergli l'uffizio.

XVIII. — I due Segretari sono incaricati di raccogliere, ciascuno per la parte sua, le Memorie per gli Atti, curarne le correzioni tipografiche, l'incisione delle tavole, la spedizione delle medesime Memorie agli Autori, e la spedizione dei volumi degli Atti. Cureranno pure la corrispondenza del Presidente, e la spedizione dei diplomi, sui quali uno di essi aggiungerà la propria firma a quella del Presidente.

XIX. — Il Socio Amministratore è incaricato di riscuotere le rendite della Società, custodirne i titoli, ed eseguire i pagamenti che gli verranno ordinati dal Presidente. È a lui affidata la custodia dell'Archivio, e di ogni altra suppellettile della Società.

Compilerà il conto dell'amministrazione e gli Annali che verranno pubblicati in capo ai volumi delle Memorie.

XX. — La Società avrà tre Membri pensionari; la pensione sarà di lire trecento pagabili per metà allo spirare di ogni semestre, non computate in alcun caso, sia di morte, sia di rinunzia, le frazioni di semestre.

Godranno della pensione i tre più anziani di nomina tra i Soci Nazionali.

XXI. — Con R. Decreto del dì 13 ottobre 1866 essendo stati istituiti due premi ciascuno di una medaglia d'oro del valore di lire 400 da conferirsi dalla Società agli Autori delle due migliori Memorie Italiane, l'una di Matematica e l'altra di Scienze Fisiche e Naturali; e con legato del benemerito Socio Màtteucci essendo stato istituito il premio di una medaglia d'oro del valore di lire 200 da conferirsi all'Autore Italiano o Estero che avrà fatta la scoperta di Fisica giudicata più importante negli ultimi tempi; nel conferimento di questi premi saranno osservate le seguenti norme:

§ 1. Il Presidente inviterà i suoi Colleghi a proporre i nomi di tre Soci per ogni commissione delegata a dar giudizio di ciascun premio. Scorso un mese dal giorno dell'invito, si farà lo spoglio delle schede pervenute alla Presidenza come per la nomina dei Soci; e saranno eletti commissari coloro che avranno riportato maggior numero di suffragi.

§ 2. Sino a che dura il giudizio, i nomi dei Soci componenti ciascuna commissione rimarranno segreti, e soltanto saranno noti scambievolmente i membri della medesima commissione, affinchè si possano mettere d'accordo nel dare il loro giudizio.

§ 3. Pronunziato il giudizio, i nomi dei premiati e dei componenti le commissioni esaminatrici saranno subito portati a conoscenza dei Soci; e le relazioni saranno pubblicate negli Atti della Società.

§ 4. Le Memorie premiate inedite saranno pubblicate negli Atti.

§ 5. Ai Soci Nazionali non potrà essere conferito alcun premio.

§ 6. Non avendo luogo la distribuzione di qualcuna delle suddette medaglie, il Presidente inviterà i Soci a deliberare se i premi non distribuiti debbano conferirsi nell'anno successivo, o rimanere in cassa per altre occorrenze della Società.

MEMORIE

Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.

Memoria del Socio LUIGI BIANCHI.

PREFAZIONE.

Si sa come i teoremi fondamentali relativi alle deformate delle quadriche generate dal rotare di una conica *attorno all'asse focale,* scoperti da GUICHARD nel 1899, stabilendo un intimo legame fra la deformazione di queste quadriche e quella della sfera, hanno permesso di costruire una teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante *positiva* affatto analoga a quella già prima stabilita per le superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche), e di tradurre quindi i risultati di questa teoria in corrispondenti proprietà per la deformazione di quelle quadriche rotonde (¹).

Ma, volendo restare nel campo reale, le teorie svolte fin qui si applicavano appunto soltanto alle quadriche di rotazione attorno all'asse focale, cioè all'*ellissoide allungato*, ed all'*iperboloide a due falde*, alle quali forme è da aggiungersi quella del *paraboloide*, le cui deformazioni dipendono dalle superficie d'area minima. Le ricerche che svolgo nella presente Memoria hanno precisamente per iscopo di completare queste teorie collo studio delle superficie *reali* applicabili sulle altre quadriche rotonde fin qui escluse, e cioè: *a*) *l'iperboloide rigato*; *b*) *l'ellissoide schiacciato*, alle quali forme dobbiamo aggiungere come terza forma: *c*) *l'ellissoide immaginario*. Esistono invero superficie *reali* applicabili sopra quest'ultimo ellissoide (da distinguersi del resto in più classi) e per esse valgono, come si vedrà, i medesimi teoremi come per le forme *a*) *b*). Per abbreviare indicheremo col nome comune di *quadriche di seconda specie* le quadriche della forma *a*) o *b*) o *c*); e diremo quadriche *di prima specie* le rimanenti sopra ricordate.

(¹) Cfr. la mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di matematica, Serie 3ª, T. III, 1899) e i Capitoli XVII, XXIV e XXV delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (2ª edizione in due volumi). Pisa, Spörri, 1902-1903.

La teoria delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde di prima specie si riconduce, come già abbiamo detto, a quella delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva; l'altra che ci proponiamo di costruire per le quadriche di seconda specie viene a collocarsi ancor più vicina a quella delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche, che fu il punto di partenza per tutta la teoria delle trasformazioni delle superficie di curvatura costante. E invero a base della teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche sta l'elemento geometrico delle congruenze rettilinee pseudosferiche, dotate delle seguenti proprietà caratteristiche: 1ª le due falde focali della congruenza sono applicabili l'una sull'altra e sulla pseudosfera (o sulla sfera immaginaria); 2ª sulle due falde focali della congruenza si corrispondono le linee assintotiche, ciò che esprimiamo dicendo che la congruenza è una congruenza W (*Lezioni*, § 242). Inoltre ha luogo la proprietà, di fondamentale importanza per la teoria delle trasformazioni, che ogni superficie pseudosferica appartiene, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze pseudosferiche. Orbene, per tutte le superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie hanno luogo proprietà geometriche affatto analoghe, che si riassumono nella seguente proposizione fondamentale per la nuova teoria:

Teorema A). — *Ogni superficie applicabile sopra una quadrica rotonda* Q *di seconda specie appartiene, come prima falda focale, ad una doppia infinità di congruenze rettilinee reali* W, *la cui seconda falda focale è applicabile sulla medesima quadrica* Q.

Il passaggio da una deformata S_0 della quadrica Q ad un'altra deformata S'_0, la quale insieme con S_0 costituisca le due falde di una delle ∞^2 congruenze W di cui si parla nel teorema, sarà una delle ∞^2 *trasformazioni* della superficie S_0. E se supponiamo in particolare che la quadrica Q sia la sfera immaginaria (di raggio puramente immaginario), veniamo a ricadere appunto nella ordinaria teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche.

Quanto alle operazioni analitiche necessarie per costruire da una deformata *nota* S_0 della quadrica Q le ∞^2 superficie S'_0 trasformate, diciamo subito che consistono nella integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati. Tanto risulta in effetto dal legame che presentano le indicate trasformazioni colle trasformazioni di Bäcklund di certe classi di superficie *immaginarie* di curvatura costante. Delle due costanti che entrano in una delle nostre trasformazioni per una data deformata S_0 della quadrica Q, una assegna il valore (reale od immaginario) della distanza focale nella corrispondente congruenza pseudosferica immaginaria. Indicheremo questa costante con τ e la trasformazione stessa, che fa passare dalla superficie primitiva S_0 ad una delle derivate S'_0, col simbolo B_τ. Ciò premesso, dal teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie di curvatura costante, e da alcune proprietà complementari che dimostreremo nel corso della Memoria, noi dedurremo la seconda proposizione fondamentale della teoria, che si dirà il

Teorema B) (teorema di permutabilità). — *Se da una superficie* S_0, *applicabile sopra una quadrica rotonda* Q *di seconda specie, si ottengono due nuove superficie* S'_0, S''_0 *applicabili sulla medesima quadrica* Q, *mediante due delle nostre trasformazioni* $B_{\tau'}$, $B_{\tau''}$ *a costanti* τ', τ'' *diseguali, esiste una quarta superficie*

S_0''' *della stessa specie, perfettamente determinata e costruibile in termini finiti da* S_0, S_0', S_0'', *che è legata alla sua volta alle medesime superficie* S_0', S_0'' *da due trasformazioni* $B_{\tau''}, B_{\tau'}$ *colle medesime costanti* τ'', τ' *invertite.*

Da questo teorema di permutabilità si deducono precisamente le medesime conseguenze come dall'analogo nella teoria delle superficie pseudosferiche e cioè che nell'applicazione successiva ed illimitata delle nostre trasformazioni alle superficie applicabili sulla quadrica Q, che via via si ottengono da una iniziale nota S_0, basta avere integrato la *prima* equazione di RICCATI perchè lo siano insieme tutte le successive: anche qui adunque, dopo il primo passo, l'applicazione del metodo si effettua senza alcun nuovo calcolo d'integrazione ([1]).

Le due proposizioni fondamentali A) B), alla cui dimostrazione completa saranno diretti gli sviluppi della presente Memoria, portano evidentemente la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie al punto stesso di sviluppo che la teoria delle superficie pseudosferiche aveva già da tempo raggiunta.

Converrà ora che all'enunciato di questi teoremi generali facciamo seguire alcune osservazioni per precisare l'estensione delle classi di superficie alle quali si applicano i teoremi stessi. E in primo luogo osserveremo che le superficie reali applicabili sopra una quadrica rotonda Q (di prima o di seconda specie) debbono propriamente distinguersi in due classi: quella delle superficie applicabili sulla regione reale di Q e quella delle superficie (reali) applicabili soltanto sopra una regione immaginaria, o ideale, di Q. Le prime sono le effettive superficie applicabili sopra Q *in senso ristretto*; le seconde, per usare di un termine la cui opportuna introduzione è dovuta al geometra russo PETERSON, si diranno *applicabili sopra* Q *al di là o fuori dei limiti.*

Ora i nostri teoremi A) B) valgono indistintamente per tutte le classi di superficie applicabili sulle quadriche Q di seconda specie sia che l'applicabilità abbia luogo in senso ristretto (o dentro ai limiti) sia per un'applicabilità fuori dei limiti. E, per precisare ancor più, aggiungeremo che se la quadrica Q è un iperboloide ad una falda, ovvero un ellissoide immaginario, le superficie S_0' derivate con una delle nostre trasformazioni da una iniziale S_0 sono applicabili in senso ristretto l'una sull'altra e per ciò, rispetto alla quadrica Q, applicabili insieme entro o fuori dei limiti. Se invece la quadrica Q è un ellissoide schiacciato, una trasformazione semplice B_τ fa passare da una superficie S_0 applicabile sull'ellissoide entro ai limiti (fuori dei limiti) ad una contigua S_0' applicabile sullo stesso ellissoide fuori dei li-

([1]) Debbo qui avvertire che, per il caso particolare dell'iperboloide rotondo ad una falda, avevo già comunicato i teoremi A) B) del testo in una Nota inserita nei Rendiconti dei Lincei (maggio 1905). Successivamente è comparso nel Giornale di matematiche (vol. XLIII, 12° della 2ª serie) un interessante lavoro del dott. O. CHIEFFI dal titolo: *Sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda e su alcune superficie che se ne deducono*, ove per via affatto indipendente da quella da me seguita l'autore perviene a stabilire l'esistenza di trasformazioni per le dette deformate, ciò che deve equivalere, pel caso particolare dell'iperboloide ad una falda, ad una parte del teorema A) del testo. Però nella Memoria del dott. CHIEFFI non figura l'elemento essenziale geometrico delle congruenze W del teorema A), nè il teorema B) di permutabilità, dal quale principalmente dipende l'efficacia del metodo di trasformazione.

miti (entro ai limiti). Insomma per *una* trasformazione B_τ di una superficie applicabile sull'ellissoide schiacciato cangia la classe a cui la superficie appartiene nella opposta ed occorre quindi applicare un numero *pari* di trasformazioni per rimanere nella medesima classe.

È necessario poi avvertire che fra le superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda richieggono una particolare trattazione le deformate *rigate* dell'iperboloide che, secondo una nota proposizione di LAGUERRE, dipendono dalle curve di BERTRAND, trasformate del circolo di gola dell'iperboloide. Quando la superficie S_0 applicabile sull'iperboloide è rigata, anche le sue ∞^2 superficie trasformate sono rigate e le nuove curve di BERTRAND che ne sono le linee di stringimento derivano dalla primitiva C linea di stringimento di S_0 (più precisamente dalla sua coniugata $\bar{C}$) con una di quelle trasformazioni delle curve di BERTRAND che, scoperte in un caso particolare dal DEMARTRES, furono poi generalizzate dal RAZZABONI.

Si può ora domandare se i teoremi A) B) siano veramente limitati alle sole quadriche rotonde di seconda specie o valgano piuttosto anche per quelle di prima. La risposta, come era facilmente prevedibile, è questa che: per renderli applicabili alle quadriche di prima specie conviene rinunziare alla *realità* delle congruenze W di cui parla il teorema A). Una trasformazione semplice B_τ fa allora passare da una superficie *reale* S_0 applicabile sulla quadrica Q di prima specie ad una contigua S_0' necessariamente immaginaria; ed è soltanto combinando opportunamente due trasformazioni B_τ successive, coniugate immaginarie, che si ottiene una nuova superficie reale.

Insomma la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle varie specie di quadriche rotonde risulta così perfettamente assimilabile a quella delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che ne è alla sua volta un caso particolare. Le superficie applicabili sulle quadriche rotonde di seconda specie si comportano precisamente come le ordinarie superficie pseudosferiche (deformate della sfera immaginaria); quelle applicabili sulle quadriche di prima specie si comportano invece come le superficie di curvatura costante positiva (deformate della sfera reale).

Da ultimo avvertirò che mi sono limitato nella presente Memoria a trattare delle superficie applicabili sulle quadriche *rotonde* principalmente nell'intento di esporre risultati completi. Per altro alcune ricerche complementari mi hanno già dimostrato che i teoremi stessi valgono anche per classi di superficie applicabili sopra quadriche generali (reali od immaginarie). Ritengo pertanto molto probabile che i teoremi in discorso conservino la loro validità per tutte le superficie applicabili sopra quadriche. È scopo delle mie ricerche successive sarà appunto di accertare questo fatto che, ove trovi la desiderata conferma, verrà a dare, mi sembra, alla teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche generali il suo assetto definitivo ([1]).

([1]) Nell'intervallo corso fra la presentazione e la stampa del presente lavoro ho potuto pienamente confermare queste previsioni per quanto riguarda le superficie applicabili sui *paraboloidi generali* ellittico ed iperbolico. Per esse valgono in effetto i medesimi teoremi A) e B) come per le quadriche rotonde di seconda specie ed anzi, nel caso dei paraboloidi, i processi di dimostrazione sono più semplici e rapidi. Queste nuove ricerche verranno presto pubblicate negli *Annali di matematica* (V. anche Rendiconti dei Lincei, settembre 1905).

§ 1.

Le superficie complementari delle quadriche a centro rotonde.

Alle nostre ricerche conviene premettere un esame accurato delle relazioni che intercedono fra una deformata qualunque S_0 di una quadrica rotonda Q e la sua superficie complementare $\bar{S}_0$, presa rispetto alle geodetiche di S_0 deformate dei meridiani della quadrica: di tale studio ci occupiamo in questo primo paragrafo. Prendendo per asse delle z l'asse di rotazione della quadrica Q, indichiamo con r, z le coordinate rettangolari di un punto mobile sulla curva meridiana, la cui equazione scriviamo

$$\frac{r^2}{A}+\frac{z^2}{B}=1,$$

significando A, B due costanti reali, che supponiamo però diseguali, a fine di escludere il caso già trattato di superficie a curvatura costante. Poichè r è il raggio del parallelo, l'elemento lineare della quadrica Q, ossia della superficie S_0, sarà dato dalla formola

$$ds_0^2=\frac{A^2+(B-A)r^2}{A(A-r^2)}\,dr^2+r^2\,dv^2, \tag{1}$$

il parametro v indicando la longitudine. Pel calcolo dell'elemento lineare $\overline{ds}_0$ della superficie complementare $\bar{S}_0$ ricorriamo alla formola generale data al § 136* delle mie *Lezioni* (vol. I, pag. 296) ed avremo

$$\overline{ds}_0^2=r^2\,d\varrho^2+\varrho^2\,dv_1^2,$$

ove si ponga

$$\varrho=\sqrt{\frac{A^2+(B-A)r^2}{A(A-r^2)}}. \tag{2}$$

Di qui, eliminando r, troviamo

$$\overline{ds}_0^2=\frac{A^2(\varrho^2-1)}{A\varrho^2+(B-A)}\,d\varrho^2+\varrho^2\,dv_1^2. \tag{3}$$

Ora se poniamo

$$\varrho=k\bar{r}\,,\ v_1=\frac{\bar{v}}{k}$$

e prendiamo convenientemente la costante k, potremo ridurre nuovamente la (3) alla forma stessa (1):

$$\overline{ds}_0^2=\frac{A^2+(B-A)\bar{r}^2}{A(A-\bar{r}^2)}\,d\bar{r}^2+\bar{r}^2\,d\bar{v}^2.$$

Basta invero assumere per questo $k^2 = \frac{A - B}{A}$ e quindi:

$$(4) \qquad \bar{r} = \sqrt{\frac{A^2 + (B - A) r^2}{A - r^2} \cdot \frac{A}{A - B}} \quad , \quad \bar{v} = \frac{A}{\sqrt{A - B}} v.$$

I due elementi lineari ds_0, $\overline{ds}_0$ sono dunque riducibili l'uno all'altro per mezzo di queste relazioni (4), le quali possono del resto, secondo i casi, rappresentare formole di trasformazione reali od immaginarie. Se consideriamo l'applicabilità di due superficie dal punto di vista generale analitico come equivalenza dei loro elementi lineari per trasformazioni reali od immaginarie, possiamo dire: *La superficie complementare di una superficie* S_0 *applicabile sopra una quadrica rotonda è applicabile sulla quadrica stessa* (¹).

Ben diversamente però si comportano le cose dal punto di vista *reale*, ove noi ci collochiamo. Diventa allora necessario esaminare singolarmente le cinque forme possibili per le quadriche rotonde (a centro) (²) e discutere le formole (4) non solo riguardo alla loro *realità* o meno, ma anche riguardo ai limiti entro i quali variano i nostri parametri, supposti reali. Distinguendo così le cinque forme di quadriche rotonde a centro, troviamo i risultati seguenti.

a) Ellissoide allungato: $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 < b^2$ (³).

Le formole (4) dimostrano che $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono puramente immaginari quando r, v sono reali; per ciò l'applicabilità di questa quadrica sulla complementare ha luogo solo *fuori dei limiti*.

b) Ellissoide schiacciato: $A = a^2$, $B = b^2$, con $a^2 < b^2$.

Allora $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono bensì reali per r, v reali; però mentre nella regione reale dell'ellissoide $r^2 < a^2$, dalla (4) si ha invece

$$\bar{r}^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2} \frac{a^4 - (a^2 - b^2) r^2}{a^2 - r^2},$$

quindi $\bar{r}^2 > \frac{a^4}{a^2 - b^2} > a^2$. Anche qui adunque, sebbene le formole di trasformazione siano reali, l'applicabilità della quadrica sulla sua complementare ha luogo soltanto al di là dei limiti.

c) Iperboloide a due falde: $A = -a^2$, $B = b^2$.

Le quantità $\bar{r}$, $\bar{v}$ sono immaginarie per r, v reali e la superficie è applicabile sulla complementare fuori dei limiti.

d) Iperboloide ad una falda: $A = a^2$, $B = -b^2$.

Le formole (4) diventano

$$\bar{r} = a \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) r^2 - a^4}{(a^2 + b^2)(r^2 - a^2)}} \ , \ \bar{v} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} v$$

(¹) Questo ci dà il primo e più semplice esempio di congruenze W della specie indicata nella prefazione, le due superficie complementari costituendo le due falde della congruenza. È questo l'unico caso in cui le nostre congruenze sono normali.

(²) Per il paraboloide, che a noi qui non occorre considerare, l'applicabilità della superficie S_0 sulla complementare ha luogo solo fuori dei limiti.

(³) Qui, come in seguito, a, b denotano costanti reali e positive.

e danno valori reali per $\bar{r}, \bar{v}$ quando r, v sono reali; ma di più, essendo nella regione reale dell'iperboloide $r^2 > a^2$, ne risulta anche evidentemente $\bar{r}^2 > a^2$. Dunque: *Ogni deformata dell'iperboloide rotondo ad una falda è applicabile in senso ristretto sopra la sua superficie complementare.*

D'altra parte però osserviamo che l'elemento lineare di questa quadrica

$$ds_0^2 = \frac{(a^2 + b^2)\, r^2 - a^4}{a^2 (r^2 - a^2)}\, dr^2 + r^2 dv^2$$

riveste forma reale anche quando

$$r^2 < \frac{a^4}{a^2 + b^2} < a^2 ,$$

cioè al di là dei limiti della regione reale dell'iperboloide. Per ciò noi dovremo considerare una seconda classe di superficie *reali* applicabili sull'iperboloide fuori dei limiti e per esse converrà scrivere il ds_0^2 sotto la forma

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 + b^2)\, r^2}{a^2 (a^2 - r^2)}\, dr^2 + r^2 dv^2$$

per ridurre positivi il numeratore ed il denominatore del coefficiente di dr^2. Ed anche per questa classe di superficie applicabili avremo evidentemente: *ogni superficie reale applicabile fuori dei limiti sull'iperboloide rotondo ad una falda ha per complementare una superficie della medesima specie.*

e) Ellissoide immaginario: $A = -a^2$, $B = -b^2$.

Qui abbiamo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 + (a^2 - b^2)\, r^2}{a^2 (a^2 + r^2)}\, dr^2 + r^2 dv^2$$

e le formole (4) di trasformazione sono:

$$\bar{r} = a \sqrt{\frac{a^4 + (a^2 - b^2)\, r^2}{(b^2 - a^2)(a^2 + r^2)}} \quad , \quad v = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, v .$$

Ma bisogna ancora suddistinguere, come per l'ellissoide reale, secondo che $a^2 > b^2$ ovvero $a^2 < b^2$.

*e*₁) Per la prima forma $a^2 > b^2$ si ha che $\bar{r}, \bar{v}$ sono puramente immaginarî per r, v reali ed inversamente. Come superficie normale del primo tipo con r, v reali si può prendere il *sinusoide iperbolico* (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 109):

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}\ \operatorname{senh}\left(\frac{z}{b}\right)$$

e per quella del secondo tipo (r, v puramente immaginarî) la sua complementare. L'applicabilità dell'una sull'altra ha luogo fuori dei limiti.

e_2) Per la seconda forma $a^2 < b^2$ si ha che $\bar{r}, \bar{v}$ sono reali ovvero puramente immaginarî insieme con r, v, onde due nuovi casi da suddistinguere.

Sottocaso e_2'). Quando r, v sono reali si ha

$$ds_0^2 = \frac{a^4-(b^2-a^2)r^2}{a^2(a^2+r^2)}\,dr^2+r^2\,dv^2$$

colla limitazione $r^2<\frac{a^4}{b^2-a^2}$, ed alla medesima limitazione soddisfa, come subito si vede, $\bar{r}^2$. Per questa classe di deformate dell'ellissoide immaginario l'applicabilità sulla complementare ha luogo dunque dentro ai limiti. Osserviamo poi che l'elemento lineare precedente appartiene alla classe di quelli che ammettono un elemento lineare *coniugato in deformazione* (¹), il quale anzi coincide nel caso attuale coll'elemento stesso. Le deformazioni delle superficie di questa classe si presentano per ciò a coppie di deformazioni coniugate.

Sottocaso e_2''). Venendo all'ultimo caso di r, v puramente immaginari, cangiamoli in ir, iv (e così $\bar{r}, \bar{v}$ in $i\bar{r}, i\bar{v}$) ed avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4+(b^2-a^2)r^2}{a^2(r^2-a^2)}\,dr^2+r^2\,dv^2$$

colla limitazione $r^2>a^2$. Come superficie tipica della classe possiamo prendere il *catenoide accorciato* (*Lezioni*, vol. II, pag. 109):

$$\varrho=\sqrt{b^2-a^2}\cosh\left(\frac{z}{b}\right)\quad(\varrho \text{ raggio del parallelo}),$$

ove si è posto

$$r=\frac{a\varrho}{\sqrt{b^2-a^2}}=a\cosh\left(\frac{z}{b}\right).$$

Come nel caso precedente, la superficie è applicabile in senso ristretto sulla propria complementare.

§ 2.

Deformazione di inviluppi di sfere colle due falde a curvatura costante.

A base delle presenti ricerche porrò, come già per la dimostrazione e lo sviluppo dei risultati di Guichard, quei teoremi sulla deformazione delle congruenze rettilinee e degli inviluppi di sfere che ho esposto nella mia Memoria sopra citata degli Annali (1899) e riportato nel Cap. XVII delle *Lezioni*. Quivi è risoluto il problema fondamentale della determinazione di tutti quegli inviluppi di sfere pei quali, deformando comunque la superficie S_0 luogo dei centri, l'una falda dell'inviluppo serba sempre la medesima curvatura costante K, il che porta di conseguenza che anche la seconda falda conserva la medesima curvatura K. Ma mentre allora si supponeva reale non solo la superficie S_0 luogo dei centri delle sfere ma anche reali le sfere

(¹) Vedi la mia Nota: *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie* (Rendiconti dei Lincei, aprile 1902).

stesse e di più le due falde dell'inviluppo, qui diventa essenziale per le nuove ricerche riprendere la discussione da un punto più generale di vista. Riterremo per ciò solo la prima condizione che *sia reale la superficie* S_0 *luogo dei centri delle sfere*, ma ammetteremo che le sfere stesse possano avere raggio reale od immaginario e, pur quando questo raggio sia reale, possano le due falde dell'inviluppo essere immaginarie (coniugate) anzichè reali.

Nella discussione così completata del problema vedremo presentarsi come possibili configurazioni di S_0 tutte le superficie applicabili sulle quadriche a centro rotonde delle varie specie. La parte analitica della trattazione, come è esposta nei §§ 253-259 delle *Lezioni*, resta naturalmente inalterata; solo converrà riprendere la discussione delle formole finali al § 259 dal punto più generale di vista attuale. Intanto, nell'ipotesi che l'una e quindi anche l'altra falda dell'inviluppo, in ogni deformazione della superficie S_0 luogo dei centri delle sfere, conservi la curvatura costante K, dovrà la S_0 essere applicabile sopra una superficie di rotazione ed il suo elemento lineare ds_0 avrà la forma (vol. II, pag. 107) [1]:

$$ds_0^2 = \frac{d\sigma^2}{c \operatorname{sen}^4 \sigma \left(1 + \frac{c}{K} \operatorname{sen}^2 \sigma\right)} + \cot^2 \sigma \, dv^2, \tag{5}$$

dove σ, v sono i parametri dei paralleli e dei meridiani rispettivamente nella configurazione rotonda di S_0, e c indica una costante arbitraria. Il raggio T della sfera, invariabile lungo ogni singolo parallelo, è dato poi dalla formola

$$T = \sqrt{\frac{1}{K} + \frac{1}{c \operatorname{sen}^2 \sigma}}. \tag{6}$$

Ora, per ipotesi, la S_0 deve essere reale ed il suo ds_0^2 ridursi quindi alla forma reale di superficie di rotazione:

$$ds_0^2 = du^2 + r^2 \, dv_1^2.$$

Paragonando colla (5), si ha

$$r = k \cot \sigma,$$

indicando k una costante, indi

$$du^2 = \frac{k^2 + r^2}{k^2 c \left(\frac{k^2 c}{K} + k^2 + r^2\right)} dr^2;$$

dunque l'espressione

$$\frac{k^2 + r^2}{k^2 c \left(\frac{k^2 c}{K} + k^2 + r^2\right)}$$

[1] Per abbreviare adopererò nel seguito citazioni come questa riferendomi al volume ed alla pagina relativa delle *Lezioni*.

deve assumere valori reali variando r in un certo intervallo reale, per la qual cosa è evidentemente necessario che le tre costanti K, c, k^2 siano tutte reali. Ne segue che nella (5) il parametro σ dovrà assumere tali valori che $\cot^2\sigma$ sia reale, positiva o negativa, e corrispondentemente il parametro v sarà reale ovvero puramente immaginario. La formola (6) dimostra poi che in ogni caso il *quadrato* T^2 del raggio della sfera sarà reale; e per ciò T stesso sarà, secondo i casi, reale o puramente immaginario.

Siccome poi nella (5) possiamo aumentare σ di un multiplo di π senza alterarla, così la condizione che $\cot^2\sigma$, o $\operatorname{sen}^2\sigma$, sia reale dà luogo soltanto alle tre possibilità seguenti: 1ª σ reale; 2ª σ puramente immaginario; 3ª $\sigma - \frac{\pi}{2}$ puramente immaginario. Il primo caso è quello già completamente discusso nelle *Lezioni* e noi qui lo trascureremo per occuparci degli altri due che diremo:

Caso α): $\sigma = i\tau$ (τ reale).

Caso β): $\sigma = \frac{\pi}{2} + i\tau$ (τ reale).

§ 3.

Proprietà comuni ai tre casi.

Prima di intraprendere la indicata discussione è opportuno che ricordiamo, dai §§ 265, 266 delle *Lezioni*, alcune proprietà fondamentali che valgono in tutti tre i casi. Indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto M_0 mobile sulla superficie S_0, con X_0, Y_0, Z_0 i coseni di direzione della sua normale; siano poi $M \equiv (x, y, z)$, $M_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ i due punti, simmetrici rispetto al piano tangente di S_0, ove la sfera col centro in M_0 e di raggio $= T$ tocca le due falde dell'inviluppo, le quali indicheremo rispettivamente con S, S_3. Le coordinate di M saranno date da

$$x = x_0 - T\nabla(T, x_0) + T\sqrt{1 - \Delta_1 T}\,.\,X_0 \quad (7)$$

([1]).

colle formole analoghe per y, z, dove i parametri differenziali $\nabla(T, x_0)$, $\Delta_1 T$ si intendono calcolati rispetto all'elemento lineare di S_0, e pel radicale $\sqrt{1 - \Delta_1 T}$ è scelto uno dei suoi valori; cangiando nelle (7) il segno del radicale si hanno le coordinate x_3, y_3, z_3 di M_3. Siccome poi, nel caso nostro, T è reale o puramente immaginario, segue dalle (7) la proprietà già evidente per sè: *Le due falde* S, S_3 *dell'inviluppo sono reali ovvero coniugate immaginarie.*

Ora sappiamo, dagli indicati §§ 265, 266 delle *Lezioni*, che le due superficie S, S_3 di curvatura costante K sono contigue, per trasformazione di Bäcklund, a due altre superficie S_1, S_2 colla medesima curvatura. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 sono fra loro nella relazione del teorema di permutabilità (vol. II, pag. 411), ed il

[1] Queste sono una facile trasformazione delle formole (b) a pag. 88, vol. II delle *Lezioni*.

quadrilatero sghembo $M M_1 M_2 M_3$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3 è una losanga coi quattro lati della medesima lunghezza costante

$$d = \sqrt{\frac{1}{c}}.$$

Le coordinate x_1, y_1, z_1 di M_1 e quelle x_2, y_2, z_2 di M_2 sono date dalle formole:

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{T}{\cos\sigma} X_1 + \operatorname{tg}\sigma \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}} \cdot X_2 \\ x_2 &= x_0 + \frac{T}{\cos\sigma} X_1 - \operatorname{tg}\sigma \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}} \cdot X_2 , \end{aligned} \right.$$

e dalle analoghe, indicando rispettivamente X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 i coseni di direzione (reali) delle tangenti alle deformate dei meridiani e dei paralleli sopra S_0. E come le normali a S, S_3 in due punti corrispondenti M, M_3 si incontrano nel punto corrispondente M_0 di S_0, così le normali a S_1, S_2 in punti corrispondenti M_1, M_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$ le cui coordinate $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$ si trovano date dalla:

$$(9)\qquad \overline{x}_0 = x_0 + \frac{\cos\sigma}{c T \operatorname{sen}^2\sigma} X_1$$

colle analoghe per $\overline{y}_0, \overline{z}_0$ [1]. Il luogo di questo punto $\overline{M}_0$ è precisamente la superficie complementare $\overline{S}_0$ della S_0, come risulta anche dalle (9) stesse, e le sfere descritte col centro in $\overline{M}_0$ e con raggio $\overline{T}$ dato dalla formola:

$$(10)\qquad \overline{T} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{c}\right)}}{T}$$

toccano in M_1, M_2 rispettivamente le due superficie S_1, S_2, le quali formano dunque l'inviluppo del secondo sistema di sfere.

Ricordiamo poi esplicitamente l'importante proprietà: *Sulle quattro superficie a curvatura costante* S, S_1, S_2, S_3 *i sistemi coniugati si corrispondono fra loro e a quelli delle superficie* $S_0, \overline{S}_0$.

In particolare alle linee assintotiche di S, S_1, S_2, S_3 corrispondono le assintotiche di $S_0, \overline{S}_0$. E siccome dalla forma (5) dell'elemento lineare di S_0, indicandone con K_0 la curvatura, risulta

$$(11)\qquad K_0 = \frac{c^2}{K} \operatorname{sen}^4\sigma,$$

[1] Queste formole si stabiliscono subito tenendo presente che i coseni di direzione delle normali a S_1, S_2 sono rispettivamente proporzionali ai binomî

$$T \operatorname{sen}\sigma X_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, X_1 , \quad T \operatorname{sen}\sigma Y_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, Y_1 , \quad T \operatorname{sen}\sigma Z_2 \mp \sqrt{-\frac{1}{K} - \frac{1}{c}}\, Z_1 .$$

mentre $c^2 \operatorname{sen}^4 \sigma$ è reale positiva, ne segue che le linee assintotiche di S_0, $\bar{S}_0$ sono reali od immaginarie secondo che la curvatura K è negativa o positiva ([1]). Di un'altra proprietà molto importante diamo per ora soltanto l'enunciato, riserbandone a più tardi la dimostrazione (vedi § 8):

Il sistema coniugato di S_0 (*o di* $\bar{S}_0$) *che corrisponde alle linee di curvatura delle quattro superficie* (S, S_1, S_2, S_3) *è precisamente quello che si conserva coniugato quando la superficie* S_0 *si applica sulla corrispondente quadrica* Q.

§ 4.

Caso α) *con* K *negativa*

(*Regione reale dell'iperboloide ad una falda*).

Volgiamoci ora all'esame dei singoli casi possibili, cominciando dal caso indicato con α) alla fine del § 2, ove σ è puramente immaginario $= i\tau$, indi:

$$\operatorname{sen} \sigma = i \operatorname{senh} \tau \quad , \quad \cos \sigma = \cosh \tau .$$

Allora nella (5) deve anche v essere puramente immaginario e noi lo cangiamo in ikv, essendo la costante k ed il nuovo parametro v reali; così la (5) diventa:

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \operatorname{senh}^4 \tau \left(\frac{c}{K} \operatorname{senh}^2 \tau - 1\right)} + k^2 \coth^2 \tau \, dv^2 , \tag{12}$$

e la (6) dà l'altra

$$T = \sqrt{\frac{\frac{c}{K} \operatorname{senh}^2 \tau - 1}{c \operatorname{senh}^2 \tau}} . \tag{13}$$

Sotto il segno radicale abbiamo qui una quantità che ha il segno stesso del coefficiente di $d\tau^2$ nella (12) ed è per ciò positiva; dunque nel caso attuale le quantità

$$T \quad \text{e} \quad \frac{T}{\cos \sigma}$$

sono reali. Ora dobbiamo scindere la discussione in due, secondo che la curvatura K è negativa o positiva. Trattando in questo paragrafo il primo caso, poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2} ,$$

con b reale (positiva). Manifestamente perchè il ds_0, dato dalla (12), risulti reale, occorre che c sia negativa, e noi poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2} ,$$

([1]) Quando S, S_1, S_2, S_3 sono reali la proprietà osservata è già per sè evidente.

onde risulta

$$(14)\qquad ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\operatorname{senh}^4\tau\,(a^2 - b^2 \operatorname{senh}^2\tau)} + k^2 \coth^2\tau\, dv^2 .$$

Se diamo alla costante arbitraria k il valore

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

e poniamo

$$(15)\qquad r = k \coth\tau = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \coth\tau ,$$

la (14) diventa

$$(14^*)\qquad ds_0^2 = \frac{(a^2+b^2)\, r^2 - a^4}{a^2(r^2-a^2)}\, dr^2 + r^2\, dv^2 .$$

Questo elemento lineare, secondo la (1) § 1, appartiene all'*iperboloide ad una falda* coll'iperbola meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 .$$

E poichè, per la (14), deve essere $\operatorname{senh}^2\tau < \frac{a^2}{b^2}$, indi $\coth^2\tau > \frac{a^2+b^2}{a^2}$, segue dalla (15): $r^2 > a^2$. Dunque la superficie S_0 è nel caso attuale applicabile sulla regione reale dell'iperboloide (entro ai limiti). Osserviamo poi che la formola (13) per T ci dà

$$T = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{r^2-a^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\, z ;$$

il valore del secondo membro ha un significato geometrico semplicissimo, eguagliando, come subito si vede, il tratto di generatrice dell'iperboloide dal punto M_0 che si considera fino al circolo di gola.

Si avverta ora che, sebbene il sistema ∞^2 o congruenza di sfere sia in questo caso reale, pure le due falde S, S_3 dell'inviluppo sono immaginarie (coniugate) perchè dalla formola $\Delta_1 T = \cos^2\sigma = \cosh^2\tau$ risulta $\Delta_1 T > 1$, onde il terzo termine nel secondo membro delle (7) § 3 è puramente immaginario. In fine la superficie $\overline{S}_0$ complementare di S_0 è applicabile entro ai limiti sopra S_0, cioè sull'iperboloide, e le due falde dell'inviluppo di sfere descritte colla medesima legge, attorno ai punti di $\overline{S}_0$ come centri, cioè col raggio $\overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}$, sono le altre due superficie pseudosferiche S_1, S_2 immaginarie (coniugate) che completano con S, S_3 la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) del teorema di permutabilità associata alla S_0 (o alla $\overline{S}_0$). Riassumiamo per questo primo caso i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Se*

attorno ad ogni punto di un iperboloide rotondo ad una falda come centro e con raggio eguale al tratto di generatrice che intercede fra il detto punto ed il circolo di gola, si descrive una sfera, indi si deforma comunque per flessione l'iperboloide che seco trascini le sfere, l'inviluppo di questo sistema ∞^2 *di sfere, in ogni configurazione* S_0 *dell'iperboloide, consta di due superficie immaginarie coniugate* S, S_3 *colla curvatura costante negativa* $K = -\frac{1}{b^2}$, *essendo* b *la lunghezza del semiasse immaginario dell'iperboloide. Queste due superficie pseudosferiche sono completate ad una quaderna* (S, S_1, S_2, S_3) *del teorema di permutabilità da altre due superficie pseudosferiche* S_1, S_2, *colla medesima curvatura, ottenute nel medesimo modo dalla superficie complementare* $\bar{S}_0$ *di* S_0. In fine si osserverà che la lunghezza d dei lati della losanga del teorema di permutabilità ha qui il valore

$$d = \sqrt{\frac{1}{c}} = ia,$$

essendo a il raggio del circolo di gola dell'iperboloide.

§ 5.

Caso α) *con* K *positiva.*

(*Regione ideale dell'ellissoide schiacciato*).

Supponiamo ora sempre $\sigma = i\tau$, però K positiva, poniamo

$$K = \frac{1}{b^2},$$

e la formola (12) diverrà

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \operatorname{senh}^4\tau (cb^2 \operatorname{senh}^2\tau - 1)} + k^2 \coth^2\tau\, dv^2, \tag{16}$$

Qui conviene suddistinguere secondo che la quantità

$$-\frac{1}{K} - \frac{1}{c} = -b^2 - \frac{1}{c},$$

che figura sotto il segno radicale nelle (8) § 3 è positiva, negativa o nulla.

Cominciando dal primo caso con $\frac{1}{c} < -b^2$, poniamo

$$c = -\frac{1}{a^2} \quad , \quad \text{con } a^2 > b^2,$$

ed avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\operatorname{senh}^4\tau\, (a^2 + b^2 \operatorname{senh}^2\tau)} + k^2 \coth^2\tau\, dv^2.$$

Se poniamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \coth \tau ,$$

questo elemento lineare rientra nella formola (1) § 1, ove si faccia

$$A = a^2 \quad , \quad B = b^2 ,$$

ed appartiene quindi all'ellissoide schiacciato rotondo di ellisse meridiana

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (a^2 > b^2).$$

Però, siccome $r^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2} \coth^2 \tau > \frac{a^4}{a^2 - b^2} > a^2$, la superficie S_0 è applicabile soltanto sulla regione ideale dell'ellissoide; la complementare $\overline{S}_0$ sarà invece applicabile sulla regione reale dell'ellissoide stesso (§ 1). Si osservi poi che nel caso attuale il raggio T delle sfere del primo sistema, coi centri nei punti di S_0, è reale; al contrario quello $\overline{T}$ del sistema complementare è puramente immaginario. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 di curvatura costante $K = \frac{1}{b^2}$ sono due a due coniugate immaginarie (S con S_3 , S_1 con S_2) e la lunghezza dei lati d della losanga ha il valore

$$d = ia.$$

Restano da considerare i due casi $\frac{1}{c} > -b^2$, $\frac{1}{c} = -b^2$; ma vediamo subito che essi conducono a risultati già noti e dei quali non occorre più occuparsi. E infatti se $\frac{1}{c} > -b^2$, tutte le quantità che figurano nelle formole (8) § 3 sono reali, e reali sono quindi le due falde S_1, S_2 del secondo inviluppo di sfere coi centri nei punti di $\overline{S}_0$ e col raggio $\overline{T}$ reale. Rispetto alla superficie $\overline{S}_0$ siamo dunque nel caso affatto reale discusso nelle *Lezioni*, onde $\overline{S}_0$ è applicabile sull'ellissoide allungato o sull'iperboloide a due falde. Precisamente avviene la prima cosa o la seconda secondo che la costante c è negativa o positiva [1]. In fine nel caso limite $\frac{1}{c} = -b^2$ le due superficie S_1, S_2 vengono a coincidere fra loro e colla $\overline{S}_0$, la quale è adunque una superficie a curvatura costante positiva.

[1] Si constata subito quest'asserzione ponendo nella (3) § 1, che dà l'elemento lineare della complementare:

$$k = 1 \ , \ \varrho = \coth \tau \ , \ A = -\frac{1}{c} \ , \ B = b^2 ,$$

perchè allora la (3) si converte appunto nell'attuale (16).

§ 6.

Caso β): $\sigma = \frac{\pi}{2} + i\tau$

(*Regione reale dell'ellissoide schiacciato. Regione ideale dell'iperboloide. Ellissoide immaginario*).

Qui abbiamo

$$\operatorname{sen}\sigma = \cosh\tau \quad , \quad \cos\sigma = -i\operatorname{senh}\tau ,$$

indi

$$(17) \qquad ds_0^2 = -\frac{d\tau^2}{c\cosh^4\tau\left(1 + \frac{c}{K}\cosh^2\tau\right)} + k^2\operatorname{tgh}^2\tau\, dv^2$$

$$(18) \qquad T = \sqrt{\frac{1 + \frac{c}{K}\cosh^2\tau}{c\cosh^2\tau}} .$$

Il raggio T della sfera è puramente immaginario, per ciò $\frac{T}{\cos\sigma} = i\frac{T}{\operatorname{senh}\tau}$ reale.

Per non ricadere nel caso già trattato nelle *Lezioni* di S_1, S_2 reali, dovremo dunque supporre

$$(19) \qquad \frac{1}{K} + \frac{1}{c} < 0 ;$$

altrimenti nei secondi membri delle (8) § 3 figurerebbero quantità tutte reali.

Ciò premesso, distinguiamo anche qui due casi, secondo che K è positiva o negativa.

Caso β_1): K positiva. Poniamo ancora

$$K = \frac{1}{b^2}$$

e dalla diseguaglianza (19) (ovvero anche da ciò che il coefficiente di $d\tau^2$ nella (17) deve essere positivo) risulta che la costante c dovrà avere un valore negativo, diciamo

$$c = -\frac{1}{a^2} ,$$

e sarà per la (19)

$$(19^*) \qquad a^2 > b^2 .$$

La (17) diventa

$$(20) \qquad ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(a^2 - b^2\cosh^2\tau)} + k^2\operatorname{tgh}^2\tau\, dv^2 ,$$

e se prendiamo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{tgh} \tau , \tag{21}$$

avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 - b^2) r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} dr^2 + r^2 dv^2 ,$$

formola che coincide colla (1) § 1, ove si ponga $A = a^2$, $B = b^2$. La S_0 è dunque applicabile sull'ellissoide schiacciato ($a^2 > b^2$); ma questa volta siccome, a causa della (20), il parametro τ deve assumere soltanto valori pei quali

$$\cosh^2 \tau = < \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \operatorname{tgh}^2 \tau < \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

risulta dalla (21) $r^2 < a^2$, e l'applicabilità della S_0 sull'ellissoide ha luogo entro ai limiti. Manifestamente il caso attuale non differisce da quello già trovato al paragrafo precedente; solo sono scambiate fra loro S_0, $\overline{S}_0$.

Caso β_2): K negativa. Poniamo

$$K = -\frac{1}{b^2}$$

e le (17), (18) diventano:

$$ds_0^2 = \frac{d\tau^2}{c \cosh^2 \tau (c b^2 \cosh^2 \tau - 1)} + k^2 \operatorname{tgh}^2 \tau \, dv^2 \tag{22}$$

$$T = \sqrt{- \frac{c b^2 \cosh^2 \tau - 1}{c \cosh^2 \tau}} . \tag{23}$$

Per la diseguaglianza (19) dobbiamo poi avere $\frac{1}{c} < b^2$, e siamo ancora condotti a suddistinguere secondo che c è negativa, ovvero positiva.

Caso β_2'): Sia c negativa, poniamo $c = -\frac{1}{a^2}$; la (22) diventa

$$ds_0^2 = \frac{a^4 \, d\tau^2}{\cosh^4 \tau (a^2 + b^2 \cosh^2 \tau)} + k^2 \operatorname{tgh}^2 \tau \, dv^2 ,$$

e, ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{tgh} \tau ,$$

combina coll'elemento lineare

$$ds_0^2 = \frac{a^4 - (a^2 + b^2) r^2}{a^2 (a^2 - r^2)} dr^2 + r^2 dv^2$$

dell'iperboloide ad una falda. Però, siccome qui

$$r^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2} \operatorname{tgh}^2 \tau < \frac{a^4}{a^2 + b^2} < a^2 ,$$

l'applicabilità di S_0 sull'iperboloide ha luogo fuori dei limiti e lo stesso avviene per la complementare $\bar{S}_0$ (cf. § 1). Come nel caso del § 4 ove $S_0, \bar{S}_0$ erano applicabili sulla regione reale dell'iperboloide, si ha ancor qui per il lato d della losanga $d = ia$; ma mentre allora il raggio T della sfera era reale, attualmente è puramente immaginario secondo la formola

$$T = i\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2}.$$

Caso β_2''): Supponiamo ora c positiva e poniamo $c = \frac{1}{a^2}$, dove per la diseguaglianza (19) sarà

$$a^2 < b^2.$$

Dalla (22) avremo

$$ds_0^2 = \frac{a^4\, d\tau^2}{\cosh^4\tau\,(b^2\cosh^2\tau - a^2)} + k^2\,\mathrm{tgh}^2\,\tau\, dv^2,$$

che, ponendo

$$k = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad , \quad r = \frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\,\mathrm{tgh}\,\tau,$$

si converte nella

$$ds_0^2 = \frac{a^4-(b^2-a^2)r^2}{a^2(a^2+r^2)}\,dr^2 + r^2\,dv^2.$$

Il ds_0^2 ora scritto appartiene precisamente a quella classe di superficie applicabili sull'ellissoide immaginario coll'ellisse meridiana

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 < b^2),$$

che è la penultima del § 1 (caso e_2'). Il valore T del raggio della sfera è dato, secondo la (18), da

$$T = i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sqrt{a^2+r^2}$$

ed il lato d della losanga del teorema di permutabilità ha la lunghezza reale $d = a$.

§ 7.

Riepilogo dei risultati.

Terminata la nostra discussione, ci conviene, per maggior chiarezza delle ricerche seguenti, riepilogare i risultati ottenuti e specialmente quelli concernenti le quadriche di seconda specie, poichè sono queste che attualmente ci interessano.

Riunendo i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi con quelli già stabiliti nelle *Lezioni*, vediamo che nella risoluzione del problema fondamentale relativo alla deformazione degli inviluppi di sfere, come configurazioni possibili della superficie S_0

luogo dei centri, si presentano tutte le quadriche rotonde di prima e di seconda specie. Quelle di prima specie insieme alle due forme di seconda specie, applicabili sull'ellissoide immaginario, rappresentate dal sinusoide iperbolico e dal catenoide accorciato, figurano già nelle *Lezioni*; le rimanenti di seconda specie abbiamo successivamente incontrate nei paragrafi precedenti. Possiamo quindi concludere che ad ogni quadrica a centro rotonda Q può associarsi un sistema ∞^2 di sfere, reali od immaginarie, coi centri distribuiti sopra Q e tali che dando per flessione alla quadrica Q una configurazione qualunque S_0, le due falde S, S_3 dell'inviluppo di sfere sono due superficie colla medesima curvatura costante. Un secondo sistema di sfere, avente i centri distribuiti sulla complementare $\overline{S}_0$ di S_0, ha alla sua volta le due falde dell'inviluppo S_1, S_2 colla medesima curvatura di S, S_3. Le quattro superficie S, S_1, S_2, S_3 formano una quaderna del teorema di permutabilità, relativa a due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ con costanti eguali e di segno contrario; diciamo per abbreviare (S, S_1, S_2, S_3) la *quaderna associata* alla superficie S_0 (ed alla sua complementare $\overline{S}_0$).

Per quanto poi riguarda il caso che ora più ci interessa delle quadriche Q di seconda specie è da osservarsi: 1°) che se la superficie S_0 è deformata del catenoide accorciato, tutte quattro le superficie (S, S_1, S_2, S_3) della quaderna associata sono reali; 2°) se S_0 è deformata del sinusoide iperbolico, S, S_3 sono reali, S_1, S_2 coniugate immaginarie; 3°) in tutti gli altri casi di una quadrica Q di seconda specie le due superficie estreme S, S_3, come le due medie S_1, S_2 della quaderna, sono coniugate immaginarie. E poichè adunque il problema della deformazione delle quadriche di seconda specie risulta essenzialmente collegato allo studio delle dette quaderne associate di superficie a curvatura costante, costituite di coppie di superficie coniugate immaginarie, noi dovremo esaminare le proprietà caratteristiche di siffatte superficie, le quali formano evidentemente classi *particolari* entro la totalità delle superficie a curvatura costante reali ed immaginarie di curvatura costante [1]. Separando poi il reale dall'immaginario, noi dovremo presentare ogni volta i risultati relativi al nostro problema reale sotto forma definitiva reale. Prima di accingerci all'accennata ricerca converrà esaminare alcune proprietà valevoli in tutti i casi ed indipendenti dall'essere immaginarie piuttosto che reali le superficie di cui si tratta. E in primo luogo converrà approfondire maggiormente le formole relative alla composizione di due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$, a costanti eguali ed opposte, di cui tratta il § 390 delle *Lezioni* (II, pag. 429); indi una proposizione complementare all'ordinario teorema di permutabilità ci condurrà finalmente a stabilire, al § 10, il principio fondamentale per la nostra teoria delle trasformazioni.

Qui intanto riassumiamo in una tabella i risultati relativi alle varie forme di quadriche di seconda specie, ove si deve tener presente che le lettere

$$K\,,\;T\,,\;\overline{T}\,,\;d$$

hanno il significato seguente:

[1] Per convincersene basta riflettere che le superficie di data curvatura costante immaginarie dipendono da *quattro* funzioni arbitrarie; quelle delle classi considerate nel testo da *due* funzioni arbitrarie soltanto, come le deformate della quadrica Q a cui sono relative.

K curvatura comune (costante) delle superficie S, S_1, S_2, S_3 costituenti la quaderna associata a S_0;

$T, \overline{T}$ i raggi delle sfere coi rispettivi centri in punti corrispondenti della superficie S_0 e della sua complementare $\overline{S}_0$;

d lunghezza (costante) del lato della losanga coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3.

TABELLA.

(A_1)

Regione reale dell'iperboloide ad una falda: $\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{r^2-a^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili sulla regione reale dell'iperboloide

(A_2)

Regione ideale del medesimo iperboloide

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = i\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{T}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili sulla regione ideale

(B)

Ellissoide immaginario: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 < b^2)$

$$K = -\frac{1}{b^2}, \quad T = i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\sqrt{a^2+r^2}, \quad \overline{T} = \frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{T}, \quad d = a$$

$S_0, \overline{S}_0$ applicabili l'una sull'altra entro ai limiti

(C)

Ellissoide (reale) schiacciato: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 > b^2)$

$$K = +\frac{1}{b^2}, \quad T = \frac{i\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sqrt{a^2-r^2},$$

$$\overline{T} = \frac{ib\sqrt{a^2-b^2}}{T} = \frac{ab}{\sqrt{a^2-r^2}}, \quad d = a\sqrt{-1}$$

S_0 applicabile sulla regione reale } dell'ellissoide
$\overline{S}_0$ applicabile sulla regione ideale }

In fine, per completare questa tabella relativa alle quadriche di seconda specie, converrà intendervi aggiunti i due tipi (appartenenti al caso dell'ellissoide immaginario) rappresentati dal catenoide accorciato e dal sinusoide iperbolico. Essi ci forniranno, ai §§ 11 e 12, il primo e più semplice esempio per la dimostrazione dei teoremi fondamentali A) e B) della prefazione.

§ 8.

Formole relative alla composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund.

Sia S una superficie di curvatura costante $K = -\frac{1}{R^2}$, che riferita alle sue linee di curvatura u, v abbia l'elemento lineare

$$ds^2 = R^2(\cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2)$$

ed i raggi principali di curvatura

$$r_1 = -R \operatorname{tg}\theta \quad , \quad r_2 = R \cot\theta;$$

riteniamo poi tutte le altre notazioni del § 373 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 390). Siano ora S_1, S_2 due nuove superficie, colla medesima curvatura $K = -\frac{1}{R^2}$, derivate da S con due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ a costanti eguali e di segno contrario, e siano

$$ds_1^2 = R^2(\cos^2\theta_1\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, dv^2) \quad , \quad ds_2^2 = R^2(\cos^2\theta_2\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2\, dv^2)$$

i loro rispettivi elementi lineari. La quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità, dopo S, S_1, S_2 avrà l'elemento lineare

$$ds_3^2 = R^2(\cos^2\theta_3\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3\, dv^2),$$

dove θ_3 è determinata dalla formola

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_3 - \theta}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{tg}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \tag{24}$$

La losanga $M M_1 M_2 M_3$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di S, S_1, S_2, S_3 ha il lato d di lunghezza costante dato da

$$d = R\cos\sigma.$$

Le normali in M, M_3 alle S, S_3 si incontrano in un punto M_0, similmente quelle a S_1, S_2 nei punti M_1, M_2 si incontrano in un punto $\overline{M}_0$ e questi due punti $M_0, \overline{M}_0$ descrivono due superficie complementari applicabili sopra una medesima superficie di rotazione. Se poniamo:

$$\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad , \quad \Phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \tag{25}$$

le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 sono date dalle formole

$$x_0 = x + R\operatorname{sen}\sigma\cot\Omega\, X_3 \quad \text{ecc. (vol. II, pag. 430).} \tag{25*}$$

Pel calcolo dell'elemento lineare di S_0 introduciamo le quantità A, B definite dalle formole

$$(26)\qquad \begin{cases} A = \cos\theta \operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \cos\Omega \\ B = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta \cos\Omega \end{cases}$$

ed il *differenziale esatto* dV dato da

$$(27)\qquad dV = A \operatorname{sen}\Phi\, du - B \cos\Phi\, dv,$$

mentre pel differenziale $d\Omega$ si ha

$$(27^*)\qquad \cos\sigma\, d\Omega = A \cos\Phi\, du + B \operatorname{sen}\Phi\, dv;$$

indicando con ds_0 l'elemento lineare di S_0, si ha allora

$$(28)\qquad ds_0^2 = R^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma \operatorname{sen}^2\Omega}{\operatorname{sen}^4\Omega}\, d\Omega^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2\Omega}\right].$$

A queste formole, riportate dal § 390 delle *Lezioni*, conviene ora che aggiungiamo quella relativa alla seconda forma quadratica fondamentale

$$F_0 = D_0\, du^2 + 2 D_0'\, du\, dv + D_0''\, dv^2$$

della superficie S_0. Per ciò bisogna tener conto dei valori dei coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S_0, dati da

$$(28^*)\qquad X_0 = \frac{\operatorname{sen}\sigma \cos\Phi\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\Phi\, X_2 + \cos\sigma \operatorname{sen}\Omega . X_3}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma \operatorname{sen}^2\Omega}}, \text{ ecc.}$$

ed allora calcolando $F_0 = -\Sigma\, dx_0\, dX_0$, col far uso delle formole fondamentali date a pag. 391 del vol. II e delle precedenti, si trova facilmente per la formola richiesta

$$(29)\qquad F_0 = \frac{RAB}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (dv^2 - du^2).$$

Appoggiandoci su queste formole, dimostriamo ora l'importante teorema, di cui alla fine del § 3 abbiamo dato l'enunciato. L'elemento lineare (28) appartiene alla quadrica Q di rotazione colla conica meridiana definita dalle formole

$$r = \frac{i R \cos\sigma}{\operatorname{sen}\Omega}\quad,\quad z = R \cot\Omega$$

e colla longitudine v_1 data da

$$v_1 = \frac{iV}{\cos\sigma}.$$

Se indichiamo con $\overline{F}$ la seconda forma quadratica fondamentale di questa quadrica, troviamo

$$\overline{F} = \frac{iR}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} [\cos^2\sigma\, d\Omega^2 + dV^2]$$

ossia per le (27), (27*)

$$\overline{F} = \frac{i R}{\cos\sigma \operatorname{sen}\Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (A^2 du^2 + B^2 dv^2).$$

Mancando qui il termine in $du\, dv$, come nella F_0, ne concludiamo appunto che vale il teorema enunciato al § 3: *Il sistema* (u, v) *che corrisponde sulla superficie* S_0 *alle linee di curvatura delle superficie a curvatura costante della quaderna associata* (S, S_1, S_2, S_3) *dà precisamente il sistema coniugato comune della* S_0 *e della quadrica* Q.

§ 9.

Trasformazioni di BÄCKLUND *per le quaderne* (S, S_1, S_2, S_3) *del teorema di permutabilità.*

Come ultima preparazione all'oggetto proprio della nostra ricerca ci occorre ancora un teorema relativo alle trasformazioni di BÄCKLUND, applicate alle quaderne *generali* di superficie a curvatura costante nella relazione del teorema di permutabilità, che si può enunciare brevemente così: *Ogni quaderna* (S, S_1, S_2, S_3) *di superficie a curvatura costante, nella relazione generale del teorema di permutabilità* (vol. II, pag. 411), *è cangiata da una qualunque trasformazione di* BÄCKLUND, *che cangi la prima superficie* S *in un'altra* S', *in una seconda quaderna* (S', S_1', S_2', S_3') *della medesima specie.*

Ho già dimostrato incidentalmente questa proposizione in altra mia Memoria [1] come corollario di una proprietà generale delle equazioni di MOUTARD dotate di gruppi di soluzioni quadratiche e qui, per non rimandare il lettore a quella più ampia teoria, credo utile ripetere la dimostrazione limitata al caso attuale.

Cominciamo dal dare alla nostra proposizione un'altra forma equivalente, ma più opportuna per la dimostrazione. Cangiamo la superficie S, mediante tre trasformazioni $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}, B_{\sigma_3}$ a costanti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ distinte, in tre altre S_1, S_2, S_3 e consideriamo le tre terne

$$(S, S_2, S_3) \quad , \quad (S, S_3, S_1) \quad , \quad (S, S_1, S_2)$$

ciascuna delle quali sarà completata, secondo il teorema di permutabilità, a quaderna da una superficie perfettamente determinata, e indichiamo queste tre nuove superficie rispettivamente con S', S'', S'''. La proposizione da dimostrarsi consiste in questo: *Le tre terne di superficie* (S_1, S'', S''') , (S_2, S''', S') , (S_3, S', S'') *sono alla loro volta completate a quaderne del teorema di permutabilità da una medesima quarta superficie* $\overline{S}$. Si ha così insomma un ciclo chiuso di 8 superficie colla medesima

(1) V. il § 9 della Memoria: *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*, nel tomo precedente della presente Raccolta (t. XIII, 1905).

curvatura costante, ciascuna delle quali è legata a tre contigue del ciclo da tre trasformazioni di Bäcklund colle costanti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in ordine conveniente [1].

Per dimostrare il teorema basterà provare che se si considera p. es. la quarta superficie del teorema di permutabilità dopo la terna (S_1, S'', S''') e si indica con $\overline{S}_1$, gli elementi relativi a questa $\overline{S}_1$ si compongono *simmetricamente* con quelli relativi a S_1, S_2, S_3. E basterà dimostrar questo prendendo per elementi i coseni di direzione della normale, poichè ne risulterà così che se $\overline{S}_2$ è la superficie completante la terna (S_2, S''', S') le due superficie $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ avranno la medesima rappresentazione sferica e quindi, essendo legate alla S''' da due trasformazioni di Bäcklund colla stessa costante σ_3, assolutamente coincideranno. Ora indichiamo con: (X, Y, Z) i coseni di direzione della normale alla S, con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) quelli delle S_1, S_2, S_3 rispettivamente, in fine con (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''), (X''', Y''', Z''') quelli di S', S'', S'''. Dalle formole al § 251 delle *Lezioni* segnate (59) (vol. II, pag. 81) deduciamo subito:

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} X'' &= X + \frac{\Sigma XX_3 - \Sigma XX_1}{1 - \Sigma X_1 X_3}(X_1 - X_3) \\ X''' &= X + \frac{\Sigma XX_2 - \Sigma XX_1}{1 - \Sigma X_1 X_2}(X_1 - X_2) \end{aligned}\right.$$

e quindi pei coseni di direzione $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ della normale alla $\overline{S}_1$:

$$\overline{X} = X_1 + \frac{\Sigma X_1 X''' - \Sigma X_1 X''}{1 - \Sigma X'' X'''}(X'' - X''') .$$

Ma si ha notoriamente

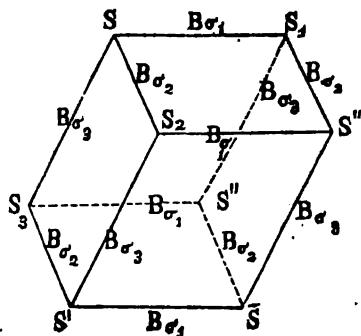
$$\Sigma X_1 X''' = \Sigma XX_2 \quad , \quad \Sigma X_1 X'' = \Sigma XX_3 ,$$

onde le precedenti si scrivono

$$(31)\qquad \overline{X} = X_1 + \frac{\Sigma XX_2 - \Sigma XX_3}{1 - \Sigma X'' X'''}(X'' - X''') .$$

Pongasi ora simmetricamente:

$$\begin{aligned} \Sigma XX_1 &= e_1 \quad , \quad \Sigma XX_2 = e_2 \quad , \quad \Sigma XX_3 = e_3 \\ \Sigma X_2 X_3 &= \varepsilon_1 \quad , \quad \Sigma X_3 X_1 = \varepsilon_2 \quad , \quad \Sigma X_1 X_2 = \varepsilon_3 , \end{aligned}$$

[1] Per seguire meglio le relazioni fra le 8 superficie del ciclo giova tener presente la seguente figura schematica

e le (30) si scriveranno

$$(30^*)\quad \begin{cases} X'' = X + \dfrac{e_3 - e_1}{1-\varepsilon_2}(X_1 - X_3) \\ X''' = X + \dfrac{e_2 - e_1}{1-\varepsilon_3}(X_1 - X_2). \end{cases}$$

Di qui, calcolando la quantità $1 - \Sigma X'' X'''$ che figura al denominatore delle (31), troviamo:

$$1 - \Sigma X'' X''' = \frac{(e_2 - e_1)^2(1-\varepsilon_2) + (e_3 - e_1)^2(1-\varepsilon_3) - (e_2 - e_1)(e_3 - e_1)(1+\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}.$$

Indicando con Ω la quantità al numeratore di questa formola e ordinando in altro modo i termini, vediamo che Ω ha la forma simmetrica:

$$\Omega = e_1^2(1-\varepsilon_1) + e_2^2(1-\varepsilon_2) + e_3^2(1-\varepsilon_3) - e_1 e_2(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3) - \\ - e_2 e_3(1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_1) - e_3 e_1(1-\varepsilon_3-\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

od anche

$$\Omega = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(1-\varepsilon_1) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)(1-\varepsilon_2) + \\ + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)(1-\varepsilon_3).$$

In fine sostituendo nella (31), troviamo la formola definitiva:

$$\overline{X} = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)(1-\varepsilon_1)X_1 + (e_2-e_3)(e_2-e_1)(1-\varepsilon_2)X_2 + (e_3-e_1)(e_3-e_2)(1-\varepsilon_3)X_3}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)(1-\varepsilon_1) + (e_2-e_3)(e_2-e_1)(1-\varepsilon_2) + (e_3-e_1)(e_3-e_2)(1-\varepsilon_3)},$$

che è perfettamente simmetrica nei tre sistemi di quantità

$$(X_1, Y_1, Z_1) \quad , \quad (X_2, Y_2, Z_2) \quad , \quad (X_3, Y_3, Z_3).$$

onde risulta la verità della proposizione enunciata.

§ 10.

Congruenze W con falde focali applicabili su quadriche rotonde.

Dopo tutti questi studî preliminari, arriviamo ora al punto fondamentale per la nostra ricerca: *alla dimostrazione dell'esistenza di congruenze W le cui due falde sono applicabili sopra una medesima quadrica rotonda.*

A questo scopo prendiamo una di quelle particolari quaderne (S, S_1, S_2, S_3), considerate al § 8, associate ad una deformata S_0 di una quadrica rotonda, e nelle quali le due trasformazioni di Bäcklund relative alla quaderna hanno costanti σ eguali e di segno contrario. A questa quaderna applichiamo, secondo la proposizione generale del paragrafo precedente, una trasformazione arbitraria B_τ di Bäcklund che la cangierà in una quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) della medesima specie. E come le normali ad S, S_3 in punti corrispondenti si incontrano nel punto M_0 che descrive la

superficie S_0 applicabile sulla quadrica rotonda d'elemento lineare dato dalla (28) § 8, così le normali alle superficie trasformate S', S'_3 in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M'_0 che descriverà una superficie S'_0 dello stesso elemento lineare.

Le due superficie S_0, S'_0, deformate della medesima quadrica Q, hanno nello spazio una posizione relativa perfettamente determinata e si trovano poste, pel loro modo di generazione geometrica, in corrispondenza di punto a punto, al punto M_0 di S_0 dove si incontrano le normali a S, S_3 corrispondendo quel punto M'_0 di S'_0 ove si incontrano le normali corrispondenti di S', S'_3 (¹). Ciò posto, noi dimostreremo la seguente proprietà fondamentale:

Le rette congiungenti le coppie (M_0, M'_0) *di punti corrispondenti delle due superficie* S_0, S'_0 *generano una congruenza* W, *di cui* S_0, S'_0 *sono le due falde focali.*

Siccome già, nella detta corrispondenza, alle assintotiche di S_0 corrispondono quelle di S'_0 perchè le une e le altre corrispondono a quelle delle 8 superficie a curvatura costante (S, S_1, S_2, S_3), (S', S'_1, S'_2, S'_3), basterà dimostrare che S_0, S'_0 sono le due falde focali della congruenza: che cioè il segmento $M_0 M'_0$ tocca in M_0 la S_0, in M'_0 la S'_0, anzi basterà verificare la prima cosa chè la seconda ne segue allora scambiando le due quaderne.

Per ciò, conservando tutte le notazioni del § 8, indichiamo con accenti le quantità relative alle quattro nuove superficie S', S'_1, S'_2, S'_3 dedotte rispettivamente da S, S_1, S_2, S_3 colla trasformazione B_τ di Bäcklund. La formola fondamentale del teorema di permutabilità [vol. II, pag. 416, formola (C)], ci dà, applicata al caso attuale, le quattro seguenti (²):

$$(32)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_1-\theta}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}\,, & \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_2-\theta}{2}=-\dfrac{\cos\dfrac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma+\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_2-\theta'}{2} \\ \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_2}{2}=\dfrac{\cos\dfrac{\sigma+\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma-\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_2}{2}\,, & \operatorname{tg}\dfrac{\theta'_3-\theta_1}{2}=-\dfrac{\cos\dfrac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma+\tau}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{\theta_3-\theta'_1}{2}\,. \end{cases}$$

Se calcoliamo delle due prime (32) il valore di

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\theta'_1-\theta}{2}-\frac{\theta'_2-\theta}{2}\right)$$

deduciamo, con semplici trasformazioni trigonometriche, la formola seguente impor-

(¹) È quasi superfluo avvertire che tale corrispondenza fra i punti di S_0, S'_0 è ben distinta dalla corrispondenza d'applicabilità.

(²) In questa applicazione della citata formola si tenga presente che S'_1 è la quarta superficie del teorema di permutabilità dopo S, S_1, S', e similmente S'_2 la quarta dopo S, S_2, S' e che le trasformazioni di Bäcklund nel passaggio dalla S alle S_1, S_2, S' sono rispettivamente una B_σ, una $B_{-\sigma}$ e una B_τ. Così si hanno le due prime (32), e similmente le altre due.

tante pel nostro scopo:

$$(33)\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}=\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)-\cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\sigma\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}-\cos\tau\cos\left(\theta'-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}.$$

Ma, secondo le (25*) § 8, abbiamo per le coordinate di M_0

$$x_0=x+R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}X_3,$$

analogamente per quelle di M_0'

$$x_0'=x'+R\operatorname{sen}\sigma\cot\frac{\theta_2'-\theta_2'}{2}X_3'.$$

Ora, poichè si passa dalla S alla S' con una B_τ, si hanno le formole (vol. II, pagg. 391, 392):

$$x'=x+R\cos\tau(\cos\theta' X_1+\operatorname{sen}\theta' X_2)$$
$$X_3'=\cos\tau\operatorname{sen}\theta' X_1-\cos\tau\cos\theta' X_2-\operatorname{sen}\tau X_3,$$

e le precedenti ci danno quindi:

$$(34)\qquad x_0'-x_0=R\cos\tau\left[\cos\theta'+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta'\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_1+$$
$$+R\cos\tau\left[\operatorname{sen}\theta'-\operatorname{sen}\sigma\cos\theta'\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_2-$$
$$-R\operatorname{sen}\sigma\left[\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\operatorname{sen}\tau\cot\frac{\theta_1'-\theta_2'}{2}\right]X_3.$$

D'altra parte pei coseni di direzione della normale alla S_0 si hanno le (28*) § 8

$$(34^*)\qquad X_0=\frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}X_1+\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}X_2+\cos\sigma\operatorname{sen}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}X_3}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma+\cos^2\sigma\operatorname{sen}^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}};$$

ed ora, se dalle (34), (34*) formiamo l'espressione $\Sigma X_0(x_0'-x_0)$, troviamo che si ha identicamente, a causa appunto della (33):

$$X_0(x_0'-x_0)+Y_0(y_0'-y_0)+Z_0(z_0'-z_0)=0.$$

Questa ci esprime precisamente che: *il segmento* M_0, M_0' *tocca in* M_0 *la* S_0, *c.d.d.*

A complemento della proposizione fondamentale dimostrata, osserviamo che le altre due superficie $\bar{S}_0, \bar{S}_0'$, luogo la prima del punto d'incontro delle normali alle S_1, S_2, la seconda delle normali a S_1', S_2' si trovano nelle medesime condizioni di S_0, S_0', delle quali sono rispettivamente complementari. Il quadrilatero sghembo $M_0\, M_0'\, \bar{M}_0'\, \bar{M}_0$ coi vertici in quattro punti corrispondenti di $S_0, S_0', \bar{S}_0', \bar{S}_0$ genera coi

suoi quattro lati quattro congruenze W, di cui quelle relative ai due lati opposti $M_0 \overline{M}_0$, $M'_0 \overline{M}'_0$ sono inoltre normali; sopra ogni lato i due vertici sono i fuochi della relativa congruenza e i piani condotti pel lato e per ciascuno dei consecutivi i due piani focali. Si ha qui un caso particolare notevole delle circostanze geometriche che si presentano in generale nella composizione delle trasformazioni di Moutard (vol. II, pag. 74).

Ritornando alla proposizione stabilita, e prescindendo dapprima dalla distinzione fra reale ed immaginario, osserviamo come ne segua già che qualunque superficie S_0, applicabile sopra una quadrica a centro rotonda, è falda focale di infinite congruenze W dipendenti da due costanti (complesse), la cui seconda falda focale è applicabile sulla quadrica stessa. E infatti una tale superficie S_0 individua la quaderna associata (S, S_1, S_2, S_3) di superficie a curvatura costante; se a questa quaderna applichiamo una trasformazione B_τ di Bäcklund, che dipende appunto da due costanti, la trasformiamo in una seconda quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) e la superficie S'_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S', S'_3 è applicabile sulla S_0 e con questa forma appunto le due falde focali di una congruenza W.

Dal punto di vista generale analitico abbiamo già dimostrato così il teorema A) della prefazione, prescindendo per altro dalle condizioni di realità. Ma noi, collocandoci dal punto di vista reale, vogliamo ora suddistinguere i varî casi per arrivare a stabilire in ciascuno di essi il teorema A) ed il teorema B) nel loro senso preciso reale.

§ 11.

Il teorema A) *per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico.*

Le nostre ricerche nel campo reale comincieranno da quelle due classi di superficie applicabili sull'ellissoide immaginario, che sono rappresentate dalle forme tipiche del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico (cf. § 1 e § 7 in fine); per queste due classi bastano alcune poche osservazioni complementari allo scopo nostro finale di dimostrare i teoremi A) B) della prefazione; e questi sviluppi ci serviranno poi di punto di partenza per le ricerche successive.

Sia dapprima S_0 una deformata del catenoide accorciato e sia (S, S_1, S_2, S_3) la quaderna associata di superficie pseudosferiche, che saranno tutte quattro reali e legate fra loro da due trasformazioni di Bäcklund reali ed opposte $B_\sigma, B_{-\sigma}$. Trasformiamo la S mediante una qualunque trasformazione reale B_τ di Bäcklund in un'altra superficie pseudosferica reale S'; pel teorema al § 9 questa B_τ trasformerà la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) in un'altra (S', S'_1, S'_2, S'_3) della medesima specie, che sarà manifestamente costituita anch'essa di quattro superficie reali. Sarà quindi pure reale la superficie S'_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S', S'_3; inoltre la S'_0 sarà applicabile sopra S_0 e costituirà con questa le due falde focali di una congruenza W. Poichè ora nella B_τ entra, insieme alla costante τ, una seconda costante, che dà in un punto M iniziale di S la direzione del raggio MM' della congruenza

pseudosferica relativa, così vediamo che ogni *data* superficie S_0 apparterrà, come prima falda focale, ad ∞^2 congruenze W della specie descritta. Questo è appunto il teorema A) per le superficie applicabili sul catenoide accorciato.

E qui non lascieremo d'osservare che il teorema stesso A) vale anche per il *catenoide ordinario*, come risulta da note proprietà osservate da DARBOUX e relative alle falde dell'evoluta di due superficie pseudosferiche trasformate di BÄCKLUND l'una dell'altra (vol. II, pag. 400). Anticipando su quanto dimostreremo prossimamente per l'iperboloide ad una falda, possiamo aggiungere che le medesime proprietà valgono ancora per il *catenoide allungato*, che è una deformata di rotazione dell'iperboloide stesso.

Passando ora al caso che la S_0 sia deformata di un sinusoide iperbolico, avremo che nella quaderna associata (S, S_1, S_2, S_3) le superficie pseudosferiche estreme S, S_3 saranno reali, le medie S_1, S_2 coniugate immaginarie e la costante σ delle due relative trasformazioni di BÄCKLUND $B_\sigma, B_{-\sigma}$ sarà puramente immaginaria (vol. II, § 398, pag. 448). Ora mediante una trasformazione B_τ a costante reale τ trasformiamo, come sopra, la S in un'altra superficie reale S'; la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) verrà cangiata dalla B_τ in una nuova (S', S_1', S_2', S_3') nella quale, la S' essendo reale, sarà pure reale la S_3' e le S_1', S_2' di nuovo coniugate immaginarie. E in fatti ricorriamo alle formole (32) del § 10 e cangiamo nella prima di esse i in $-i$, osservando che si ha per ipotesi

$$\bar\theta = \theta\ ,\ \bar\theta_1 = \theta_2\ ,\ \bar\theta_2 = \theta_1\ ,\ \bar\theta_3 = \theta_3\ ;\ \bar\theta' = \theta'\ ;\ \bar\sigma = -\sigma\ ,\ \bar\tau = \tau\ ;$$

ne deduciamo

$$\operatorname{tg}\frac{\bar\theta_1' - \theta}{2} = -\frac{\cos\dfrac{\sigma-\tau}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\sigma+\tau}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta_2 - \theta'}{2},$$

che confrontata colla seconda delle (32) stesse ci dà $\bar\theta_1' = \theta_2'$. Similmente operando sulle due seconde (32), vediamo che $\bar\theta_3' = \theta_3'$. Ciò posto, le normali ad S', S_3' in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M_0', il cui luogo S_0' sarà una superficie applicabile sul sinusoide iperbolico, che insieme con S_0 costituirà le due falde di una congruenza W. Concludiamo: *Per le superficie applicabili sul catenoide accorciato, come per quelle applicabili sul sinusoide iperbolico, vale il teorema* A) *della prefazione.*

§ 12.

Il teorema B) *di permutabilità per le deformate del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico.*

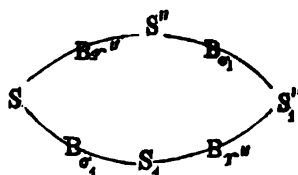
Passiamo ora al secondo teorema fondamentale della nostra teoria, al teorema B) di permutabilità. Come il teorema A) che stabilisce l'esistenza delle nostre trasformazioni dipendeva dalle trasformazioni di BÄCKLUND per le quaderne (S, S_1, S_2, S_3) di superficie a curvatura costante del teorema di permutabilità, così il teorema B)

di permutabilità dipende alla sua volta da un analogo teorema per le trasformazioni delle quaderne (S, S_1, S_2, S_3). E sebbene pel nostro scopo basti considerare le quaderne speciali (S, S_1, S_2, S_3) in cui le trasformazioni componenti di Bäcklund $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ hanno costanti eguali e di segno contrario, sarà opportuno dimostrare il teorema stesso in tutta la sua generalità come risulta dall'enunciato seguente:

Si consideri una quaderna (S, S_1, S_2, S_3) *di superficie a curvatura costante nella relazione generale del teorema di permutabilità* (vol. II, pag. 411) *e mediante due trasformazioni* $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ *a costanti* τ', τ'' *differenti si trasformi, secondo il* § 9, *in altre due quaderne* (S', S_1', S_2', S_3'), $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ *della medesima specie: esisterà una quarta quaderna* $(S''', S_1''', S_2''', S_3''')$ *perfettamente determinata, legata alle due medesime* (S', S_1', S_2', S_3'), $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ *rispettivamente da due trasformazioni* $B_{\tau''}, B_{\tau'}$ *colle costanti* τ'', τ' *invertite* (1).

Per dimostrare questo teorema applichiamo l'ordinario teorema di permutabilità e indichiamo rispettivamente con $S''', S_1''', S_2''', S_3'''$ le quattro superficie che completano a quaderne del teorema di permutabilità le quattro terne

$$(S, S', S''), \quad (S_1, S_1', S_1''), \quad (S_2, S_2', S_2''), \quad (S_3, S_3', S_3'').$$

Siano $B\sigma_1, B\sigma_2$ le trasformazioni che cangiano S rispettivamente in S_1, S_2. Pel teorema al § 9 le quattro superficie S, S_1, S'', S_1'' formano una quaderna del teorema di permutabilità relativa alle due trasformazioni di Bäcklund $B_{\sigma_1}, B_{\tau''}$ nel modo indicato schematicamente nella seguente figura:

Ora la $B_{\tau'}$ che cangia S in S' cangierà tutta questa quaderna in una nuova e precisamente S'' nella quarta superficie dopo S, S', S'' cioè in S''', la S_1 nella quarta dopo S, S', S_1 cioè in S_1', in fine la S_1'' nella quarta dopo S_1, S_1', S_1'' cioè in S_1'''; dunque la $B_{\tau'}$ cangia la quaderna (S, S_1, S'', S_1'') nella (S', S_1', S''', S_1'''). Poichè adunque S_1''' è la quarta superficie dopo S', S_1', S''', la trasformazione $B_{\tau''}$ che cangia S' in S''' trasformerà la quaderna (S', S_1', S_2', S_3') in una nuova quaderna, nella quale la trasformata di S_1' sarà appunto la S_1'''. Per analoga ragione questa $B_{\tau''}$ trasformerà S_2' in S_2''', S_3' in S_3'''; dunque la quaderna $(S''', S_1''', S_2''', S_3''')$ è legata alla (S', S_1', S_2', S_3') da questa $B_{\tau''}$, e similmente alla $(S'', S_1'', S_2'', S_3'')$ da una $B_{\tau'}$, c. d. d.

(1) Si può dare al teorema del testo quest'altra forma equivalente (cfr. § 9): *Si trasformi una superficie a curvatura costante* S, *mediante quattro trasformazioni di* Bäcklund *a costanti distinte* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ *in altre quattro* S_1, S_2, S_3, S_4; *da queste cinque superficie viene determinato un ciclo chiuso di* $2^4 = 16$ *superficie ciascuna delle quali è legata a quattro consecutive nel ciclo da quattro trasformazioni di* Bäcklund *colle medesime costanti* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. La generalizzazione al caso in cui si applichino alla S un numero qualunque n di trasformazioni si presenta spontaneamente e conduce ad un ciclo di 2^n superficie, Per $n = 3$ si ha il caso del § 9, per $n = 4$ l'attuale.

Ciò premesso, supponiamo che la quaderna primitiva (S, S_1, S_2, S_3) sia la particolare quaderna associata ad una deformata S_0 del catenoide accorciato ed applichiamo il nostro teorema. Le tre nuove quaderne (S', S'_1, S'_2, S'_3), $(S'', S''_1, S''_2, S''_3)$, $(S''', S'''_1, S'''_2, S'''_3)$ si troveranno nelle medesime condizioni ed avremo tre nuove superficie S'_0, S''_0, S'''_0 applicabili sopra S_0 e luoghi rispettivamente del punto d'incontro delle normali in punti corrispondenti alle coppie (S', S'_3), (S'', S''_3), (S''', S'''_3). Da quanto precede risulta che mentre S_0 è legata ad S'_0, S''_0 rispettivamente da una $B_{\tau'}, B_{\tau''}$, la S'''_0 è legata alle S'_0, S''_0 stesse da due trasformazioni $B_{\tau''}, B_{\tau'}$ a costanti τ'', τ' invertite. E poichè le medesime osservazioni si applicano evidentemente al caso in cui S_0 sia deformata del sinusoide iperbolico, possiamo concluderne: *Per le nostre trasformazioni delle superficie applicabili sul catenoide accorciato o sul sinusoide iperbolico vale il teorema* B) *di permutabilità.*

È chiaro poi che le medesime proprietà valgono per le superficie applicabili sul catenoide ordinario, come risulta dall'ordinario teorema di permutabilità per le trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche evolventi.

§ 13.

Prime osservazioni sulle deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda.

Siamo ora in grado di intraprendere le ricerche per la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle altre quadriche rotonde di seconda specie che più ci interessano, quelle enumerate nella tabella al § 7. Seguendo l'ordine stabilito in questa tabella, comincieremo dal caso, ivi segnato A_1), delle superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda in senso ristretto, cioè entro ai limiti.

Convien subito avvertire che si debbono distinguere le deformate (reali) S_0 dell'iperboloide in tre specie a seconda della natura del sistema coniugato permanente nel passaggio dalla configurazione S_0 alla forma iperboloidica. Diremo S_0 una deformata di *1ª specie* dell'iperboloide se i due sistemi di linee che formano il sistema coniugato permanente sono reali e distinti, di *2ª specie* quando sono immaginari (coniugati), in fine di *3ª specie* quando sono reali e coincidenti. In quest'ultimo caso si tratta delle deformate rigate dell'iperboloide (¹); per esse valgono ancora i medesimi teoremi, ma le dimostrazioni richieggono una trattazione speciale, che verrà data nei §§ 22-24.

Per le deformate delle prime due specie sappiamo che il sistema coniugato permanente di S_0 corrisponde precisamente (§ 3) alle linee di curvatura delle superficie (S, S_1, S_2, S_3), che formano la quaderna associata ad S_0, e sono quattro superficie di curvatura costante $K = -\frac{1}{b^2}$, essendo b il semiasse immaginario dell'iper-

(¹) In generale se per due superficie reali applicabili Σ, Σ' il sistema coniugato comune è costituito da due sistemi di linee coincidenti queste sono linee rette. Cfr. il § 2 della mia Memoria: *Sulla deformazione dei paraboloidi* (Annali di matematica, t. IX della serie 3ª, 1903).

boloide. Noi *facciamo per semplicità* $b = 1$, indi $K = -1$ e nelle formole del § 8 $R = 1$. Dobbiamo ora vedere quale valore è da attribuirsi alla costante σ delle trasformazioni $B_\sigma, B_{-\sigma}$ di Bäcklund, in relazione col raggio a del circolo di gola dell'iperboloide, e per ciò basta osservare la doppia espressione pel lato d della losanga dato da

$$d = a\sqrt{-1} = \cos\sigma.$$

Se introduciamo dunque una costante c, reale e positiva, tale che sia $a = \operatorname{senh} c$, potremo prendere

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - ic, \tag{35}$$

indi

$$\operatorname{sen}\sigma = \cosh c \quad , \quad \cos\sigma = i \operatorname{senh} c. \tag{35*}$$

Ora ricordiamo che le due superficie S, S_3 debbono essere coniugate immaginarie, come pure le altre due S_1, S_2, onde dovranno sussistere le formole:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos^2\bar\theta \; d\bar u^2 + \operatorname{sen}^2\bar\theta \; d\bar v^2 = \cos^2\theta_3 \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_3 \, dv^2 \\ \cos^2\bar\theta_1 \, d\bar u^2 + \operatorname{sen}^2\bar\theta_1 \, d\bar v^2 = \cos^2\theta_2 \, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 \, dv^2. \end{array}\right. \tag{36}$$

Se la deformata S_0 dell'iperboloide che si considera è di prima specie, le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ debbono essere reali sopra S_0 e quindi $\bar u$ funzione di u e $\bar v$ funzione di v; se invece la deformata è di seconda specie sarà $\bar u$ funzione di v, e $\bar v$ di u. Ma allora, ricorrendo alle (36), si vede facilmente che nel primo caso deve aversi $d\bar u = \pm du$, $d\bar v = \pm dv$ e nel secondo $d\bar u = \pm dv$, $d\bar v = \pm du$, e perciò, disponendo di costanti additive in u, v, si può supporre senz'altro

$$\bar u = \pm u \;,\; \bar v = \pm v \text{ per le deformate di 1}^a \text{ specie} \tag{37}$$

$$\bar u = \pm v \;,\; \bar v = \pm u \text{ per le deformate di 2}^a \text{ specie.} \tag{37*}$$

In questo secondo caso i segni debbono essere evidentemente presi in coincidenza e si può quindi supporre

$$\bar u = v \quad ; \quad \bar v = u, \tag{38}$$

l'altro caso ($\bar u = -v$, $\bar{} = -u$) equivalendo a mutare p. es. v in $-v$. Dimostreremo che anche per le deformate di prima specie nelle (37) i segni debbono essere presi in coincidenza, ricorrendo alle formole per le trasformazioni di Backlund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ che legano $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$; queste, a causa dei valori (35*) di $\operatorname{sen}\sigma, \cos\sigma$ si scrivono (vol. II, pp. 412 e 416):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta_1 + \cosh c \operatorname{sen}\theta \cos\theta_1}{i \operatorname{senh} c} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta_1 + \cosh c \cos\theta \operatorname{sen}\theta_1}{i \operatorname{senh} c} \end{array}\right. \tag{a}$$

$$(a_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}= \dfrac{\cos\theta_2 \,\mathrm{sen}\,\theta_3+\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_3+\cosh c\cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta}{\partial v}= \dfrac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta_2-\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta_2}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_2}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta_2-\cosh c\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta_2}{i\,\mathrm{senh}\,c} \end{cases}$$

$$(b_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}= \dfrac{\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_3-\cosh c\,\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c} \\[2ex] \dfrac{\partial\theta_3}{\partial v}+\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}=-\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_3-\cosh c\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_3}{i\,\mathrm{senh}\,c}\,. \end{cases}$$

Ora le condizioni (36), essendo attualmente $d\overline{u}^2=du^2$, $d\overline{v}^2=dv^2$, danno

$$\cos 2\overline{\theta}=\cos 2\theta_3 \quad , \quad \cos 2\overline{\theta}_1=\cos 2\theta_2$$

e quindi, trascurando come sottinderemo sempre in seguito multipli di 2π, avremo:

$$(39)\qquad \theta_3=\varepsilon\pi\pm\overline{\theta} \quad , \quad \theta_2=\varepsilon'\pi\pm\overline{\theta}_1 ,$$

dove ε, ε' hanno ciascuna il valore *zero* o l'*unità*. L'incertezza del segno in queste formole si toglie ricorrendo alla formola che risulta dal § 8:

$$T=\mathrm{sen}\,\sigma\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\cosh c\cot\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=\cot\frac{\theta_3-\theta}{2} ,$$

che dà il raggio T delle sfere coi centri distribuiti sopra S_0 e ricordando che T deve essere qui reale (tabella § 7) e per ciò $\cot\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$, $\cot\dfrac{\theta_3-\theta}{2}$ debbono pure essere reali. Ne segue che nell'una e nell'altra delle (39) vale necessariamente il segno inferiore, cioè

$$(40)\qquad \theta_3=\varepsilon\pi-\overline{\theta} \quad , \quad \theta_2=\varepsilon'\pi-\overline{\theta}_1 .$$

Ed ora, siccome le formole coniugate delle (b), (b) debbono coincidere colle (a_1), (b_1) basta confrontare i loro primi membri per dedurne appunto, come si voleva, che nelle (37) valgono insieme i segni superiori o gli inferiori. Siamo così condotti per le deformate di prima specie dell'iperboloide a suddistinguere i due casi seguenti:

$$(41)\qquad \overline{u}=u \quad , \quad \overline{v}=v \quad (u, v \text{ reali})$$

$$(41^*)\qquad \overline{u}=-u \quad , \quad \overline{v}=-v \quad (u, v \text{ puramente immaginarî}),$$

laddove per le deformate di seconda specie abbiamo l'unico caso (38) con u, v immaginarî coniugati.

§ 14.

Deformate di prima specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v reali.

In questo primo caso dei parametri u, v reali cominciamo dal trasformare le formole $(a), (b)$, $(a_1), (b_1)$ in coordinate assintotiche α, β ponendo

$$u = \alpha + \beta \quad , \quad v = \alpha - \beta ;$$

esse diventano così:

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial \alpha} &= \frac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\ \frac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial \beta} &= \frac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{aligned} \right. \qquad (\alpha_1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial \alpha} &= \frac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\ \frac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial \beta} &= \frac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{aligned} \right.$$

$$(\beta) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial \alpha} &= \frac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \frac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial \beta} &= \frac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{aligned} \right. \qquad (\beta_1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial \alpha} &= \frac{1 + \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\ \frac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial \beta} &= \frac{1 - \cosh c}{i \operatorname{senh} c} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1). \end{aligned} \right.$$

Ora se cangiamo nelle $(\alpha), (\beta)$ i in $-i$, osservando le (40), e confrontiamo colle $(\alpha_1), (\beta_1)$, ne deduciamo $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ (mod. 2), quindi o

$$\theta_3 = -\bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = -\bar{\theta}_1 \tag{42}$$

oppure

$$\theta_3 = \pi - \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \pi - \bar{\theta}_1 .$$

Ma questo secondo caso si riduce al primo scambiando S con S_1 ed S_2 con S_3, come si rileva dall'osservare che le $(\alpha), (\beta)$, $(\alpha_1), (\beta_1)$ non mutano cangiando rispettivamente $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ in $\theta_1, \theta + \pi, \theta_3, \theta_2 + \pi$. Possiamo dunque limitarci a considerare il primo caso (42); e scindendo in θ, θ_1 il reale dall'immaginario porremo $\theta = \omega + i\varphi$, $\theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1$, indi:

$$\theta = \omega + i\varphi \;,\; \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \;,\; \theta_2 = -\omega_1 + i\varphi_1 \;,\; \theta_3 = -\omega + i\varphi . \tag{43}$$

Dopo questo noi formiamo le condizioni *necessarie e sufficienti* cui debbono soddisfare le quattro nostre funzioni incognite $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di α, β sostituendo questi valori (43) nelle $(\alpha), (\beta)$ e separando il reale dall'immaginario. Così troviamo in primo luogo la relazione *in termini finiti* fra ω, ω_1:

$$\operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \cosh c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0 \quad , \quad \text{o} \quad \operatorname{tg}\omega_1 = -\cosh c \operatorname{tg}\omega , \tag{I}$$

la quale non è altro che la formola (24) § 8 del teorema di permutabilità appli-

cata alla quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Tenendo poi conto di questa relazione (I), le rimanenti condizioni sono date dal seguente sistema differenziale:

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = \frac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi)\,, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c\operatorname{sen}\omega}\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi)\\
&\frac{\partial\omega}{\partial\beta} = -\frac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}\operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi)\,, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = -\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c\operatorname{sen}\omega}\operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi)\\
&\frac{\partial(\varphi_1+\varphi)}{\partial\alpha} = -\operatorname{senh} c\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega\cosh(\varphi_1-\varphi)\,,\\
&\frac{\partial(\varphi_1+\varphi)}{\partial\beta} = \operatorname{senh} c\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega\cosh(\varphi_1+\varphi)\,.
\end{aligned}\right.$$

Osserviamo subito che, nel sistema (II), le equazioni per ω_1 sono una conseguenza di quelle per ω e della relazione (I) fra ω, ω_1. È poi facile eliminare dal sistema (I), (II) le incognite $\omega_1, \varphi, \varphi_1$ e formare *un'unica equazione a derivate parziali del 2° ordine* per la funzione incognita ω, da cui tutto il problema dipende. Basta per ciò trarre dalle (II)

$$\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi) = \frac{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\quad,\quad \operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi) = -\frac{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$$

esprimendo così φ, φ_1 per ω e le sue derivate prime. Sostituendo poi nell'una o nell'altra delle due ultime (II) si ottiene l'indicata equazione del 2° ordine, che è la seguente:

$$\text{(II*)}\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right] =$$

$$= \cos\omega_1\operatorname{sen}\omega\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2+1}\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2+1}\,,$$

dove ω_1 s'intende espressa per ω colla (I).

Da questa equazione del 2° ordine per ω dipende la ricerca delle attuali deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda. Propriamente, da quanto abbiamo detto fin qui, risulta soltanto che ad ogni tale deformata corrisponde una soluzione della (II*). Ma noi andiamo ora a verificare inversamente che ad ogni soluzione ω della (II*), ossia ad ogni quaderna $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di funzioni che soddisfino il sistema (I), (II), corrisponde una tale deformata S_0 dell'iperboloide.

§ 15.

Verifiche relative alla superficie S_0.

Procedendo all'indicata verifica, cominciamo dall'osservare che se $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfano, come è supposto, il sistema (I), (II), le funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ date dalle (43) soddisferanno conseguentemente le $(\alpha), (\beta), (\alpha_1), (\beta_1)$, e definiranno per ciò quattro

superficie pseudosferiche S, S_1, S_2, S_3 costituenti una quaderna del teorema di permutabilità relativa alle due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ ove σ ha il valore (35) $\sigma = \frac{\pi}{2} - ic$. Le superficie (S, S_3), come le (S_1, S_2), saranno, a causa delle (42), coniugate immaginarie e le normali alle S, S_3 in punti corrispondenti si incontreranno in un punto M_0. Noi dobbiamo dimostrare che: *La superficie S_0 luogo di questo punto M_0 è reale ed applicabile sulla regione reale dell'iperboloide rotondo ad una falda coi semiassi $a = \operatorname{senh} c$, $b = 1$.*

Per ciò, applicando le formole generali del § 8, calcoliamo le due forme quadratiche fondamentali della superficie S_0, e prima di tutto osserviamo che le quantità Ω, Φ, ivi definite dalle (25), hanno qui, a causa delle (43), i valori seguenti:

$$\Omega = \omega_1 \quad , \quad \Phi = i\varphi_1 ,$$

indi le A, B date dalle (26) ibid., tenendo conto delle (35*) e della relazione (I) fra ω, ω_1, diventano:

$$\text{(44)} \qquad A = -\frac{i \operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} \operatorname{senh} \varphi \quad , \quad B = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} \cosh \varphi ,$$

onde segue

$$\text{(45)} \qquad \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} .$$

Pel differenziale esatto dV definito dalle (27) § 8 troviamo qui il valore *reale*

$$dV = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} (\operatorname{senh} \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi \, du - \cosh \varphi_1 \cosh \varphi \, dv),$$

ovvero in coordinate assintotiche α, β:

$$\text{(46)} \qquad dV = \frac{\operatorname{sen} \omega_1}{\operatorname{sen} \omega} [\cosh(\varphi_1 + \varphi) \, d\beta - \cosh(\varphi_1 - \varphi) \, d\alpha] .$$

Dopo ciò il ds_0^2 della S_0, calcolato dalla (28) § 8, diventa

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2 \omega_1}{\operatorname{sen}^4 \omega_1} d\omega_1^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2 \omega_1} ;$$

esso ha forma reale definita positiva, e ponendo

$$\text{(47)} \qquad r = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen} \omega_1} \quad , \quad v_1 = \frac{V}{\operatorname{senh} c} \quad \text{(cfr. § 8)}$$

si riduce alla forma

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c \, . \, r^2 - \operatorname{senh}^4 c}{\operatorname{senh}^2 c (r^2 - \operatorname{senh}^2 c)} dr^2 + r^2 dv_1^2 ,$$

che appartiene appunto (§ 1) all'iperboloide rotondo ad una falda di semiassi

$a = \operatorname{senh} c$, $b = 1$. Di più, siccome dalla (47) risulta $r^2 > \operatorname{senh}^2 c > a^2$, vediamo trattarsi della regione reale dell'iperboloide.

La seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 è data poi dalla (29) § 8, la quale avendosi qui $\cos\sigma = i \operatorname{senh} c$, $\operatorname{sen}\Omega = \operatorname{sen}\omega_1$ e sussistendo le (44), (45), diventa

$$F_0 = \frac{\operatorname{senh}\varphi \cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}(du^2 - dv^2),$$

ovvero in coordinate assintotiche α, β:

$$F_0 = \frac{2 \operatorname{senh} 2\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\, d\alpha\, d\beta .$$

Questo conferma che sopra S_0 le linee α, β sono assintotiche. Ma di più, essendo le due forme quadratiche fondamentali di S_0 ambedue reali e la prima definita positiva, come si è visto, facilmente ne deduciamo che *la superficie* S_0 *è reale*. Invero i teoremi fondamentali della teoria delle superficie dimostrano che in tali condizioni se S_0 non fosse reale, si potrebbe certamente render tale con un movimento immaginario; ma poichè questo movimento dovrebbe tradurre le due coppie (S, S_3) , (S_1, S_2) di superficie coniugate immaginarie in altre due tali coppie, il movimento è necessariamente reale, e reale è quindi la S_0, c. d. d.

In modo leggiermente diverso possiamo arrivare alla medesima conclusione così: Le due forme quadratiche fondamentali ds_0^2 e F_0, sopra calcolate, soddisfano alle equazioni di Gauss e Codazzi, come si può direttamente constatare osservando le (I), (II); esse definiscono quindi *intrinsecamente* una deformata reale S_0 dell'iperboloide. La quaderna di superficie pseudosferiche associata a questa S_0 coincide necessariamente colla (S, S_1, S_2, S_3) corrispondente alle quattro funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ definite dalle formole (43).

§ 16.

Considerazioni preliminari sulle trasformazioni.

Applicando i risultati generali del § 10, convenientemente precisati nel campo reale, perverremo ora al risultato finale in vista cioè alla dimostrazione dei teoremi A) B) per le deformate dell'iperboloide che stiamo studiando. Sia S_0 una tale deformata e sia (S, S_1, S_2, S_3) la quaderna associata di superficie pseudosferiche, due a due coniugate immaginarie. Vogliamo dimostrare che, mediante una trasformazione B_τ di Bäcklund, si può, *in* ∞^2 *modi reali*, trasformare questa quaderna in un'altra (S', S_1', S_2', S_3') della medesima specie con (S', S_3'), (S_1', S_2') coniugate immaginarie. Allora sarà in effetto dimostrata l'esistenza delle ∞^2 trasformazioni richieste per la deformata S_0 poichè la superficie S_0', luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_3', sarà applicabile, per quanto sopra abbiamo visto, sull'iperboloide medesimo e formerà insieme con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Ora, perchè la

nuova quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) si trovi nelle medesime condizioni della primitiva, è necessario e sufficiente, come si è visto al § 14, che siano soddisfatte le condizioni corrispondenti alle (42)

$$\theta'_3 = -\bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = -\bar{\theta}'_1 \tag{48}$$

oppure le altre due

$$\theta'_3 = \pi - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = \pi - \bar{\theta}'_1 , \tag{48*}$$

e qui bisognerà trattare separatamente i due casi perchè conducono in effetto a due gruppi di trasformazioni distinte.

Se riprendiamo le formole (32) § 10 e cangiamo nelle due prime di esse i in $-i$, ricordando che per le (42): $\theta_3 = -\bar{\theta}, \theta_2 = -\bar{\theta}_1$, dal confronto colle due seconde (32) deduciamo che nel caso (48) debbono sussistere le formole

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\sigma-\tau}{2}\cos\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\sigma+\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \cos\frac{\sigma+\tau}{2}\cos\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} \end{array}\right. \tag{49}$$

e nel caso (48*) le altre

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\frac{\sigma+\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2} = \cos\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2}\operatorname{sen}\frac{\sigma-\tau}{2} \\ \cos\frac{\bar{\sigma}-\bar{\tau}}{2}\operatorname{sen}\frac{\sigma+\tau}{2} = \cos\frac{\sigma-\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\bar{\sigma}+\bar{\tau}}{2} . \end{array}\right. \tag{49*}$$

Le (49), sommate e sottratte, danno le equivalenti:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right)-\cos\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right)=0 \\ \cos\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right)+\cos\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right)=0 \end{array}\right. \tag{50}$$

e le (49*) le altre

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau-\bar{\tau}}{2}\right)=0 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}+\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}-\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}\right)=0 . \end{array}\right. \tag{50*}$$

Ma, siccome $\sigma = \frac{\pi}{2} - ic$ indi $\frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2} = \frac{\pi}{2}$, la seconda delle (50) e la prima delle (50*) sono identità, per cui nel primo caso rimane solo da soddisfare la condizione $\operatorname{sen}\frac{\tau-\bar{\tau}}{2} = 0$ e nel secondo l'altra $\cos\frac{\tau+\bar{\tau}}{2} = 0$. Ne concludiamo intanto: *Se*

valgono le (48) *la costante* τ *della trasformazione* B_τ *di* BÄCKLUND *deve essere reale, mentre nel caso delle* (48*) *si potrà porre* $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ *con* τ' *reale.*

Ora, siccome la B_τ trasforma, per ipotesi, $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ rispettivamente in $\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$, dovranno sussistere le formole della trasformazione di BÄCKLUND:

$$(\bar{\alpha}) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'+\theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'-\theta) \\ \dfrac{\partial(\theta'-\theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'+\theta) \end{cases} \qquad (\bar{\beta}) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_1+\theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_1-\theta_1) \\ \dfrac{\partial(\theta'_1-\theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_1-\theta_1) \end{cases}$$

$$(\bar{\alpha}_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_3+\theta_3)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_3-\theta_3) \\ \dfrac{\partial(\theta'_3-\theta_3)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_3+\theta_3) \end{cases} \qquad (\bar{\beta}_1) \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta'_2+\theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2-\theta_2) \\ \dfrac{\partial(\theta'_2-\theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau}\operatorname{sen}(\theta'_2+\theta_2). \end{cases}$$

E intanto si vede subito che, essendo $\theta_3 = -\bar{\theta}$, $\theta_2 = -\bar{\theta}_1$, quando abbiano luogo le (48) con τ reale le formole $(\bar{\alpha}_1)$, $(\bar{\beta}_1)$ sono appunto le coniugate delle $(\bar{\alpha})$ $(\bar{\beta})$; e lo stesso avviene se sussistono invece le (48*) ed è $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, indi $\bar{\tau} = \pi - \tau$. Ma l'osservazione per noi più importante, come quella che conduce alla conclusione in vista, è la seguente: **basterà che le (48), o le (48*) siano soddisfatte** ***inizialmente***, per un sistema particolare α_0, β_0 di valori delle variabili α, β perchè risultino verificate anche per α, β variabili. E infatti avendosi le relazioni (42)

$$\bar{\theta} = -\theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = -\theta_2 \qquad \text{per } \alpha, \beta \text{ variabili,}$$

dalle $(\bar{\alpha})$ $(\bar{\beta})$ cangiandovi i in $-i$ e supposto τ reale risulta che $-\bar{\theta}'$, $-\bar{\theta}'_1$ sono legate a θ_3, θ_2 dalle stesse equazioni differenziali $(\bar{\alpha}_1)$ $(\bar{\beta}_1)$ come θ'_3, θ'_2 per cui se *inizialmente* supponiamo $-\bar{\theta}' = \theta'_3$, $-\bar{\theta}'_1 = \theta'_2$ varranno le medesime relazioni per α, β variabili. E, se invece siamo nel secondo caso $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, si trae la medesima conclusione per $\pi - \bar{\theta}'$, $\pi - \bar{\theta}'_1$ (anzichè per $-\bar{\theta}_1$, $-\bar{\theta}'_1$) e basta quindi che le (48*) valgano per $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ perchè sussistano anche per α, β variabili.

§ 17.

Formole definitive per le trasformazioni.

Ciò premesso, ecco come arriviamo alla fine delle nostre deduzioni. Prendiamo la formola (33) § 10:

$$(51) \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = \frac{\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\operatorname{sen}\left(\theta'-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \cos\sigma\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\sigma\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2} - \cos\tau\cos\left(\theta'-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)},$$

la quale esprime, secondo quanto abbiamo dimostrato in quel paragrafo, che la congiungente due punti corrispondenti M_0, M'_0 di S_0, S'_0 tocca in M_0 la S_0 ed in M'_0 la S'_0, e ricordiamo che nel caso nostro il valore di $\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ deve essere reale. Posto $\theta'=\omega'+i\varphi'$, separiamo nel secondo membro della (51) il reale dall'immaginario ed eguagliamo a zero la parte immaginaria. Troveremo una relazione fra $\omega', \varphi', \omega_1, \varphi_1$ e noi dimostreremo che: *basta soddisfarla inizialmente per* $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ perchè ne risultino pur soddisfatte inizialmente, e quindi pel paragrafo precedente anche per α, β variabili, le (48) o le (48*) secondo che $\bar{\tau}=\tau$, ovvero $\bar{\tau}=\pi-\tau$.

1° caso: $\bar{\tau}=\tau$ (τ reale). — Ponendo in evidenza il reale e l'immaginario nella (51) abbiamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_1}{2}=$$

$$=\frac{\cosh c\cos\tau\operatorname{sen}\omega'\cosh(\varphi'-\varphi_1)+i[\cosh c\cos\tau\cos\omega'\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)-\operatorname{senh}c\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega_1]}{-\cos\tau\cos\omega'\cosh(\varphi'-\varphi_1)+i[\operatorname{senh}c\cos\omega_1-\cos\tau\operatorname{sen}\omega'\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)]},$$

ed, eguagliando a zero la parte immaginaria del secondo membro, otteniamo la formola

$$\text{(A)}\qquad \cosh c\cos\tau\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh}c\,[\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega_1\cos\omega'-\cosh c\cos\omega_1\operatorname{sen}\omega'],$$

dopo di che la precedente si riduce semplicemente alla formola

$$\text{(52)}\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=-\cosh c\operatorname{tg}\omega',$$

Ora supponiamo soltanto la (A) soddisfatta *inizialmente* dalla trasformata $\theta'=\omega'+i\varphi'$ di θ mediante la B_τ; sarà pur soddisfatta inizialmente la (52), e confrontando questa colla formola del teorema di permutabilità

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_3-\theta'}{2}=\frac{1}{\operatorname{sen}\sigma}\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\frac{1}{\cosh c}\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2},$$

ne deduciamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'-\theta'_3}{2}=\operatorname{tg}\omega'\quad\text{per } \alpha=\alpha_0\,,\ \beta=\beta_0\,,$$

ossia

$$\theta'_3\equiv\theta'-2\omega'\equiv-\bar{\theta}',\quad\text{per } \alpha=\alpha_0\,,\ \beta=\beta_0.$$

Così intanto è soddisfatta *inizialmente* la prima delle (48); ma allora basta ricorrere alle (32) § 10, prendere la coniugata della prima e confrontare colla terza per dedurne che sarà altresì inizialmente $\theta'_2=-\bar{\theta}'_1$. Dunque le (48) saranno soddisfatte anche per α, β variabili.

2° caso: $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$, indi $\operatorname{sen}\tau=\cosh\tau'$, $\cos\tau=i\operatorname{senh}\tau'$. — In questo caso abbiamo

$$\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}=\frac{\cosh c\operatorname{senh}\tau'\operatorname{sen}[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]-\operatorname{senh}c\cosh\tau'\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh}c\cos\omega_1-\operatorname{senh}\tau'\cos[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]},$$

ed eguagliando a zero la parte immaginaria, ne deduciamo la

$$(A^*) \quad \cosh c \operatorname{senh} \tau' \cosh(\varphi' - \varphi_1) = \operatorname{senh} c\,[\cosh c \cos\omega_1 \cos\omega' + \cosh\tau' \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega'],$$

per cui la precedente resta

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1' - \theta_2'}{2} = \cosh c \cot\omega',$$

ovvero per la formola del teorema di permutabilità:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_3' - \theta'}{2} = \cot\omega',$$

da cui $\theta_3' - \theta' \equiv \pi - 2\omega'$, cioè $\theta_3' \equiv \pi - \overline{\theta}'$. Soddisfatta la (A^*) inizialmente, è dunque pur soddisfatta la prima delle (48^*), dopo di che, ricorrendo nuovamente alle (32) § 10, vediamo che lo stesso vale per la seconda delle (48^*), e vale quindi anche in questo secondo caso la proprietà enunciata.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Per trasformare la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ relativa ad una deformata di 1ª specie dell'iperboloide in un'altra $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ della medesima specie con una B_τ, basterà trasformare, con una B_τ, θ in $\theta' = \omega' + i\varphi'$ in guisa che siano soddisfatte le une o le altre delle condizioni seguenti:* 1° *sia τ reale e i valori iniziali di ω', φ' soddisfino la* (A); 2° *sia $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$, con τ' reale, ed i valori iniziali di ω', φ' soddisfino la* (A^*).

§ 18.

I teoremi A) *e* B) *per le deformate di 1ª specie dell'iperboloide (con u, v reali).*

I risultati superiori provano che tanto nelle trasformazioni del primo gruppo come in quelle del secondo entrano due costanti arbitrarie e cioè la τ (ovvero τ') e uno dei valori iniziali di ω' o φ', l'altro deducendosene mediante la (A) o la (A^*). Ed ora prendendo la quaderna (S', S_1', S_2', S_3') di superficie a curvatura costante relativa ad una delle ∞^2 quaderne trasformate $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$, la superficie S_0' luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_3' formerà con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Per le attuali deformate di 1ª specie dell'iperboloide il teorema A) della prefazione è dunque perfettamente stabilito. Non tralascieremo di osservare che nel secondo gruppo delle ∞^2 congruenze W colla prima falda focale S_0 assegnata, corrispondente alla formola (A^*), è compresa la speciale congruenza W costituita dalla S_0 e dalla sua complementare $\overline{S}_0$. Essa corrisponde al caso singolare che si faccia $\tau' = c$ (od anche $\tau' = -c$) il che porta, per la (A^*) stessa, che si abbia $\varphi' = \varphi_1$, $\omega' = \omega_1$, ossia $\theta' = \theta_1$, indi per le (32), essendo $\sigma = \tau$, $\theta_2' = \theta_3$ e per le (48^*) $\theta_1' = \pi + \theta_1$, $\theta_3' = \pi + \theta_2$. La quaderna (S, S_1, S_2, S_3) è così trasformata nella quaderna stessa, permutata S con S_1 ed S_2 con S_3.

Veniamo in fine al teorema B) di permutabilità per le nostre trasformazioni. Cominciando da quelle del primo gruppo, corrispondenti alla formola (A) del paragrafo precedente, trasformiamo la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in altre due $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$, $(\theta'', \theta_1'', \theta_2'', \theta_3'')$ mediante due trasformazioni $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ a costanti τ', τ'' *reali e distinte* e per le quali sia soddisfatta la (A). Nelle due nuove quaderne avremo, come per la prima, che le coppie (θ', θ_3'), (θ_1', θ_2'), (θ'', θ_3''), (θ_1'', θ_2'') saranno di funzioni coniugate opposte, cioè sussisteranno le formole

$$(\gamma) \quad \bar\theta = -\theta_3, \; \bar\theta_1 = -\theta_2 \; ; \; \bar\theta' = -\theta_3', \; \bar\theta_1' = -\theta_2' \; ; \; \bar\theta'' = -\theta_3'', \; \bar\theta_1'' = -\theta_2''.$$

Ora, pei risultati del § 12, esisterà una quarta quaderna $(\theta''', \theta_1''', \theta_2''', \theta_3''')$ perfettamente determinata e legata alla $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ da una $B_{\tau''}$, alla $(\theta'', \theta_1'', \theta_2'', \theta_3'')$ da una $B_{\tau'}$. Noi vogliamo dimostrare che: *anche in questa quarta quaderna saranno θ''', θ_3''' coniugate opposte, e così θ_1''', θ_2'''.*

E infatti, poichè $(\theta, \theta', \theta'', \theta''')$, $(\theta_3, \theta_3', \theta_3'', \theta_3''')$ sono due quaderne del teorema di permutabilità relative alle trasformazioni $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ sussisteranno le due formole:

$$(53) \quad \operatorname{tg}\frac{\theta'''-\theta}{2} = \frac{\cos\frac{\tau'+\tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau'-\tau''}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta'-\theta''}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_3'''-\theta_3}{2} = \frac{\cos\frac{\tau'+\tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau'-\tau''}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta_3'-\theta_3''}{2}.$$

Ora se cangiamo nella prima i in $-i$, ricordando che τ', τ'' sono reali ed osservando le (γ), ne deduciamo

$$(54) \qquad \operatorname{tg}\frac{\bar\theta'''+\theta_3}{2} = \frac{\cos\frac{\tau'+\tau''}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau'-\tau''}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta_3''-\theta_3'}{2},$$

la quale formola confrontata colla seconda delle (53) dà subito $\bar\theta''' = -\theta_3'''$. E similmente si vedrà che $\bar\theta_1''' = -\theta_2'''$, c. d. d.

Per le trasformazioni del secondo gruppo si procederà in modo del tutto analogo ricordando che qui

$$\bar\tau' = \pi - \tau' \quad , \quad \bar\tau'' = \pi - \tau''$$

ed invece delle (γ) si hanno le altre

$$\begin{aligned} \bar\theta &= -\theta_3 \quad , \quad \bar\theta' = \pi - \theta_3' \quad , \quad \bar\theta'' = \pi - \theta_3'' \\ \bar\theta_1 &= -\theta_2 \quad , \quad \bar\theta_1' = \pi - \theta_2' \quad , \quad \bar\theta_1'' = \pi - \theta_2''. \end{aligned}$$

Prendendo la coniugata della prima delle (53) segue ancora la (54) onde deduciamo nuovamente $\bar\theta''' = -\theta_3'''$, e così pure $\bar\theta_1''' = -\theta_2'''$. La quarta quaderna viene dunque a trovarsi nelle medesime condizioni della prima.

A questo punto noi abbiamo così dimostrato che: *per le trasformazioni delle deformate di 1ª specie dell'iperboloide con u, v reali sussistono i teoremi* A) *e* B) *della prefazione.*

Avendo così minutamente discusso per questo primo caso tutti i punti della trattazione, potremo procedere più speditamente in tutti i seguenti, che comportano una trattazione analoga, e ci limiteremo quindi a rilevare i punti principali e le differenze dal primo caso esaminato.

§ 19.

Deformate di 1ª specie dell'iperboloide corrispondenti ad u, v puramente immaginari.

In questo caso poniamo

$$u = i(\alpha + \beta) \qquad v = i(\alpha - \beta)$$

e le (α), (β), (α_1), (β_1) § 14 diventeranno:

$$(\alpha')\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\[2mm] \dfrac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{cases} \qquad (\beta')\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\[2mm] \dfrac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{cases}$$

$$(\alpha_1')\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\[2mm] \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{cases} \qquad (\beta_1')\begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} = \dfrac{1 + \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\[2mm] \dfrac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} = \dfrac{1 - \cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1). \end{cases}$$

Valendo sempre le formole (40) § 13:

$$\bar\theta = s\pi - \theta_3 \quad , \quad \bar\theta_1 = s'\pi - \theta_2 .$$

se cangiamo nelle (α') (β') i in $-i$, dal confronto colle (α_1'), (β_1') segue questa volta

$$s' \equiv s + 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

indi $s = 0$, $s' = 1$, ovvero $s = 1$, $s' = 0$. Ma il secondo caso, per le ragioni stesse addotte al principio del § 14, non differisce sostanzialmente dal primo e possiamo quindi supporre senz'altro

$$(55) \qquad \bar\theta = -\theta_3 \quad , \quad \bar\theta_1 = \pi - \theta_2 .$$

Separando il reale dall'immaginario col porre

$$(56) \quad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi - \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = -\omega + i\varphi ,$$

vediamo che il sistema (I), (II) del § 14 verrà ora sostituito dall'analogo seguente:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \cos\omega_1 \cos\omega - \cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0$$

$$(\mathrm{II}_1)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=\frac{\cos\omega}{\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega_1}\cosh(\varphi_1-\varphi) \qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha}=-\frac{\cos\omega_1}{\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega}\cosh(\varphi_1-\varphi)\\
&\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=-\frac{\cos\omega}{\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega_1}\cosh(\varphi_1+\varphi) \qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial\beta}=\frac{\cos\omega_1}{\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega}\cosh(\varphi_1+\varphi)\\
&\frac{\partial(\varphi_1+\varphi)}{\partial\alpha}=-\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi)\\
&\frac{\partial(\varphi_1-\varphi)}{\partial\beta}=\operatorname{senh}c\,\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega\operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi),
\end{aligned}\right.$$

la relazione (I_1) in termini finiti fra ω, ω_1 coincidendo al solito colla formola del teorema di permutabilità. Anche qui il sistema si riduce ad un'unica equazione a derivate parziali del secondo ordine per ω, e cioè alla seguente:

$$(\mathrm{II}_1^*)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right]=$$
$$=\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c\operatorname{sen}^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2-1}\,.\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c\operatorname{sen}^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2-1}\,.$$

Supposto inversamente che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino le equazioni precedenti, per la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_3 troviamo, applicando nuovamente le formole del § 8, i risultati seguenti. Per la prima forma quadratica fondamentale di S_0 si ha

$$ds_0^2=\frac{\cosh^2 c-\operatorname{senh}^2 c\cos^2\omega_1}{\cos^4\omega_1}d\omega_1^2+\frac{dV^2}{\cos^2\omega_1},$$

con dV reale, dato da

$$dV=\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}[\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi)\,d\alpha-\operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi)\,d\beta],$$

indi per la seconda forma F_0:

$$F_0=\frac{2\operatorname{senh}2\varphi}{\operatorname{senh}c\operatorname{sen}\omega}d\alpha\,d\beta\,.$$

Ne concludiamo, come al § 15, che la S_0 è reale ed applicabile sulla regione reale dell'iperboloide.

Per dimostrare poi anche in questo caso i teoremi A) e B) procediamo come al § 16 e seguenti e cerchiamo di trasformare, mediante una B_τ, la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ in guisa che dalla nuova quaderna vengano soddisfatte le condizioni stesse (55) della prima

$$\overline{\theta}'=-\theta_3' \quad , \quad \overline{\theta}_1'=\pi-\theta_2'$$

oppure le altre egualmente ammissibili

$$\overline{\theta}'=\pi-\theta_3' \quad , \quad \overline{\theta}_1'=-\theta_2';$$

in ambedue i casi avremo in effetto una delle cercate trasformazioni. Ora noi troviamo (cf. § 16) che nel secondo caso deve essere τ reale, nel primo invece $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$ con τ' reale. Nel caso di τ reale saranno soddisfatte tutte le condizioni richieste ponendo $\theta'=\omega'+i\varphi'$ e vincolando i valori *iniziali* di ω', φ' (per $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$) colla relazione

$$(B)\qquad \cosh c \cos\tau \operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh} c\,[\cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega' - \operatorname{sen}\tau \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega'],$$

e nel caso $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$ coll'altra

$$(B^*)\qquad \cosh c \operatorname{senh}\tau' \cosh(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh} c\,[\cosh\tau' \cos\omega_1 \cos\omega' + \cosh c \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega'].$$

Ed ora, colle considerazioni stesse svolte al § 18, seguono nuovamente i teoremi A) B) per le deformate dell'iperboloide che ora consideriamo. Possiamo riepilogare i risultati ottenuti fin qui concludendo: *Per qualsiasi deformata di prima specie dell'iperboloide rotondo ad una falda (con sistema coniugato permanente reale) valgono i teoremi* A) *e* B) *della prefazione.*

§ 20.

Formole per le deformate di seconda specie dell'iperboloide.

Passando alle deformate di seconda specie dell'iperboloide, avremo da considerare soltanto il caso rappresentato dalle (38*) § 13, che cioè u, v siano immaginarie coniugate e noi poniamo allora

$$u=\alpha+i\beta \quad , \quad v=\alpha-i\beta,$$

dove α, β sono i parametri reali delle linee assintotiche. Dopo ciò, trasformando le (a), (b), (a_1), (b_1) § 13 in coordinate α, β ricordando che si ha $\operatorname{sen}\sigma=\cosh c$, $\cos\sigma=i\operatorname{senh} c$, otteniamo le seguenti:

$$(a')\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\theta_1+\theta)}{\partial\alpha}&=\frac{1-\cosh c}{i\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_1-\theta)\\ \frac{\partial(\theta_1-\theta)}{\partial\beta}&=\frac{1+\cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta)\end{aligned}\right.\qquad (b')\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\theta_2+\theta)}{\partial\alpha}&=\frac{1+\cosh c}{i\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_2-\theta)\\ \frac{\partial(\theta_2-\theta)}{\partial\beta}&=\frac{1-\cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_2+\theta)\end{aligned}\right.$$

$$(a'_1)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\theta_3+\theta_2)}{\partial\alpha}&=\frac{1-\cosh c}{i\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3-\theta_2)\\ \frac{\partial(\theta_3-\theta_2)}{\partial\beta}&=\frac{1+\cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3+\theta_2)\end{aligned}\right.\qquad (b'_1)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(\theta_3+\theta_1)}{\partial\alpha}&=\frac{1+\cosh c}{i\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3-\theta_1)\\ \frac{\partial(\theta_3-\theta_1)}{\partial\beta}&=\frac{1-\cosh c}{\operatorname{senh} c}\operatorname{sen}(\theta_3+\theta_1).\end{aligned}\right.$$

Dalle (36) § 13, essendo attualmente $d\bar{u}^2=dv^2$, $d\bar{v}^2=du^2$, deduciamo

$$\cos 2\theta_3=-\cos 2\bar{\theta} \quad , \quad \cos 2\theta_2=-\cos 2\bar{\theta}_1,$$

da cui

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar\theta \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar\theta_1 ,$$

avendo $\varepsilon, \varepsilon'$ il solito significato del § 13. L'incertezza del segno nelle formole superiori si toglie, precisamente come al § 13, dalla condizione che $\operatorname{tg}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta_3-\theta}{2}$ debbono essere reali, onde si vede che valgono i segni inferiori, cioè:

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} - \bar\theta \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} - \bar\theta_1 .$$

Ricorrendo ora alle (a'), (b') e confrontando le coniugate di queste colle (a'_1), (b'_1) troviamo $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ (mod. 2), onde senza alterare la generalità potremo fare $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ (cf. § 14); avremo così:

(57)
$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - \bar\theta \quad , \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \bar\theta_1 .$$

Separiamo il reale dall'immaginario ponendo:

(57*)
$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{4} - \omega + i\varphi & \theta_3 = \dfrac{\pi}{4} + \omega + i\varphi \\ \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} - \omega_1 + i\varphi_1 & \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + \omega_1 + i\varphi_1 , \end{cases}$$

e sostituendo nelle (a'), (b') otteniamo per le funzioni incognite $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ il sistema seguente:

(III)
$$\operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega + \cosh c \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega = 0$$

(IV)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = -\dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi) \quad , \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\alpha} = -\dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\operatorname{senh}(\varphi_1-\varphi) \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} = \dfrac{\cos\omega}{\operatorname{senh} c\cos\omega_1}\cosh(\varphi_1+\varphi) \quad , \quad \dfrac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = \dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{senh} c\operatorname{sen}\omega}\cosh(\varphi_1+\varphi) \\ \dfrac{\partial(\varphi_1+\varphi)}{\partial\alpha} = \operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega\cos\omega_1 \cosh(\varphi_1-\varphi) , \\ \dfrac{\partial(\varphi_1-\varphi)}{\partial\beta} = -\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega\cos\omega_1 \operatorname{senh}(\varphi_1+\varphi) ; \end{cases}$$

di queste la prima relazione (III) in termini finiti fra ω, ω_1 rappresenta al solito la formola del teorema di permutabilità.

L'eliminazione di $\varphi, \varphi_1, \omega_1$ porta anche qui ad un'unica equazione del 2° ordine per ω che si scrive:

(IV*)
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\cos\omega_1}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right] =$$
$$= \operatorname{sen}\omega\cos\omega_1 \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2 c_1\cos^2\omega_1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)^2 - 1} ,$$

e dalla quale viene così a dipendere la ricerca delle deformate di 2ª specie dell'iperboloide ad una falda.

§ 21.

Verifiche e teoremi A) B) *per le deformate di 2ª specie dell'iperboloide.*

Dimostriamo ora che se $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfano il sistema (III), (IV), la superficie S_0 luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_3 sarà una deformata *reale* di seconda specie dell'iperboloide. Ricorriamo per ciò al solito alle formole del § 8 nelle quali è da farsi, per le (57*): $\Omega = -\omega_1$, $\Phi = \frac{\pi}{4} + i\varphi_1$. Calcolando le quantità A, B dalle (26) ibid., troviamo

$$A = -\frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\omega}(\cosh\varphi + i\operatorname{senh}\varphi) \quad , \quad B = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\omega}(\cosh\varphi - i\operatorname{senh}\varphi),$$

indi pel differenziale esatto dV della formola (27) ibid., espresso in coordinate α, β, abbiamo l'espressione *reale*

$$dV = \frac{\operatorname{sen}\omega_1}{\operatorname{sen}\omega}[\operatorname{senh}(\varphi_1 + \varphi)\,d\beta - \cosh(\varphi_1 - \varphi)\,d\alpha].$$

Dopo ciò le formole (28), (29) § 8 diventano:

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c \operatorname{sen}^2\omega_1}{\operatorname{sen}^4\omega_1}\,d\omega_1^2 + \frac{dV^2}{\operatorname{sen}^2\omega_1}$$

$$F_0 = \frac{2\cosh 2\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{sen}\omega}\,d\alpha\,d\beta,$$

onde risulta appunto che la S_0 è una deformata reale (di seconda specie) dell'iperboloide (cf. § 15).

Passando alle trasformazioni di queste deformate, noi dovremo ora cercare di cangiare con una trasformazione B_τ di Bäcklund la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ per la quale siano soddisfatte o le condizioni stesse (57)

$$\theta'_3 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}'_1, \tag{58}$$

oppure anche le altre

$$\theta'_3 = -\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}' \quad , \quad \theta'_2 = -\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}'_1, \tag{58*}$$

poichè anche in questo secondo caso sarà raggiunto pel § 20 il nostro scopo [1]. Le formole (32) del § 10 dimostrano allora, ripetendo le osservazioni al principio del § 16, che: *nel caso* (58) *la costante* τ *deve essere reale e nel caso* (58*) $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ *con* τ' *reale.*

[1] Questo caso (58*) corrisponde invero per la seconda quaderna $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ a prendere nelle formole del § 20 $\varepsilon = \varepsilon' = -1$.

Ed ora, precisamente come al § 17, si dimostrerà che vengono soddisfatte tutte le condizioni richieste prendendo il valore *iniziale* di θ' in guisa che risulti reale il valore di $\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ dato dalla formola (33) § 10. Se in analogia colla prima formola (57*) per θ, poniamo

$$\theta'=\frac{\pi}{4}-\omega'+i\varphi',$$

troviamo che per τ reale la condizione iniziale richiesta si traduce nella seguente:

$$\text{(C)}\qquad \cosh c\cos\tau\,\operatorname{senh}(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh}c\,[\cosh c\cos\omega_1\cos\omega'-\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega_1\cos\omega']$$

e quando invece $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$ nell'altra:

$$\text{(C*)}\qquad \cosh c\,\operatorname{senh}\tau'\cosh(\varphi'-\varphi_1)=\operatorname{senh}c\,[\cosh c\cos\omega_1\cos\omega'+\cosh\tau'\operatorname{sen}\omega_1\operatorname{sen}\omega'].$$

Anche qui adunque, come nel caso delle deformate di prima specie, le congruenze W con falde focali applicabili sull'iperboloide si ripartiscono in due gruppi distinti e per ciascuno di essi, assegnata la prima falda focale, si hanno ∞^2 congruenze della specie.

Vale dunque certamente anche nel caso delle deformate di seconda specie il teorema A). E le considerazioni stesse svolte al § 18, con lievi modificazioni, dimostrano che sussiste pure il teorema B) di permutabilità.

§ 22.

Deformate rigate dell'iperboloide e quaderna associata di superficie pseudosferiche.

Per compiere le nostre ricerche sulle trasformazioni delle superficie applicabili sull'iperboloide rotondo ad una falda altro più non resta che occuparsi delle deformate di terza specie, cioè delle deformate rigate.

Per queste ricerche complementari non potremo più valerci delle formole relative alle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, perchè le ordinarie formole suppongono essenzialmente distinti i due sistemi di linee di curvatura di queste superficie ed invece nel caso attuale essi coincidono, come già può prevedersi dal teorema alla fine del § 7 e come risulterà confermato dalle ricerche seguenti. Ma noi potremo fondarci più semplicemente sulla conoscenza di tutte le deformate rigate dell'iperboloide come dipendenti, secondo un teorema di Laguerre, dalle *curve di Bertrand* che sono le trasformate del circolo di gola dell'iperboloide (vol. I, pag. 270). Particolarmente dovremo ricorrere alla costruzione data da Bioche per queste rigate colla proposizione seguente: *Le deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda sono il luogo delle parallele tirate per i punti di una curva qualunque* C *di Bertrand alle binormali nei punti corrispondenti della sua curva*

coniugata $\overline{C}$ (*che ha a comune con* $\overline{C}$ *le normali principali*) (Cf. vol. II, pag. 573, Nota I).

Dovremo altresì ricordare la proprietà dimostrata al luogo ora citato delle *Lezioni*, secondo la quale la seconda deformata dell'iperboloide che si ottiene dalla costruzione di Bioche scambiando C con $\overline{C}$ è precisamente la complementare della primitiva (cf. § 1).

Ciò premesso, cominciamo dal ricercare la natura delle quattro superficie pseudosferiche che, secondo i risultati generali del § 4, formano la quaderna associata a due deformate rigate complementari $S_0, \overline{S}_0$ dell'iperboloide. Indichiamo con v l'arco della prima curva C di Bertrand, contato da un punto fisso, e ritenendo per la curva C le solite notazioni del cap. I delle *Lezioni*, indichiamo con

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\varrho}-\frac{\cos c}{T}=\frac{1}{k} \tag{59}$$

la relazione lineare che lega le due curvature $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ di C, indicando k, c due costanti. I semiassi a, b dell'iperboloide su cui è applicabile la rigata S_0, ottenuta da C colla costruzione di Bioche (e la complementare $\overline{S}_0$ ottenuta dalla coniugata $\overline{C}$), hanno i valori

$$a=k \operatorname{sen} c \quad , \quad b=k \cos c . \tag{59*}$$

Siccome poi i coseni $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ di direzione della binormale alla coniugata $\overline{C}$ di C sono dati dalle formole

$$\bar{\lambda}=\alpha \operatorname{sen} c-\lambda \cos c \quad , \quad \bar{\mu}=\beta \operatorname{sen} c-\mu \cos c \quad , \quad \bar{\nu}=\gamma \operatorname{sen} c-\nu \cos c, \tag{60}$$

se per ogni punto $M\equiv(x, y, z)$ di C tiriamo, colla costruzione di Bioche, un segmento MM_0 nella direzione $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ e indichiamo con $u=\overline{MM}_0$ il valore algebrico di questo segmento, le coordinate x_0, y_0, z_0 dell'estremo M_0 saranno date dalle formole

$$x_0=x+u(\alpha \operatorname{sen} c-\lambda \cos c), \text{ ecc.} \tag{61}$$

Queste formole esprimono in funzione dei due parametri u, v le coordinate del punto M_0 mobile sulla deformata rigata S_0 dell'iperboloide. Formando le derivate delle (61) rapporto ad u, v, abbiamo per le formole di Frenet:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial x_0}{\partial u}=\alpha \operatorname{sen} c-\lambda \cos c \quad , \quad \dfrac{\partial x_0}{\partial v}=\alpha+\dfrac{u}{k} \xi \\ d s_0^2=d u^2+2 \operatorname{sen} c\, d u\, d v+\left(\dfrac{u^2}{k^2}+1\right) d v^2\end{array}\right. \tag{62}$$

e pei coseni di direzione della normale alla S_0:

$$X_0=\frac{u \cos c \,.\, \alpha-k \cos c \,.\, \xi+u \operatorname{sen} c \,.\, \lambda}{\sqrt{u^2+k^2 \cos^2 c}}, \text{ ecc.} \tag{62*}$$

Poichè u è il tratto di generatrice di S_0 dal punto M_0 fino alla trasformata C del circolo di gola, la sfera mobile col centro in M_0, l'inviluppo delle cui ∞^2 posizioni sono le due superficie pseudosferiche S, S_2 che ricerchiamo, avrà precisamente il raggio $T = u$. Se indichiamo con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ le coordinate del punto $\dot{M}$ ove la detta sfera tocca la prima falda dell'inviluppo, dalle formole (7) del § 3 e dalle precedenti deduciamo facilmente:

$$\dot{x} = x + \frac{iku \operatorname{sen} c}{u + ik \cos c} [\cos c . \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c . \lambda], \tag{63}$$

colle analoghe per $\dot{y}, \dot{z}$. Naturalmente cangiando in queste i in $-i$ si avrebbero le coordinate $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ del punto di contatto della sfera colla seconda falda S_2 dell'inviluppo. Ora dalle (63) e dalle (60) seguono le due formole

$$(\dot{x} - x)^2 + (\dot{y} - y)^2 + (\dot{z} - z)^2 = 0$$
$$\bar{\lambda}(\dot{x} - x) + \bar{\mu}(\dot{y} - y) + \bar{\nu}(\dot{z} - z) = 0;$$

queste ci dicono che le linee $v = \text{cost.}$ sulla superficie S sono rette isotrope (appoggiate al circolo immaginario all'infinito) che partono dal punto M di C e giacciono nel piano osculatore della coniugata $\bar{C}$.

Se, per abbreviare, nelle (63) al posto di $\frac{iku \operatorname{sen} c}{u + ik \cos c}$ scriviamo $\bar{u}$, la nostra superficie rigata isotropa S è definita dalle formole

$$\dot{x} = x + \bar{u} [\cos c \, \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c . \lambda],$$

da cui derivando abbiamo

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \bar{u}} &= \cos c . \alpha - i\xi + \operatorname{sen} c . \lambda \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial v} &= \left(1 + \frac{i\bar{u}}{\varrho}\right) . \alpha + \left(\frac{\cos c}{\varrho} + \frac{\operatorname{sen} c}{T}\right) \bar{u} . \xi + \frac{i\bar{u}}{T} \lambda \end{aligned} \right.$$

e pei coseni di direzione della normale $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ alla S:

$$\dot{X} = \frac{i\bar{u}}{k} . \alpha + \left(\frac{\bar{u}}{k \cos c} - i \operatorname{tg} c\right) . \xi + \left(\frac{1}{\cos c} - \frac{i\bar{u} \operatorname{tg} c}{k}\right) . \lambda .$$

I coefficienti E, F, G ; D, D', D'' della prima e seconda forma quadratica fondamentale di S hanno per ciò i valori seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} &E = 0 \quad , \quad F = \cos c \quad , \quad G = 1 + \frac{2i\bar{u}}{\varrho} + \frac{\bar{u}^2}{k^2} \\ &D = 0 \quad , \quad D' = -\frac{i}{k} \quad , \quad D'' = \frac{i}{k^3 \cos c} \bar{u}^2 - \frac{i \operatorname{tg} c}{\varrho}, \end{aligned} \right.$$

onde segue intanto per la curvatura K di S

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{k^2 \cos^2 c} = -\frac{1}{b^2},$$

dove b per la seconda delle (59*) è appunto il semiasse immaginario dell'iperboloide. Questa è una conferma dei risultati generali al § 4; ma vi ha di più che se calcoliamo i raggi principali di curvatura r_1, r_2 troviamo

$$r_1 = r_2 = -ib.$$

Le superficie (immaginarie) S, S_3 hanno dunque, come la sfera, eguali i loro raggi principali di curvatura e le loro linee di curvatura formano un unico sistema costituito da rette isotrope: queste singolari superficie immaginarie, già incontrate dal Serret si presentano qui come collegate alle curve di Bertrand colla costruzione geometrica seguente:

Presa una coppia (C, $\bar{C}$) *di curve coniugate di* Bertrand *si conduca per ogni punto di una di esse* C *e nel piano osculatore dell'altra* $\bar{C}$ *la coppia di rette isotrope. Ciascuna di queste rette genera una superficie di curvatura costante negativa, con raggi principali di curvatura eguali fra loro e linee di curvatura coincidenti nel sistema delle generatrici isotrope.*

Notiamo poi che le due superficie pseudosferiche coniugate immaginarie così ottenute sono le due falde dell'inviluppo di sfere coi centri distribuiti sulla deformata rigata S_0 dell'iperboloide ottenuta da C colla costruzione di Bioche, e di raggio eguale al tratto di generatrice di S_0 dal punto che si considera (centro della sfera) fino alla curva C. Le altre due superficie pseudosferiche S_1, S_2 che completano con S, S_3 la quaderna del teorema di permutabilità si ottengono colla costruzione stessa scambiando la curva C colla sua coniugata $\bar{C}$.

§ 23.

Le trasformazioni di Razzaboni *e* Demartres *delle curve di* Bertrand.

Raggiungeremo il nostro scopo di dimostrare anche per le deformate rigate dell'iperboloide il teorema A) della prefazione, ed anzi perverremo a costruire effettivamente le ∞^2 congruenze W che hanno per prima falda focale un'assegnata deformata rigata S_0 dell'iperboloide e la seconda falda focale della medesima specie, utilizzando quelle trasformazioni delle curve di Bertrand che furono trovate in un caso particolare dal Demartres (1), indi opportunamente generalizzate dal Razzaboni (2).

La costruzione data dal Razzaboni per dedurre da una curva C di Bertrand ∞^2 curve *della medesima famiglia* (cioè coi medesimi parametri c, k nella relazione (59) che vincola le curvature) è la seguente:

Indicando con σ *un angolo arbitrario costante, si conduca per ogni punto* M *della curva* C, *e nel piano osculatore della coniugata* $\bar{C}$ *un segmento* MM' *di*

(1) Comptes Rendus de l'Académie, 1888.

(2) *Un teorema del sig.* Demartres *generalizzato.* Atti del Reale Istituto Veneto. Anno 1900-1901, t. LX, parte 2ª.

lunghezza costante $= k\cos\sigma$ *ed inclinato sulla normale principale di* C *di un tale angolo* $\varphi = \varphi(v)$ *da verificare l'equazione differenziale* (*del tipo di* Riccati):

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\cos c}{\varrho} + \frac{\operatorname{sen} c}{T} + \frac{\operatorname{sen} c - \cos\sigma \cos\varphi}{k(\cos c + \operatorname{sen}\sigma)}. \tag{64}$$

La curva C' *luogo del punto* M', *le cui coordinate* x', y', z', *sono*

$$x' = x + k\cos\sigma\,[\cos c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \alpha + \cos\varphi \,.\, \xi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi \,.\, \lambda], \text{ ecc.} \tag{64*}$$

sarà una curva di Bertrand *della medesima famiglia di* C.

In questa trasformazione entrano due costanti arbitrarie, cioè la costante σ e quella proveniente dalla integrazione della (64). In particolare per $\sigma = 0$ si ha la trasformazione di Demartres, nella quale le ∞^1 trasformate C' di C sono descritte sulla superficie canale di raggio $= k$ coll'asse curvilineo C e sono geodetiche di questa superficie, e traiettorie dei circoli sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - c$.

È indispensabile pel nostro scopo trascrivere dalla citata nota di Razzaboni le formole che danno gli elementi α', ξ', λ'... della curva C' trasformata, il cui arco indicheremo con v', corrispondenti agli elementi α, ξ, λ... della primitiva C.

Ponendo

$$\Delta = 1 + \operatorname{sen}\sigma\cos c - \cos\sigma \operatorname{sen} c \cos\varphi, \tag{65}$$

si ha in primo luogo

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{\Delta}{\cos c + \operatorname{sen}\sigma}, \tag{65*}$$

indi pei valori di α', ξ', λ' le formole seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha' = {} & \frac{1}{\Delta}[\cos c + \operatorname{sen}\sigma - \cos\sigma\cos\varphi(\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma)] \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) \,.\, \xi + \cos\sigma\cos\varphi \,.\, \lambda \\
\xi' = {} & \frac{1}{\Delta}\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi\,[\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma] \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}[\cos\sigma\cos\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) + \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)] \,.\, \xi - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \,.\, \lambda \\
\lambda' = {} & -\frac{1}{\Delta}\cos\sigma(\cos c \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c\cos\sigma + \cos\varphi) \,.\, \alpha + \\
& + \frac{1}{\Delta}\cos\sigma \operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\sigma + \cos c) \,.\, \xi + \operatorname{sen}\sigma \,.\, \lambda \,.
\end{aligned}\right. \tag{66}$$

§ 24.

Il teorema A) *per le rigate applicabili sull'iperboloide.*

Ciò premesso, noi dimostreremo la proposizione seguente che dà il passaggio dalle trasformazioni di Razzaboni-Demartres delle curve di Bertrand a quelle delle rigate applicabili sull'iperboloide, conformemente al teorema A) della prefazione:

Siano C, C' *due curve di* Bertrand, *della medesima famiglia, dedotte l'una dall'altra con una trasformazione di* Razzaboni *e siano* $\overline{C}$, $\overline{C}'$ *le loro rispettive coniugate. Si considerino le due superficie rigate* S_0, S'_0 *applicabili sull'iperboloide, di cui la prima* S_0 *sia ottenuta colla costruzione di* Bioche *conducendo pei punti della* $\overline{C}$ *le parallele alle binormali nei punti corrispondenti della primitiva* C, *e la seconda* S'_0 *similmente conducendo pei punti di* C' *le parallele alle binormali di* $\overline{C}'$: *le due superficie* S_0, S'_0 *sono le due falde focali di una congruenza* W.

Per le coordinate x_0, y_0, z_0 di un punto M_0 della superficie S_0 sopra definita, indicando con u il tratto $\overline{M}\,M_0$ di generatrice, abbiamo:

$$(67)\qquad x_0 = \overline{x} + u\,.\,\lambda = x + k\ \mathrm{sen}\,c\,.\,\xi + u\,.\,\lambda\,,\ \text{ecc.}$$

e analogamente per le coordinate x'_0, y'_0, z'_0 di un punto M'_0 di S'_0 abbiamo:

$$(67^*)\qquad x'_0 = x' + u'(\mathrm{sen}\,c\,.\,\alpha' - \cos c\,.\,\lambda')\,,\ \text{ecc.}$$

dove u' è il tratto $M'\,M'_0$ di generatrice.

Da queste formole, con semplici derivazioni, deduciamo pei coseni di direzione delle normali a S_0, S'_0 le rispettive formole

$$(68)\qquad \begin{cases} X_0 = \dfrac{u\,.\,\alpha + k\cos c\,.\,\xi}{\sqrt{u^2 + k^2\cos^2 c}}\,,\ \text{per } S_0 \\[2ex] X'_0 = \dfrac{u'\cos c\,.\,\alpha' - k\cos c\,.\,\xi' + u'\,\mathrm{sen}\,c\,.\,\lambda'}{\sqrt{u'^2 + k^2\cos^2 c}}\ \text{per } S'_0. \end{cases}$$

Ora, servendoci delle (64*) e delle (66), possiamo porre con facili trasformazioni le differenze $x'_0 - x_0$, $y'_0 - y_0$, $z'_0 - z_0$ sotto le due forme equivalenti seguenti, esprimendole una prima volta per gli elementi α, ξ, λ di C, una seconda volta per quelli α', ξ', λ' di C'

$$(69)\quad x'_0 - x_0 = k[\cos\sigma\cos c\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\alpha + (\cos\sigma\cos\varphi - \mathrm{sen}\,c)\,.\,\xi + \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\lambda] - u\lambda +$$
$$+ u'[(\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,c + \cos\sigma\cos c\cos\varphi)\,.\,\alpha - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\xi + (\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,c\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\sigma\cos c)\,.\,\lambda]$$

$$(69^*)\quad x'_0 - x_0 = k[\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\alpha' + (\cos\sigma\cos\varphi - \mathrm{sen}\,c)\,.\,\xi'] + u'(\mathrm{sen}\,c\,.\,\alpha' - \cos c\,.\,\lambda')$$
$$- u[\cos\sigma\cos\varphi\,.\,\alpha' - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\xi' + \mathrm{sen}\,\sigma\,.\,\lambda'].$$

Dopo ciò, cerchiamo di determinare u' in funzione di u, v in guisa che sussistano insieme le due relazioni

$$(70)\qquad \begin{cases} X_0(x'_0 - x_0) + Y_0(y'_0 - y_0) + Z_0(z'_0 - z_0) = 0 \\ X'_0(x'_0 - x_0) + Y'_0(y'_0 - y_0) + Z'_0(z'_0 - z_0) = 0. \end{cases}$$

Se per calcolare la prima di queste adoperiamo le (69) e per la seconda le (69*), troviamo che esse coincidono nella seguente relazione bilineare fra u, u' (con coefficienti funzioni di v):

$$(71)\qquad (\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,c + \cos\sigma\cos c\cos\varphi)\,u\,u' + k\cos\sigma\cos c\,\mathrm{sen}\,\varphi(u - u') +$$
$$+ k^2\cos c(\cos\sigma\cos\varphi - \mathrm{sen}\,c) = 0.$$

Questa formola (71) stabilisce una tale corrispondenza di punto a punto fra le due superficie S_0, S'_0 che ne risultano soddisfatte le (70) e per ciò il segmento $M_0 M'_0$ che unisce due punti corrispondenti M_0, M'_0 tocca in M_0 la S_0, in M'_0 la S'_0; dunque S_0, S'_0 sono le due falde focali di una medesima congruenza. In fine noi dimostriamo che questa è una congruenza W semplicemente osservando che già alle generatrici $v = \text{cost.}$ di S_0 corrispondono le generatrici $v' = \text{cost.}$ di S'_0 [1].

Così è stabilita la proposizione enunciata, dalla quale, applicando alla curva iniziale C di Bertrand le ∞^2 trasformazioni di Razzaboni, segue che il teorema A) vale ancora per le deformate rigate dell'iperboloide. Sarebbe poi facile dedurre dalle nostre formole che la nuova quaderna (S', S'_1, S'_2, S'_3) associata alla S'_0, formata di quattro superficie pseudosferiche rigate isotrope, è legata alla primitiva da una trasformazione di Bäcklund. Insomma si viene così a constatare che anche le particolari superficie pseudosferiche immaginarie a linee di curvatura coincidenti ammettono trasformazioni di Bäcklund, e precisamente: *Le trasformazioni di Bäcklund di queste superficie pseudosferiche rigate isotrope corrispondono alle trasformazioni di Razzaboni delle curve di Bertrand.*

Dopo ciò è facile intendere che non solo il teorema A) ma anche il teorema B) di permutabilità vale per le trasformazioni delle rigate applicabili sopra l'iperboloide. Ma di questa come di molte altre questioni, che nascono spontaneamente dalle cose esposte, non vogliamo qui indugiare a trattare e soltanto osserveremo che al detto teorema B) corrisponde *un teorema di permutabilità per le trasformazioni delle curve di Bertrand*, teorema che sarebbe facile stabilire direttamente.

In fine notiamo che i risultati ottenuti nel presente paragrafo conservano la loro validità nel caso particolare che le curve di Bertrand si riducano a curve di *torsione costante*, annullandosi la costante c nella formola (59). Vale quindi per le deformate rigate del catenoide ordinario (o dell'elicoide rigata ad area minima) il teorema A):

Ogni rigata applicabile sul catenoide appartiene come prima falda focale ad ∞^2 congruenze rettilinee W *la cui seconda focale è una rigata della medesima specie.* Così viene anche completata l'osservazione già fatta al § 11 per le deformate *non rigate* del catenoide stesso.

§ 25.

Superficie applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide.

Esaurita così la trattazione della nostra teoria per le deformate della regione reale dell'iperboloide, volgiamoci al caso seguente, il caso A_2) della tabella al § 7, delle superficie *reali* applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide. Dobbiamo per

[1] Si ha infatti in generale: Affinchè una congruenza rettilinea sia W basta che sulle due falde focali si corrispondano le assintotiche *di un sistema*. La dimostrazione è semplicissima, perchè in questa ipotesi vi sono *due* diversi sistemi coniugati che si corrispondono sulle due falde e cioè: 1° quelli intercettati dalle sviluppabili della congruenza, 2° quelli a linee coincidenti, rappresentati dalle assintotiche del detto sistema. Dunque tutti i sistemi coniugati si corrispondono e in particolare le assintotiche del secondo sistema.

ciò riprendere la discussione sviluppata nel § 13 e seguenti, colla modificazione però che nel caso attuale la quantità

$$T = \cosh c \cot \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \cot \frac{\theta_3 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginaria, anzichè reale. Come al § 13, si presentano dapprima come possibili i casi (37) e (37*):

$$\bar{u} = \pm u \quad , \quad \bar{v} = \pm v \tag{72}$$

$$\bar{u} = v \quad , \quad \bar{v} = u . \tag{73}$$

Colle (72) valgono necessariamente le (39) § 13

$$\theta_3 = \varepsilon\pi \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi \pm \bar{\theta}_1 ;$$

ma ora la condizione che $\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2}$ siano puramente immaginarie porta che invece degli inferiori, come al § 13, valgano i segni superiori:

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \bar{\theta}_1 . \tag{74}$$

Dopo ciò, ricorrendo ancora alle formole (a), (b), (a_1), (b_1) di quel paragrafo, si vede che le (72) si scindono nei due casi

$$\bar{u} = u \quad , \quad \bar{v} = v \tag{72'}$$

$$\bar{u} = -u \quad , \quad \bar{v} = -v . \tag{72''}$$

Ma il caso (72′) deve essere escluso perchè le considerazioni stesse fatte al principio del § 14 dimostrerebbero doversi supporre $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ (mod. 2) nelle (74) e la formola (28) § 8 pel ds_0^2 di S_0 assegnerebbe a questo ds_0^2 il primo termine negativo, ciò che è incompatibile colla realità della S_0. Egualmente si esclude il caso (73) di u, v coniugati immaginarî perchè le considerazioni al principio del § 20 darebbero nuovamente le formole

$$\theta_3 = \varepsilon\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi + \frac{\pi}{2} \pm \bar{\theta}_1 ,$$

e $\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2}$ non potrebbero essere puramente immaginarie.

Resta dunque possibile il solo caso (72″) di u, v puramente immaginarî; poniamo nuovamente

$$u = i(\alpha + \beta) \quad , \quad v = i(\alpha - \beta) .$$

Procedendo come al § 19 ne deduciamo

$$\bar{\theta} = \varepsilon\pi + \theta_3 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon'\pi + \theta_2 \tag{75}$$

con $\varepsilon \equiv \varepsilon' + 1$ (mod. 2), onde potremo fare

$$\theta_2 = \pi + \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \bar{\theta} \tag{75*}$$

oppure

$$\theta_2 = \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \pi + \bar{\theta}.$$

Questo secondo caso non differisce però dal primo (cfr. § 14) e noi faremo quindi:

$$(76) \qquad \theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi + \omega_1 - i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = \omega - i\varphi ,$$

Separando nelle (α'), (β') § 19 il reale dall'immaginario, troviamo per le nostre funzioni incognite il sistema di equazioni seguenti:

$$(\mathrm{V}) \qquad \cosh\varphi \cosh\varphi_1 + \cosh c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 = 0$$

$$(\mathrm{VI}) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{\cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi_1}\cos(\omega_1 - \omega) \ , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = \frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi}\cos(\omega_1 - \omega) \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \frac{\cosh\varphi}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi_1}\cos(\omega_1 + \omega) \ , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} = -\frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi}\cos(\omega_1 + \omega) \\ &\frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial\alpha} = \operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega) , \\ &\frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial\beta} = -\operatorname{senh} c \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) , \end{aligned} \right.$$

delle quali la (V), in termini finiti fra φ, φ_1, è la formola del teorema di permutabilità.

L'intero sistema equivale anche qui ad un'unica equazione del 2° ordine per la funzione φ, che si scrive:

$$(\mathrm{VI}^*) \qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right] +$$

$$+ \operatorname{senh}\varphi \operatorname{senh}\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{senh}^2\varphi_1}{\cosh^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\operatorname{senh}^2 c \operatorname{senh}^2\varphi_1}{\cosh^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2} = 0,$$

dove φ_1 si esprime per φ colla (V).

§ 26.

Verifiche e teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Supposto inversamente che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino le equazioni precedenti, dalle solite formole del § 8 deduciamo che la superficie S_0, luogo del punto d'incontro delle normali a S, S_3, ha l'elemento lineare:

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 c \cosh^2\varphi_1 - \cosh^2 c}{\cosh^4\varphi_1} d\varphi_1^2 + \frac{dV^2}{\cosh^2\varphi_1} ,$$

ove dV è reale, dato da:

$$dV = \frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh}\varphi}\left[\operatorname{sen}(\omega_1 - \omega)\, d\alpha + \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega)\, d\beta\right].$$

Per la seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 si ha poi

$$F_0 = \frac{2 \operatorname{sen} 2\omega}{\operatorname{senh} c \operatorname{senh} \varphi} d\alpha\, d\beta.$$

Ora se poniamo

$$r = \frac{\operatorname{senh} c}{\cosh \varphi_1} \quad , \quad V = \operatorname{senh} c \,.\, v_1 ,$$

il ds_0^2 diventa

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^4 c - \cosh^2 c \,.\, r^2}{\operatorname{senh}^2 c (\operatorname{senh}^2 c - r^2)} dr^2 + r^2 dv_1^2$$

ed appartiene all'iperboloide rotondo ad una falda coi semiassi

$$a = \operatorname{senh} c \quad , \quad b = 1 ;$$

però siccome dalla relazione (V) fra φ, φ_1 segue $\coth^2 \varphi_1 < \cosh^2 c$, indi

$$r^2 < \frac{\operatorname{senh}^4 c}{\cosh^2 c} < \operatorname{senh}^2 c ,$$

è la regione ideale dell'iperboloide di cui qui si tratta. In fine, poichè anche F_0 è reale, la superficie S_0 è reale ed applicabile sull'iperboloide al di là dei limiti.

Veniamo alla esistenza delle ∞^2 trasformazioni per questa classe di superficie applicabili S_0. Si tratta per ciò di cangiare mediante una B_τ la quaderna primitiva $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ per la quale, o siano soddisfatte le condizioni stesse (75*):

(77) $$\theta_2' = \pi + \bar{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \bar{\theta}' ,$$

oppure anche le altre

(77*) $$\theta_2' = \bar{\theta}_1' \quad , \quad \theta_3' = \pi + \bar{\theta}' .$$

Nel solito modo, deduciamo dalle (32) § 10 che τ deve essere reale nel secondo caso, mentre nel primo può supporsi $\tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$ (τ' reale). Viceversa se ponendo $\theta' = \omega' + i\varphi'$, assoggettiamo i valori iniziali di ω', φ' a soddisfare alla condizione

(D) $$\cosh c \cos \tau \operatorname{sen}(\omega' - \omega_1) = \\ = \operatorname{senh} c [\operatorname{sen} \tau \cosh \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi' - \cosh c \operatorname{senh} \varphi_1 \cosh \varphi'] , \quad \textit{per } \tau \textit{ reale}$$

e invece all'altra:

(D*) $$\cosh c \operatorname{senh} \tau' \cos(\omega' - \omega_1) = \\ = \operatorname{senh} c [\cosh \tau' \cosh \varphi_1 \cosh \varphi' - \cosh c \operatorname{senh} \varphi_1 \operatorname{senh} \varphi'] , \quad \textit{per } \tau = \frac{\pi}{2} - i\tau'$$

la nuova quaderna $(\theta', \theta_1', \theta_2', \theta_3')$ verrà in effetto a soddisfare a tutte le condizioni richieste. La superficie S_0', luogo del punto d'incontro delle normali a S', S_3', sarà quindi applicabile sopra S_0 e con questa darà le due falde focali di una congruenza W.

In ciascuno dei due gruppi di trasformazioni (77), (77*) entrano così due costanti arbitrarie ed abbiamo per ciò anche in questo caso il teorema A).

In fine dalle formole (53) § 18 si stabilirà, nel solito modo, il teorema B) di permutabilità.

§ 27.

Le deformate dell'ellissoide immaginario (3° tipo).

Secondo l'ordine stabilito nella tabella al § 7, andiamo ora ad occuparci dell'ultimo caso, ivi segnato (B), in cui la quaderna (S, S_1, S_2, S_3) associata alla deformata S_0 della quadrica rotonda è costituita ancora di superficie a curvatura costante negativa. È questo il caso delle superficie (reali) del terzo tipo e_2') al § 1 applicabili sull'ellissoide immaginario; degli altri due tipi, egualmente applicabili sull'ellissoide immaginario, rappresentati dal catenoide accorciato e dal sinusoide iperbolico, ci siamo già occupati ai §§ 11, 12 dimostrando per essi i teoremi A), B). Vedremo ora che le stesse proprietà si mantengono ancora pel terzo tipo.

Facciamo ancora qui $=1$ il semiasse b dell'ellissoide, sicchè le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad S_0 saranno pseudosferiche di raggio $R=1$, ed il lato d della losanga avrà il valore reale e minore dell'unità (tabella § 7):

$$d=a<b<1.$$

Qui adunque la costante σ delle due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ relative alla quaderna (S, S_1, S_2, S_3) *sarà reale.*

È facile a vedersi che ora le deformate S_0 da considerarsi saranno tutte di prima specie, cioè il sistema coniugato di S_0 corrispondente ad un sistema coniugato sull'ellissoide immaginario Q sarà necessariamente reale. Se infatti indichiamo con $D_0\,du^2+2D_0'\,du\,dv+D_0''dv^2$, $D\,du^2+2D'du\,dv+D''dv^2$ le due seconde forme quadratiche fondamentali appartenenti alle superficie S_0 e Q in coordinate *reali* qualunque u, v, abbiamo che D_0, D_0', D_0'' sono reali ed invece D, D', D'' puramente immaginarî con $DD''-D'^2<0$. Per ciò la forma quadratica $\frac{1}{i}(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2)$ è reale definita ed in conseguenza sono reali e distinte le linee integrali dell'equazione differenziale

$$\begin{vmatrix} D_0\,du+D_0'dv & , & D_0'du+D_0''dv \\ i(D\,du+D'dv) & , & i(D'du+D''dv) \end{vmatrix}=0,$$

che danno appunto il sistema coniugato permanente.

Riprendendo dopo ciò le considerazioni del § 13, vediamo che i parametri u, v delle linee di curvatura delle superficie S, S_1, S_2, S_3 potranno essere o reali o puramente immaginarî. Questo secondo caso va però escluso perchè dagli sviluppi stessi che ora daremo per il primo ne seguirebbe immaginaria la S_0, trovandosi negativo il primo termine del ds_0^2 nella (28) § 8.

Resta dunque soltanto il primo caso: $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ e noi, introducendo al solito i parametri reali α, β delle linee assintotiche, porremo

$$u = \alpha + \beta \quad , \quad v = \alpha - \beta .$$

Le formole della trasformazione di BÄCKLUND danno quindi:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial\alpha} &= \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \\ \frac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial\beta} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial\alpha} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta) \\ \frac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial\beta} &= \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta_3 + \theta_2)}{\partial\alpha} &= \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) \\ \frac{\partial(\theta_3 - \theta_2)}{\partial\beta} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_2) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\theta_3 + \theta_1)}{\partial\alpha} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_1) \\ \frac{\partial(\theta_3 - \theta_1)}{\partial\beta} &= \frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_1), \end{aligned}\right.$$

dove è da ricordarsi che σ è reale.

Per le considerazioni stesse del § 13, valgono ora le formole (39)

$$\theta_3 = \varepsilon\pi \pm \bar{\theta} \quad , \quad \theta_2 = \varepsilon'\pi \pm \bar{\theta}_1 ; \tag{78}$$

ma attualmente il raggio T della sfera:

$$\mathrm{T} = \operatorname{sen}\sigma \cot \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \cot \frac{\theta_3 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginario, indi puramente immaginarie $\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta_3 - \theta}{2}$. Questo porta che nelle (78) valgono i segni superiori; di più perchè le coniugate delle (c), (d) siano le (c_1), (d_1) occorre che si abbia $\varepsilon \equiv \varepsilon' + 1$ (mod. 2), quindi $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 0$, oppure $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$. Il secondo caso però non differisce dal primo che per cangiamento di notazione (cfr. § 14) e possiamo supporre per ciò

$$\theta_2 = \bar{\theta}_1 \quad , \quad \theta_3 = \pi + \bar{\theta} . \tag{79}$$

Poniamo dunque

$$\theta = \omega + i\varphi \; , \; \theta_1 = \omega_1 - i\varphi_1 \; , \; \theta_2 = \omega_1 - i\varphi_1 \; , \; \theta_3 = \pi + \omega - i\varphi \tag{80}$$

e sostituendo nelle (c) (d) col separare il reale dall'immaginario, ne dedurremo per le funzioni incognite ω, ω_1, φ, φ_1 il sistema seguente:

$$\operatorname{senh}\varphi_1 \operatorname{senh}\varphi + \operatorname{sen}\sigma \cosh\varphi_1 \cosh\varphi = 0 \tag{VII}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma \cosh\varphi_1} \cos(\omega_1 - \omega) \quad , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = \frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cos\sigma \cosh\varphi} \cos(\omega_1 - \omega) \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\frac{\operatorname{senh}\varphi}{\cos\sigma \cosh\varphi_1} \cos(\omega_1 + \omega) \quad , \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} = \frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cos\sigma \cosh\varphi} \cos(\omega_1 + \omega) \\ &\frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial\alpha} = \cos\sigma \cosh\varphi \cosh\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega) , \\ &\frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial\beta} = \cos\sigma \cosh\varphi \cosh\varphi_1 \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) , \end{aligned}\right. \tag{VIII}$$

delle quali equazioni la prima coincide al solito colla formola del teorema di permutabilità. L'eliminazione di ω, ω_1 da questo sistema porta all'equazione di 2° ordine per la funzione φ:

$$\text{(VIII*)} \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cosh\varphi_1}{\operatorname{senh}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right]=$$

$$=\cosh\varphi\cosh\varphi_1\sqrt{1-\frac{\cos^2\sigma\cosh^2\varphi_1}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{\cos^2\sigma\cosh^2\varphi_1}{\operatorname{senh}^2\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2},$$

intendendo φ_1 espresso per φ colla (VII).

§ 28.

Verifiche e teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Supponiamo inversamente che ω, ω_1, φ, φ_1 soddisfino il sistema (VII), (VIII), e dimostriamo che la corrispondente superficie S_0 sarà una deformata reale dell'ellissoide immaginario (3° tipo). Applicando le formole del § 8, dobbiamo porre in queste, a causa delle (80):

$$\Omega=i\varphi_1\quad,\quad\Phi=\omega_1,$$

onde le quantità A, B [(26) § 8], tenendo conto della (VII), diventano

$$A=i\cos\omega\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}\quad,\quad B=i\operatorname{sen}\omega\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi};$$

e ne segue

$$\sqrt{A^2+B^2}=i\frac{\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}.$$

Pel differenziale esatto dV la (27) § 8 dà il valore puramente immaginario

$$dV=\frac{i\operatorname{senh}\varphi_1}{\cosh\varphi}[\cos\omega\operatorname{sen}\omega_1\,du-\operatorname{sen}\omega\cos\omega_1\,dv],$$

e ponendo $V=iv_1$ sarà v_1 reale e le (28), (29) ibid. ci danno

$$\text{(81)} \qquad ds_0^2=\frac{\cos^2\sigma\operatorname{senh}^2\varphi_1-\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{senh}^4\varphi_1}d\varphi_1^2+\frac{dv_1^2}{\operatorname{senh}^2\varphi_1}$$

$$\text{(82)} \qquad F_0=\frac{\operatorname{sen}\omega\cos\omega}{\cos\sigma\cosh\varphi}(du^2-dv^2).$$

Ora, a causa delle (VII) è

$$\coth^2\varphi_1<\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}\ ,\ \text{o}\ \operatorname{senh}^2\varphi_1>\operatorname{tg}^2\sigma;$$

per ciò la (81) è una forma quadratica definita positiva. Se poniamo

$$r=\frac{\cos\sigma}{\operatorname{senh}\varphi_1},$$

la (81) diventa

$$ds_0^2=\frac{\cos^4\sigma-\operatorname{sen}^2\sigma\, r^2}{\cos^2\sigma(\cos^2\sigma+r^2)}dr^2+\frac{r^2}{\cos^2\sigma}dv_1^2$$

ed appartiene appunto (cfr. § 1) all'ellissoide immaginario con $a=\cos\sigma$, $b=1$; di più, essendo $r^2<\frac{\cos^4\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma}$, si tratta del 3° tipo. In fine l'essere reale la F_0 per la (82) assicura che la deformata S_0 dell'ellissoide immaginario è reale.

Per trovare le trasformazioni dobbiamo cercare al solito di trasformare con una B_τ la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in un'altra $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ della medesima specie, per la quale si dovranno quindi verificare, o le (79) stesse:

$$\theta'_2=\bar{\theta}'_1 \quad , \quad \theta'_3=\pi+\bar{\theta}', \tag{83}$$

oppure le altre

$$\theta'_2=\pi+\bar{\theta}'_1 \quad , \quad \theta'_3=\bar{\theta}'. \tag{83*}$$

Tenendo presenti le (32) § 10 e le $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta})$, $(\bar{\alpha}_1)$, $(\bar{\beta}_1)$ § 16, troveremo anche qui che nel caso (83) deve essere τ reale, nel caso (83*) avremo $\tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'$ (τ' reale). E, col solito metodo dei §§ 16, 17, vediamo che posto $\theta'=\omega'+i\varphi'$ basta legare i valori *iniziali* di ω', φ' colla relazione esprimente che è nulla la parte reale di $\operatorname{tg}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ per soddisfare a tutte le condizioni volute. L'indicata relazione si scrive:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}\sigma\cos\tau\cos(\omega'-\omega_1)=\\&=\cos\sigma\left[\operatorname{sen}\sigma\cosh\varphi_1\cosh\varphi'-\operatorname{sen}\tau\operatorname{senh}\varphi_1\operatorname{senh}\varphi'\right],\ \textit{per}\ \tau\ \textit{reale};\end{aligned} \tag{E}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}\sigma\operatorname{senh}\tau'\operatorname{sen}(\omega'-\omega_1)=\\&=\cos\sigma\left[\cosh\tau'\operatorname{senh}\varphi_1\cosh\varphi'-\operatorname{sen}\sigma\cosh\varphi_1\operatorname{senh}\varphi'\right],\ \textit{per}\ \tau=\frac{\pi}{2}-i\tau'.\end{aligned} \tag{E*}$$

Così è dimostrato che vale per l'uno e per l'altro gruppo di trasformazioni il teorema A).

Medesimamente, ripetendo con leggiere modificazioni quanto è esposto alla fine del § 18, si dimostra il teorema B) di permutabilità.

§ 29.

Composizione di due trasformazioni opposte di Bäcklund per le superficie a curvatura costante positiva.

Ormai non ci resta che l'ultimo caso della tabella al § 7 da trattare, quello dell'ellissoide schiacciato. E poichè le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad una deformata S_0 dell'ellissoide sono a curvatura costante positiva, e pei

risultati al § 402 delle *Lezioni*, le due relative trasformazioni di Bäcklund possono supporsi a costanti eguali ed opposte, sarà opportuno che sviluppiamo un sistema di formole, corrispondenti a quelle del § 8, pel caso attuale di K positiva.

Sia S una superficie, reale od immaginaria, di curvatura costante positiva $K=\frac{1}{R^2}$, che, riferita alle linee di curvatura u, v abbia l'elemento lineare (vol. II, § 399)

$$ds^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2)$$

ed i raggi principali di curvatura

$$r_1 = R\coth\theta \quad , \quad r_2 = R\operatorname{tgh}\theta ;$$

riteniamo poi tutte le altre notazioni del § 399 delle *Lezioni*.

Siano ora S_1, S_2 due nuove superficie di curvatura $K=\frac{1}{R^2}$ derivate da S con due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ a costanti σ opposte, e indichiamo con

$$ds_1^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_1\, du^2 + \cosh^2\theta_1\, dv^2) \quad , \quad ds_2^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_2\, du^2 + \cosh^2\theta_2\, dv^2)$$

i loro rispettivi elementi lineari. La quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità dopo S, S_1, S_2 avrà l'elemento lineare

$$ds_3^2 = R^2(\operatorname{senh}^2\theta_3\, du^2 + \cosh^2\theta_3\, dv^2),$$

dove θ_3 è determinata dalla formola (vol. II, pag. 458)

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta_3-\theta}{2} = \operatorname{tgh}\sigma\coth\frac{\theta_1-\theta_2}{2}. \tag{84}$$

Le funzioni $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ saranno poi legate fra loro dalle corrispondenti formole della trasformazione di Bäcklund (vol. II, pag. 454, formole (B)):

$$(e)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\[2mm] i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \end{cases}$$

$$(f)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\[2mm] i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \end{cases}$$

$$(e_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \\[2mm] i\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_2 - \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_2 \end{cases}$$

$$(f_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\dfrac{\partial\theta_3}{\partial v} = -\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 \\[2mm] i\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial u} = -\cosh\sigma\cosh\theta_3\operatorname{senh}\theta_1 + \operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta_3\cosh\theta_1 . \end{cases}$$

Ora le normali alle S, S_3 in punti corrispondenti M, M_3 si incontrano in un punto M_0 che descrive una superficie S_0 applicabile sopra una quadrica rotonda Q Il valore (algebrico) del segmento $\overline{MM}_0 = T$ è dato da

$$T = R \operatorname{tgh} \sigma \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = R \operatorname{tgh} \frac{\theta_3 - \theta}{2}, \tag{85}$$

e le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0 sono quindi:

$$x_0 = x + R \operatorname{tgh} \sigma \coth \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} X_3, \text{ ecc.}$$

Ora, se poniamo

$$\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad , \quad \Phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2i} \tag{86}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \operatorname{senh} \sigma \operatorname{senh} \theta \cosh \Omega + \cosh \sigma \cosh \theta \operatorname{senh} \Omega \\ B &= \operatorname{senh} \sigma \cosh \theta \cosh \Omega + \cosh \sigma \operatorname{senh} \theta \operatorname{senh} \Omega , \end{aligned} \right. \tag{87}$$

dalle formole sviluppate al § 403 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 463) risulta che l'elemento lineare ds_0 della S_0 è dato dalla formola:

$$ds_0^2 = \frac{\operatorname{senh}^2 \sigma - \operatorname{senh}^2 \Omega}{\cosh^2 \sigma \operatorname{senh}^4 \Omega} d\Omega^2 + \frac{dV^2}{\cosh^2 \sigma \operatorname{senh}^2 \Omega}, \tag{88}$$

dove dV è il differenziale esatto

$$dV = B \cos \Phi \, du - A \operatorname{sen} \Phi \, dv . \tag{89}$$

Per la seconda forma quadratica fondamentale F_0 di S_0 troviamo poi

$$F_0 = \frac{RAB}{\operatorname{senh} \Omega \sqrt{A^2 + B^2}} (du^2 + dv^2). \tag{90}$$

In fine ricordiamo che il valore d del lato della solita losanga è dato qui dalla formola

$$d = \frac{i}{\cosh \sigma} \tag{91}$$

§ 30.

Le deformate dell'ellissoide schiacciato corrispondenti ad u, v reali.

Supponiamo ora che la superficie S_0 sia applicabile sull'ellissoide rotondo schiacciato di semiassi a, b e facciamo per semplicità $b = 1$, talchè sarà $a > 1$, e le superficie S, S_1, S_2, S_3 della quaderna associata ad S_0 avranno la curvatura $K = +1$.

Dalla formola (91), confrontata colla $d = ia$ della tabella al § 7, deduciamo

$$a = \frac{1}{\cosh \sigma}$$

e poichè $a > 1$ potremo porre $a = \frac{1}{\cos c}$, con c costante reale, ed avremo $\sigma = ic$ e

$$\cosh\sigma = \cos c \qquad \operatorname{senh}\sigma = i \operatorname{sen} c. \tag{92}$$

Le superficie S, S_3 dovendo essere immaginarie coniugate, e così S_1, S_2, avremo le formole:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{senh}^2\overline{\theta}\; d\overline{u}^2 + \cosh^2\overline{\theta}\; d\overline{v}^2 &= \operatorname{senh}^2\theta_3\, du^2 + \cosh^2\theta_3\, dv^2 \\ \operatorname{senh}^2\overline{\theta}_1\; d\overline{u}^2 + \cosh^2\overline{\theta}_1\; d\overline{v}^2 &= \operatorname{senh}^2\theta_2\, du^2 + \cosh^2\theta_2\, dv^2 . \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Siccome poi sulla deformata S_0 dell'ellissoide, essendo positiva la curvatura, il sistema coniugato permanente (u, v) nel passaggio alla forma ellissoidica è certamente reale, osservando le (93), deduciamo (cfr. § 13)

$$\overline{u} = \pm u \quad , \quad \overline{v} = \pm v. \tag{93*}$$

Le condizioni (93) ci danno

$$\cosh 2\overline{\theta} = \cosh 2\theta_3 \quad , \quad \cosh 2\overline{\theta}_1 = \cosh 2\theta_2 ,$$

indi:

$$\overline{\theta} = \varepsilon\pi i \pm \theta_3 \quad , \quad \overline{\theta}_1 = \varepsilon'\pi i \pm \theta_2 . \tag{94}$$

In queste l'incertezza del segno si toglie osservando che il raggio T della sfera

$$T = \operatorname{tgh}\sigma \coth\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = i \operatorname{tg} c \coth\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\theta_3 - \theta}{2}$$

deve essere puramente immaginario (tabella § 7) e per ciò $\operatorname{tgh}\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ deve essere reale, $\operatorname{tgh}\frac{\theta_3 - \theta}{2}$ puramente immaginario, onde segue che nella prima delle (94) vale il segno superiore, nella seconda l'inferiore:

$$\overline{\theta} = \varepsilon\pi i + \theta_3 \quad , \quad \overline{\theta}_1 = \varepsilon'\pi i - \theta_2 . \tag{94*}$$

Ed allora, affinchè cangiando i in $-i$ i primi membri delle (e), (f) si cangino (salvo il segno) in quelli delle (e_1), (f_1), debbono nelle (93*) valere insieme o i segni superiori o gli inferiori; avremo cioè da distinguere due casi: 1° u, v reali; 2° u, v puramente immaginarî. Occupiamoci in questo paragrafo del primo caso.

Ricorrendo nuovamente al confronto delle (e), (f) colle (e_1), (f_1), ed osservando le (92), (94*) segue $\varepsilon' \equiv \varepsilon + 1 \pmod{2}$; per ciò avremo:

$$\overline{\theta} = \theta_3 \quad , \quad \overline{\theta}_1 = \pi i - \theta_2 \tag{95}$$

o

$$\overline{\theta} = \pi i + \theta_3 \quad , \quad \overline{\theta}_1 = -\theta_2 . \tag{95*}$$

Ma questo secondo caso è da escludersi perchè allora $\Omega = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ sarebbe reale ed il primo termine del ds_0^2 nella (88) avrebbe il valore negativo

$$-\frac{\operatorname{sen}^2 c + \operatorname{senh}^2\Omega}{\cos^2 c \operatorname{senh}^4\Omega}\, d\Omega^2 ;$$

la S_0 non potrebbe dunque essere reale.

Così resta il solo caso (95) che, per separare il reale dall'immaginario, conduce a porre:

(96) $\theta = \omega + i\varphi \ , \ \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_2 = \pi i - \omega_1 + i\varphi_1 \ , \ \theta_3 = \omega - i\varphi .$

Decomponendo in fine le formole (e), (f) nella loro parte reale ed immaginaria, abbiamo per le funzioni incognite $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ di u, v il sistema seguente:

$$\text{(IX)} \qquad \cosh\omega_1 \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{tg} c \operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi = 0$$

$$\text{(X)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\cos c \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega_1} \operatorname{senh}\omega \cos\varphi_1 \ , && \frac{\partial\omega_1}{\partial u} = \frac{\cos c \cosh\omega_1}{\cos\varphi} \operatorname{senh}\omega \cos\varphi_1 \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\cos c \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{senh}\omega_1} \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi_1 \ , && \frac{\partial\omega_1}{\partial v} = -\frac{\cos c \cosh\omega_1}{\cos\varphi} \cosh\omega \operatorname{sen}\varphi_1 \\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi}{\cos c} \operatorname{senh}\omega \operatorname{sen}\varphi_1 \ , && \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi}{\cos c} \cosh\omega \cos\varphi_1 . \end{aligned} \right.$$

In fine osserviamo che l'eliminazione di ω, φ_1 porta all'unica equazione del 2° ordine per φ:

$$\text{(X*)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\operatorname{senh}\omega_1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] + \operatorname{senh}\omega_1 \cos\varphi \times$$

$$\times \sqrt{1 + 2\frac{\operatorname{senh}^2\omega_1}{\cos^2 c \operatorname{sen}^2\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\operatorname{senh}^4\omega_1}{\cos^4 c \operatorname{sen}^4\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]^2} = 0,$$

dove ω_1 deve intendersi espressa per φ colla (IX).

§ 31.

Verifiche e prime formole per le trasformazioni.

Supponiamo inversamente che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino le equazioni (IX), (X) e dimostriamo che la corrispondente superficie S_0 sarà reale ed applicabile sulla regione reale dell'ellissoide schiacciato, indi (§ 1) la sua complementare $\bar{S}_0$ sarà applicabile sulla regione ideale dell'ellissoide stesso.

A causa delle (96), le quantità Ω, Φ del § 29 hanno i valori

$$\Omega = \omega_1 - \frac{\pi i}{2} \quad , \quad \Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$$

e per ciò le quantità A, B (ibid.) sono date da

$$A = -\frac{i\cos c}{\cos\varphi}\cosh\omega\cosh\omega_1 \quad , \quad B = -\frac{i\cos c}{\cos\varphi}\operatorname{senh}\omega\cosh\omega_1 ,$$

da cui

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \frac{i\cos c}{\cos\varphi}\cosh\omega_1 .$$

Pel differenziale esatto dV abbiamo dalle (89) il valore puramente immaginario

$$dV = \frac{i \cos c \cosh \omega_1}{\cos \varphi} [\mathrm{senh}\, \omega \,\mathrm{sen}\, \varphi_1 \, du + \cosh \omega \cos \varphi_1 \, dv],$$

e se poniamo $V = i v_1 . \cos c$ con v_1 reale, la (88) diventa

$$ds_0^2 = \frac{\cosh^2 \omega_1 - \mathrm{sen}^2 c}{\cos^2 c \cosh^4 \omega_1} d\omega_1^2 + \frac{dv_1^2}{\cosh^2 \omega_1},$$

e la (90) ci dà

$$F_0 = \frac{\cos c \,\mathrm{senh}\, \omega \cosh \omega}{\cos \varphi} (du^2 + dv^2).$$

Ora, ponendo $r = \dfrac{1}{\cos c \cosh \omega_1}$, si riconosce subito che il ds_0^2 precedente appartiene all'ellissoide rotondo schiacciato coi semiassi $a = \dfrac{1}{\cos c}$, $b = 1$ (cfr. § 1), ed essendo inoltre F_0 reale, così è reale la superficie S_0. Di più siccome $r^2 < \dfrac{1}{\cos^2 c} < a^2$, l'applicabilità di S_0 sull'ellissoide schiacciato ha luogo entro i limiti.

Passando ora alle trasformazioni delle attuali superficie, dobbiamo cercare di cangiare, con una trasformazione B_τ la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$) della medesima specie. Avremo intanto le quattro formole del teorema di permutabilità:

$$(97)\quad \begin{cases} \mathrm{tgh}\dfrac{\theta'_1 - \theta}{2} = \mathrm{tgh}\dfrac{\sigma - \tau}{2} \cdot \coth\dfrac{\theta_1 - \theta'}{2}, \quad \mathrm{tgh}\dfrac{\theta'_2 - \theta}{2} = -\,\mathrm{tgh}\dfrac{\sigma + \tau}{2} \cdot \coth\dfrac{\theta_2 - \theta'}{2}. \\ \mathrm{tgh}\dfrac{\theta'_3 - \theta_2}{2} = \mathrm{tgh}\dfrac{\sigma - \tau}{2} \coth\dfrac{\theta_3 - \theta'_2}{2}, \quad \mathrm{tgh}\dfrac{\theta'_3 - \theta_1}{2} = -\,\mathrm{tgh}\dfrac{\sigma + \tau}{2} \coth\dfrac{\theta_3 - \theta'_1}{2}, \end{cases}$$

inoltre dovranno essere soddisfatte le relazioni differenziali per la trasformazione B_τ di Bäcklund:

$$(g)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta'}{\partial u} + i \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = \mathrm{senh}\,\tau \cosh\theta \,\mathrm{senh}\,\theta' + \cosh\tau \,\mathrm{senh}\,\theta \cosh\theta' \\ i\dfrac{\partial \theta'}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = -\cosh\tau \cosh\theta \,\mathrm{senh}\,\theta' - \mathrm{senh}\,\tau \,\mathrm{senh}\,\theta \cosh\theta' \\ \dfrac{\partial \theta'_1}{\partial u} + i \dfrac{\partial \theta_1}{\partial v} = \mathrm{senh}\,\tau \cosh\theta_1 \,\mathrm{senh}\,\theta'_1 + \cosh\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_1 \cosh\theta'_1 \\ i\dfrac{\partial \theta'_1}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u} = -\cosh\tau \cosh\theta_1 \,\mathrm{senh}\,\theta'_1 - \mathrm{senh}\,\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_1 \cosh\theta'_1 \end{cases}$$

$$(g_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta'_2}{\partial u} + i \dfrac{\partial \theta_2}{\partial v} = \mathrm{senh}\,\tau \cosh\theta_2 \,\mathrm{senh}\,\theta'_2 + \cosh\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_2 \cosh\theta'_2 \\ i\dfrac{\partial \theta'_2}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u} = -\cosh\tau \cosh\theta_2 \,\mathrm{senh}\,\theta'_2 - \mathrm{senh}\,\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_2 \cosh\theta'_3 \\ \dfrac{\partial \theta'_3}{\partial u} + i \dfrac{\partial \theta_3}{\partial v} = \mathrm{senh}\,\tau \cosh\theta_3 \,\mathrm{senh}\,\theta'_3 + \cosh\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_3 \cosh\theta'_3 \\ i\dfrac{\partial \theta'_3}{\partial v} + \dfrac{\partial \theta_3}{\partial u} = -\cosh\tau \cosh\theta_2 \,\mathrm{senh}\,\theta'_2 - \mathrm{senh}\,\tau \,\mathrm{senh}\,\theta_3 \cosh\theta'_3. \end{cases}$$

Noi vogliamo ora che delle quattro superficie S', S'_1, S'_2, S'_3 corrispondenti alla nuova quaderna $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ le due estreme, come le medie, siano coniugate immaginarie; di più, per le ragioni addotte al paragrafo precedente, una delle due quantità

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} \quad , \quad \operatorname{tgh}\frac{\theta'_3-\theta'}{2}$$

deve essere reale, l'altra puramente immaginaria ([1]). Ne segue, come al paragrafo precedente

$$\bar{\theta}' = \varepsilon\pi i \pm \theta'_3 \quad , \quad \bar{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i \mp \theta'_2,$$

corrispondendosi i segni superiori o gli inferiori. Ma il caso dei segni superiori si esclude osservando che pel cangiamento di i in $-i$ debbono le (g) mutarsi nelle (g_1); per ciò valgono gli inferiori e

$$\bar{\theta}' = \varepsilon\pi i - \theta'_3 \quad , \quad \bar{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i + \theta'_2,$$

ma di più, a causa delle (e), (f), (e_1), (f_1) del § 29 scritte per la seconda quaderna, deve essere ancora qui $\varepsilon' = \varepsilon + 1$ (mod. 2). Così avremmo i due casi

$$\bar{\theta}' = \pi i - \theta'_3 \quad , \quad \bar{\theta}'_1 = \theta'_2 \tag{98}$$

$$\bar{\theta}' = -\theta'_3 \quad , \quad \theta'_1 = \pi i + \theta'_2, \tag{98*}$$

il secondo dei quali però si esclude per la medesima ragione che al paragrafo precedente ci ha fatto escludere il caso (95*), cioè perchè la superficie S'_0 ne risulterebbe necessariamente immaginaria per la (88).

§ 32.

Teoremi A) *e* B) *per queste deformate.*

Ridotti così al solo caso (98), noi confrontiamo le coniugate delle due prime (97) colle due seconde e ne concludiamo che: *la costante τ deve essere puramente immaginaria,* come σ, poniamo

$$\tau = i\tau' \ (\tau' \text{ reale}).$$

Tutte le condizioni richieste risultano allora soddisfatte assoggettando il valore *iniziale* di $\theta' = \omega' + i\varphi$ a rendere puramente immaginaria $\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$, come deve

([1]) Si noti bene che, esaminando come facciamo sia l'una sia l'altra di queste ipotesi, noi veniamo a ricercare l'eventuale esistenza di congruenze W colle due falde applicabili sia ambedue sulla regione reale dell'ellissoide (od ambedue sull'ideale), sia colle due falde applicabili l'una sulla regione reale l'altra sull'ideale dell'ellissoide. Ma le ricerche seguenti nel testo dimostrano che esistono soltanto congruenze della seconda specie.

essere per la seconda delle (98). Ma dalle (97) abbiamo

$$\begin{cases} \operatorname{tgh}\dfrac{\theta'_1-\theta}{2} = \ \ i \operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2} \\ \operatorname{tgh}\dfrac{\theta'_2-\theta}{2} = -i \operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}, \end{cases}$$

e quindi

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = i\,\frac{\operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{c-\tau'}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c+\tau'}{2}\coth\dfrac{\theta_1-\theta'}{2}\coth\dfrac{\theta_2-\theta'}{2}},$$

formola che, con semplici trasformazioni, si cangia nell'altra:

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'_1-\theta'_2}{2} = i\,\frac{\operatorname{sen} c\cosh[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]-\operatorname{sen}\tau'\cosh\omega_1}{-\cos c\operatorname{senh}[\omega'+i(\varphi'-\varphi_1)]+\cos\tau'\operatorname{senh}\omega_1}.$$

La condizione richiesta diventa quindi:

$$\text{(F)}\quad \operatorname{sen} c\cos c\cos(\varphi'-\varphi_1) = \cos c\operatorname{sen}\tau'\cosh\omega_1\cosh\omega' - \operatorname{sen} c\cos\tau'\operatorname{senh}\omega_1\operatorname{senh}\omega';$$

a questa basta che soddisfino i valori iniziali di ω', φ'.

Si conclude di qui che la primitiva superficie S_0, applicabile sull'ellissoide, ammette ∞^2 trasformate S'_0 applicabili sull'ellissoide stesso, ciascuna delle quali forma con S_0 le due falde focali di una congruenza W. Si osservi però che dalle (98), confrontate colla (95), risulta per la seconda quaderna invertito l'ufficio delle due coppie (S', S'_3) (S'_1, S'_2) rispetto alle prime due (S, S_3), (S_1, S_2) (¹). Per ciò mentre S_0 era applicabile sull'ellissoide *entro ai limiti*, la trasformata S'_0 è bensì applicabile sull'ellissoide stesso ma *fuori dei limiti*.

Passando in fine al teorema di permutabilità, supponiamo di avere cangiata la quaderna primitiva $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, per la quale

$$(\delta)\qquad \bar\theta = \theta_2 \quad , \quad \bar\theta_1 = \pi i - \theta_2$$

nelle altre due $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, $(\theta'', \theta''_1, \theta''_2, \theta''_3)$ mediante due trasformazioni $B_{\tau'}, B_{\tau''}$ a costanti τ', τ'' puramente immaginarie differenti ed in guisa da soddisfare le (98)

$$(\delta^*)\qquad \bar\theta' = \pi i - \theta'_3 \quad , \quad \bar\theta'_1 = \theta'_2 \quad ; \quad \bar\theta'' = \pi i - \theta''_3 \quad , \quad \bar\theta''_1 = \theta''_2,$$

e consideriamo la quarta quaderna $(\theta''', \theta'''_1, \theta'''_2, \theta'''_3)$ del teorema di permutabilità al § 9. Applicando alle due quaderne $(\theta, \theta', \theta'', \theta''')$, $(\theta_3, \theta'_3, \theta''_3, \theta'''_3)$ la formola del teorema di permutabilità (vol. II, pag. 458 (C)), avremo:

$$\operatorname{tgh}\frac{\theta'''-\theta}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\tau'-\tau''}{2}\coth\frac{\theta'-\theta''}{2} \quad , \quad \operatorname{tgh}\frac{\theta'''_3-\theta_3}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\tau'-\tau''}{2}\coth\frac{\theta'_3-\theta''_3}{2}.$$

(¹) In particolare $\operatorname{tgh}\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$ è reale, invece $\operatorname{tgh}\dfrac{\theta'_1-\theta'_2}{2}$ puramente immaginario.

Cangiando i in $-i$ nella prima di queste, coll'osservare le (δ), (δ^*) e l'altra $\bar{\tau} - \bar{\tau}' = -(\tau' - \tau'')$, ne deduciamo

$$\operatorname{tgh}\frac{\bar{\theta}''' - \theta_2}{2} = -\operatorname{tgh}\frac{\tau' - \tau''}{2}\coth\frac{\theta_3'' - \theta_3'}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\theta_3''' - \theta_2}{2},$$

e quindi $\bar{\theta}''' = \theta_3'''$; similmente si dimostra che $\bar{\theta}_1''' = \pi i - \theta_2'''$. Dunque la quarta quaderna $(\theta''', \theta_1''', \theta_2''', \theta_3''')$ si trova nelle medesime condizioni della prima, ed il teorema B) di permutabilità è così dimostrato.

§ 33.

Le deformate dell'ellissoide schiacciato corrispondenti ad u, v puramente immaginari.

Trattiamo in fine l'ultimo caso di u, v puramente immaginari e poniamo

$$u = iu_1 \quad , \quad v = iv_1,$$

con u_1, v_1 reali. Varranno sempre le formole (94*) § 30:

$$\bar{\theta} = \varepsilon\pi i + \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \varepsilon'\pi i - \theta_2;$$

ma, avendosi attualmente $\bar{u} = -u$, $\bar{v} = -v$, le considerazioni stesse di quel paragrafo applicate alle (e), (f), (e_1), (f_1) del § 29 dimostrano che sarà qui $\varepsilon' \equiv \varepsilon$ (mod. 2). Sarebbero dunque da distinguersi i due casi

$$\bar{\theta} = \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = -\theta_2$$

$$\bar{\theta} = \pi i + \theta_2 \quad , \quad \bar{\theta}_1 = \pi i - \theta_2, \tag{99}$$

però il primo è da escludersi per la medesima ragione del caso (95*) al § 30, cioè perchè dalla (88) § 29 risulterebbe negativo il primo termine del ds_0^2 e la S_0 sarebbe immaginaria. Resta dunque il solo caso (99), onde poniamo:

$$\theta = \omega + i\varphi \;,\; \theta_1 = \omega_1 + i\varphi_1 \;,\; \theta_2 = \pi i - \omega_1 + i\varphi_1 \;,\; \theta_3 = \pi i + \omega - i\varphi. \tag{99*}$$

Sostituendo nelle (e), (f) § 29, calcolate nei *parametri reali* u_1, v_1, e separando il reale dall'immaginario, otteniamo per le funzioni incognite ω, ω_1, φ, φ_1 il seguente sistema:

$$\cos\varphi\cosh\omega_1 = \operatorname{tg}c\,\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{senh}\omega_1 \tag{XI}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \frac{\operatorname{sen}c\,\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega_1}\cosh\omega\cos\varphi_1 \quad , \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial u_1} = -\frac{\operatorname{sen}c\,\operatorname{senh}\omega_1}{\cos\varphi}\cosh\omega\cos\varphi_1\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v_1} = -\frac{\operatorname{sen}c\,\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega_1}\operatorname{senh}\omega\,\operatorname{sen}\varphi_1 \quad , \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial v_1} = \frac{\operatorname{sen}c\,\operatorname{senh}\omega_1}{\cos\varphi}\operatorname{senh}\omega\,\operatorname{sen}\varphi_1\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial\omega}{\partial v_1} = -\frac{\cos\varphi\cosh\omega_1}{\operatorname{sen}c}\cosh\omega\,\operatorname{sen}\varphi_1,\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1} - \frac{\partial\omega}{\partial u_1} = -\frac{\cos\varphi\cosh\omega_1}{\operatorname{sen}c}\operatorname{senh}\omega\cos\varphi_1,
\end{aligned}\right. \tag{XII}$$

dove al solito la relazione (XI) in termini finiti fra ω_1, φ coincide colla formola del teorema di permutabilità.

L'eliminazione di ω, φ_1 porta anche qui ad un'unica equazione del 2° ordine per φ che, analogamente alla (X*) § 30, si scrive:

$$\text{(XII*)} \quad \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{\cosh \omega_1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial}{\partial v_1}\left[\frac{\cosh \omega_1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right] = \cosh \omega_1 \cos \varphi \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{2 \cosh^2 \omega_1}{\operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 \varphi}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2\right] + \frac{\cosh^4 \omega}{\operatorname{sen}^4 c \operatorname{sen}^4 \varphi}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\right)^2\right]^2}.$$

Inversamente supposto che $\omega, \omega_1, \varphi, \varphi_1$ soddisfino il sistema precedente, precisamente come al § 31, si verifica che la corrispondente superficie S_0 è reale ed applicabile sulla regione reale dell'ellissoide schiacciato.

Passando da ultimo alle trasformazioni di questa classe di superficie applicabili sull'ellissoide, dobbiamo mediante una B_τ cangiare la quaderna $(\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ in una nuova $(\theta', \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ che soddisfi alle condizioni stesse della prima. Dovremo per ciò avere, come al § 31

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i \pm \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i \mp \theta'_2$$

coi segni in corrispondenza. Il caso dei segni superiori si esclude però per la medesima ragione che al § 31 e resta quindi il solo caso

$$\overline{\theta}' = \varepsilon\pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \varepsilon'\pi i + \theta'_2 .$$

Questa volta la sostituzione nelle (*e*), (*f*), (e_1), (f_1) § 29 dimostra che deve essere $\varepsilon' \equiv \varepsilon$ (mod. 2) e quindi dapprima i due casi possibili:

$$\text{(100)} \qquad \overline{\theta}' = \pi i - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \pi i + \theta'_2$$

$$\overline{\theta}' = - \theta'_3 \quad , \quad \overline{\theta}'_1 = \theta'_2 .$$

Ma il secondo è da escludersi perchè S'_0 ne risulterebbe immaginaria e resta quindi solo il primo. Allora le (97) ci dimostrano che la costante τ deve essere puramente immaginaria, poniamo $\tau = i\tau'$. In fine le solite considerazioni provano che sarà raggiunto il nostro scopo solo che si vincolino i valori *iniziali* di ω', φ' (posto $\theta' = \omega' + i\varphi'$) in guisa da rendere puramente immaginaria $\operatorname{tgh} \frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2}$. Basta confrontare le formole (100) colle (98) § 31 per dedurne che la condizione richiesta assume precisamente la stessa forma (F) del § 32.

Così abbiamo dimostrato, anche in questo caso, il teorema (A) per le nostre deformate. E si osservi che il confronto delle (99) colle (100) dimostra anche qui invertito l'ufficio delle due coppie (S', S'_3), (S'_1, S'_2) rispetto alle due primitive (S, S_3) (S_1, S_2), onde consegue che mentre S_0 era applicabile sull'ellissoide *entro ai limiti*

la trasformata contigua S_0' sarà invece applicabile sull'ellissoide stesso *fuori dei limiti*. In fine la dimostrazione del teorema B) di permutabilità si compie in questo ultimo caso nel medesimo modo come pel caso precedente al § 32.

E così, riepilogando i risultati ottenuti per le superficie applicabili sull'ellissoide schiacciato, abbiamo il teorema A) della prefazione così precisato:

A) *Ogni superficie reale* S_0 *applicabile sulla regione reale ovvero sulla regione ideale dell'ellissoide rotondo schiacciato appartiene come prima falda focale ad* ∞^2 *congruenze reali* W *la cui seconda falda focale* S_0' *è applicabile rispettivamente sulla regione ideale ovvero sulla reale dell'ellissoide stesso.*

Ed in fine si ha che: *Per le trasformazioni delle superficie applicabili sull'ellissoide, la cui esistenza è stabilita dalla proposizione precedente, vale il teorema* B) *di permutabilità.*

INDICE DELLA MEMORIA

Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative.

Memoria del dott. ANGELO ANDREINI

(presentata dal Socio L. Bianchi ed approvata dal Socio U. Dini).

PARTE PRIMA

Reti di poliedri regolari e semiregolari.

1. Reti piane. — Nella mia tesi per l'abilitazione all'insegnamento, presentata nel giugno 1886 alla R. Scuola Normale Superiore in Pisa, ebbi occasione di accennare, incidentalmente, alla presente questione. Ritornando ora sull'argomento mi propongo di trattarlo nel modo più completo che mi sia possibile. Prima però di entrare in materia dovrei, secondo le consuetudini, render conto di tutta la letteratura dell'argomento per informare il lettore intorno a quanto possa esservi di nuovo nel presente lavoro. Ma, sotto questo aspetto, il compito mio è molto semplice perchè secondo le indagini che, a lavoro compiuto, ho potuto fare, non mi risulterebbe che il tema da me svolto sia stato sin qui oggetto di speciale trattazione.

Stando così le cose, non mi resta che accennare brevemente ad alcuni lavori che presentano una qualche analogia con quello da me trattato (1).

Il russo mineralogista Fedorow, in un suo esteso lavoro: *Dottrina delle Figure* (2), tratta (insieme a varie altre questioni di poliedrometria tendenti in complesso a stabilire le basi di una originale teoria sulla struttura cristallina) il problema

(1) Sono debitore di varie indicazioni bibliografiche ai chiar. sigg. proff. A. Schoenflies dell'Università di Königsberg, ed E. Minkowski dell'Università di Göttingen, ai quali rinnuovo qui i miei ringraziamenti.

(2) Начала ученія о Фигурахъ - Atti della Società imperiale dei mineralogisti, Pietroburgo, 1885, pp. 1-279. Come guida all'esame di questo lavoro mi ha servito una breve recensione di F. Wulff inserita nel « Zeitschrift für Kristallographie und Miner. ». Leipzig. 1890, vol. XVII, pp. 610-611. Debbo alla squisita gentilezza del prof. Schoenflies l'aver potuto tenere a mia disposizione per lungo tempo l'opera di Fedorow. Sento poi il dovere di esternare i sensi della mia viva riconoscenza alla sig. contessa Stella Zoubow di Robilant e al sig. dott. Alberto Bloch (medico chirurgo in Firenze) che gentilmente si prestarono per la traduzione dal *russo* di quelle parti dell'opera predetta che potevano maggiormente interessarmi.

relativo al modo di riempire con continuità ed uniformità lo spazio ordinario per mezzo di corpi tutti eguali ed associati fra di loro in disposizione parallela. A tali corpi dà il nome di *Paralleloedri* che appartengono alla specie di quelle figure che l'Autore chiama *Zonoedri*, ossia di quelle figure solide di cui le faccie sono associate fra di loro secondo zone. Suddividendo poi i *paralleloedri*, costituenti una delle reti dello spazio, in parti eguali o simmetriche per mezzo di piani, lo spazio stesso resta egualmente scomposto in parti continue ed uniformi, alle quali l'Autore dà il nome di *stereoedri*. Mette poi in rilievo la dipendenza fra le reti di stereoedri ed i *sistemi regolari di punti*, e il collegamento fra queste ricerche e quelle relative ai *gruppi di movimenti*.

Anche SCHOENFLIES si è proposto il problema della divisione regolare dello spazio in tante e fra loro congruenti regioni, fondando la risoluzione della questione sulla teorica dei gruppi di traslazioni (¹). Lo stesso SCHOENFLIES al capitolo III (*Simmetrische Punktnätze und Raumgitter*) della sua opera sulla cristallografia (²), si occupa ancora delle reti simmetriche dello spazio, delle quali determina i varî tipi in numero di 7 contenenti complessivamente 14 diverse specie.

Ma senza entrare qui in un minuto esame dei lavori citati, basterà osservare che essi hanno precipuamente lo scopo di servire di base a considerazioni di indole cristallografica con speciale riguardo alla questione sulla struttura dei cristalli. È quindi naturale che il problema della divisione dello spazio in poliedri si presenti sotto l'aspetto speciale della condizione di eguaglianza ed uniformità delle varie parti della rete in conformità della ipotesi, generalmente ammessa, della regolare disposizione delle molecole nei corpi cristallizzati.

Il presente lavoro è invece di indole puramente matematica e si differenzia dalle parti analoghe delle opere citate, per la circostanza che in queste, come abbiamo già detto, si risolve il problema della divisione dello spazio ordinario in poliedri eguali o simmetrici (regolari e semiregolari o no), mentre in questo mio lavoro si parte dalla supposizione di avere già a nostra disposizione dei corpi speciali (poliedri regolari e semiregolari) e si cerca come e con quali di questi elementi è possibile riempire con continuità in tutti i modi possibili il nostro spazio.

Si può solo osservare che i risultati ai quali giungono FEDEROW e SCHOENFLIES, relativamente alle reti dello spazio, si ritrovano almeno in parte e in una forma meno generale, fra quelli che si riferiscono alle reti correlative che noi dedurremo da quelle formate nel modo ora detto con poliedri regolari e semiregolari.

E dopo ciò affrettiamoci allo svolgimento del nostro tema.

Prendendo le mosse dall'analogo problema di geometria piana comincerò dal determinare in quali e quanti modi è possibile ricuoprire il piano, indefinitamente esteso, con poligoni regolari di eguale lato e dello stesso ordine o no, giacchè con questa prima ricerca non solo potremo facilmente dedurre da quelle ottenute, una triplice serie di altrettante soluzioni relative alla questione proposta, ma, principal-

(¹) *Ueber reguläre Gebietstheilungen des Raumes*, Nachrichten von der k. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1888.

(²) *Krystallsysteme und Krystallstructur*. Leipzig, Teubner, 1891.

mente, perchè essa può suggerire le vie da seguirsi per la completa risoluzione del problema delle reti poliedrali nello spazio ordinario.

La determinazione delle reti piane di poligoni regolari può farsi con due diversi metodi che esporremo qui appresso.

2. I **Metodo.** *Trovare, fra i poligoni regolari, quelli pei quali la somma dei valori degli angoli al vertice di un certo numero di tali poligoni, eguaglia 4 angoli retti.* Per questa ricerca basta osservare che se in un punto possono concorrere s poligoni regolari in modo da formarvi un angolo giro, e più particolarmente $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ poligoni regolari rispettivamente di $l_1, l_2, \ldots, l_n$ lati, dovremo avere, prendendo per unità di misura degli angoli l'angolo retto,

(1) $$\sum_1^n \varphi_r \frac{l_r - 2}{l_r} = 2$$

ovvero riducendo

(2) $$2 \sum_1^n \frac{\varphi_r}{l_r} = s - 2 .$$

Il massimo di s corrisponderà al più piccolo valore delle l; facendo quindi tutte le l eguali a 3, avremo $n = 1, \Sigma\varphi_r = \varphi_1 = 3$, per cui potrà essere al più $s = 6$. Dalla (1) si rileva poi che il massimo di n corrisponde al caso di tutte le φ eguali ad uno, con $l_1 = 3$; $l_2 = 4$; $l_3 = 5$....., e sotto questa ipotesi la relazione stessa ci mostra che può aversi al più $n = 3$

Sicchè per le reti piane regolari o semiregolari non è possibile che in ciascun vertice concorrano più di 6 poligoni, e che questi appartengano a più di tre specie differenti; la (2) può quindi mettersi sotto la forma più determinata,

(3) $$2 \left\{ \frac{\varphi_1}{l_1} + \frac{\varphi_2}{l_2} + \frac{\varphi_3}{l_3} \right\} = s - 2 .$$

Facendo ora in questa successivamente $s = 3, 4, 5, 6$ e per ciascuna ipotesi dando ad s i valori compatibili colla relazione $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = s$, ed infine per ciascuna terna dei valori di queste φ prendendo i valori convenienti delle l che soddisfano alla (3), otterremo tutte le reti regolari e semiregolari come apparisce dal seguente quadro:

Numero d'ordine	s	φ_1	φ_2	φ_3	l_1	l_2	l_3
1		3	—	—	6	—	—
2	3	2	1	—	8	4	—
3					12	3	—
4		1	1	1	4	6	12
5		4	—	—	4	—	—
6	4	2	2	—	3	6	—
7		2	1	1	4	3	6
8	5	4	1	—	3	6	—
9		3	2	—	3	4	—
10	6	6	—	—	3	—	—

3. II Metodo. ***Fra tutti i poliedri regolari e semiregolari (di Archimede) determinare quelli che sono costituiti da un numero infinito di faccie*** (reti piane). Ogni poliedro di Archimede è formato, com'è noto, da faccie regolari di differenti ordine ed equilatere fra di loro, e da angoloidi non regolari, ma tutti però eguali fra di loro; indicando dunque con F e C le faccie e le costole di un poliedro semiregolare, con V gli angoloidi tutti di ordine s, con $f_1, f_2, \ldots, f_r, \ldots, f_n$ le faccie rispettivamente di $l_1, l_2, \ldots, l_r, \ldots, l_n$ lati concorrenti rispettivamente in numero di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r, \ldots, \varphi_n$ in ciascun angoloide, avremo le relazioni:

$$s = \sum_1^n \varphi_r \quad ; \quad 2C = V \sum_1^n l_r \varphi_r \quad ; \quad f_r = \frac{V\varphi_r}{l_r}$$

$$F = \sum_1^n f_r = \sum_1^n \frac{V\varphi_r}{l_r} = V \sum_1^n \frac{\varphi_r}{l_r}$$

i quali valori di C e di F sostituiti nella relazione di Eulero, $V - C + F = 2$, dopo averne moltiplicati per 2 ambo i membri, danno:

$$V \left\{ 2 - \sum_1^n \varphi_r \frac{l_r - 2}{l_r} \right\} = 4,$$

formula che può servire alla determinazione di tutti i poliedri regolari e semiregolari. Per ottenere da essa tutte le reti piane basta supporvi $V = \infty$ il che porta a concludere che deve aversi

$$\sum_1^n \varphi_r \frac{l_r - 2}{l_r} = 2$$

la quale è identica alla formula (1) già trovata coll'altro metodo, e quindi identico il procedimento per ottenere tutte le soluzioni.

4. Il quadro dato sopra mostra che fra regolari e semiregolari si hanno in tutto 10 reti piane. Delle tre regolari, quella composta di quadrati è *autocorrelativa*; le altre due, di triangoli e di esagoni, sono correlative fra di loro.

Diremo che una rete ammette delle *varietà*, quando gli stessi poligoni che la formano possono aggregarsi in più modi distinti intorno ai diversi vertici. Ora è chiaro che le reti regolari non possono ammettere varietà; fra quelle semiregolari, quando si richiegga che tutti gli angoloidi sieno formati dalle stesse faccie e nello stesso ordine di successione, solamente la rete 9 ammette una varietà a cui daremo il numero d'ordine 9'.

Le figure 1-9, 9', 10 rappresentano nell'ordine secondo il quale sono state trovate, le 3 reti regolari, le 7 semiregolari e la varietà a cui abbiamo ora accennato. In ognuna di esse è disegnata a linee punteggiate la rete correlativa formata da faccie tutte eguali e da angoloidi di differenti specie. Si osservi che quando due reti sono in posizione *coniugata*, i vertici dell'uno sono i centri delle faccie dell'altro.

Si può osservare ancora che un piano che contiene una retta indefinita divisa in segmenti eguali, può considerarsi come una rete piana composta di due soli poli-

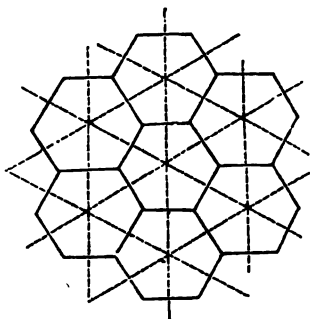



Fig. 1.

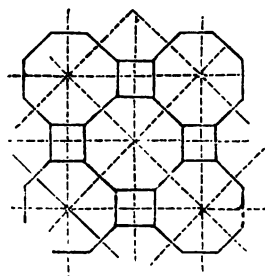



Fig. 2.

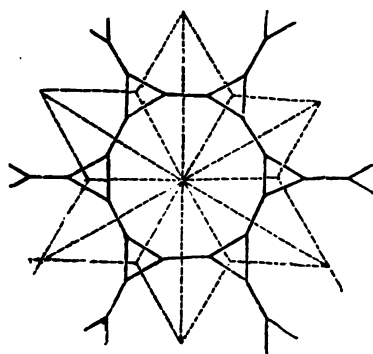



Fig. 3.

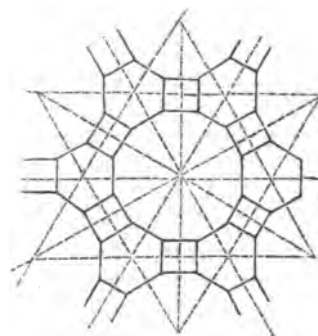



Fig. 4.

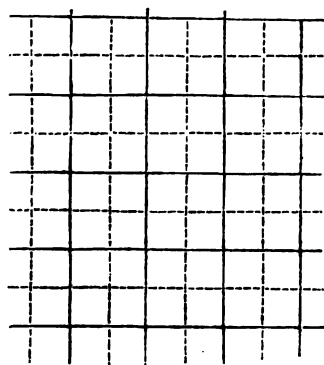



Fig. 5.

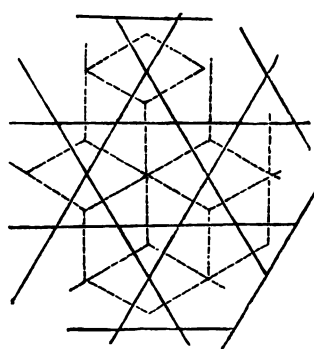



Fig. 6.

goni regolari di un numero infinito di lati. La rete correlativa corrispondente è rappresentata da un numero infinito di *striscie* i cui lati bissecano ad angolo retto quei

segmenti. Tali striscie debbono essere considerate come poligoni regolari di due lati di cui i due vertici coincidono in uno stesso punto all'infinito. La fig. 11 rappresenta le due reti ora accennate.

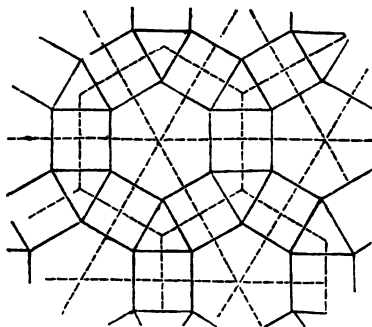
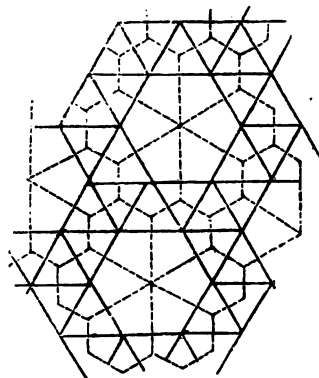



Fig. 7. Fig. 8.

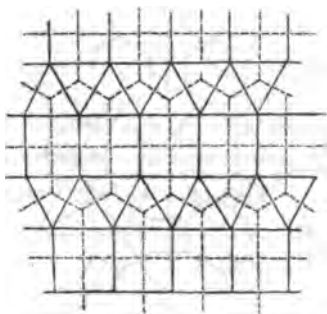
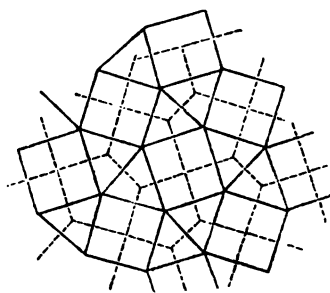



Fig. 9. Fig. 9'.

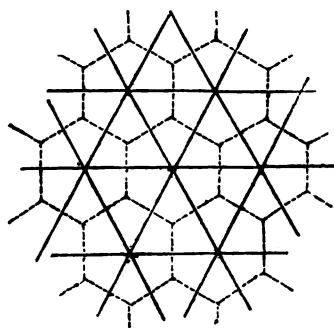
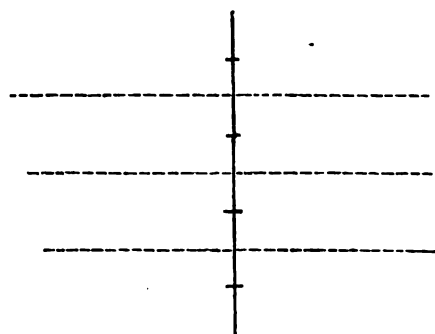



Fig. 10. Fig. 11.

5. Reti dello spazio. — Quando infiniti poliedri della stessa forma o di forma differente, possono aggregarsi in modo da riempire senza sovrapposizioni nè lacune, l'intero spazio ordinario in infinite cellule contigue, diremo che quell'aggregato di

corpi costituisce una *rete dello spazio* o una *rete poliedrale*. Possono immaginarsi infinite reti; noi ci occuperemo solamente di quelle che sono formate dai corpi regolari di Platone e dai semiregolari di Archimede.

Per la determinazione di queste reti poliedrali possiamo, tenendo di guida il procedimento usato per la ricerca delle reti piane, ricorrere alle due proprietà seguenti: 1°, la somma di tutti i diedri dei poliedri, che stanno intorno ad una stessa costola della rete, è eguale a 4 diedri retti; 2°, la somma di tutti gli angoli solidi formati intorno ad uno stesso vertice della rete, è uguale ad 8 piramidi trirettangole.

Un legame fra queste due relazioni è poi stabilito dal seguente teorema:

« *In ogni poliedro convesso il numero degli angoli diedri retti contenuti* « *nella somma degli angoli diedri, meno la metà del numero degli angoli triedri* « *trirettangoli contenuti nella somma degli angoli solidi, è uguale a tante volte* « *due, quante sono le faccie del poliedro meno due* » (1).

Queste tre relazioni generali sono però comuni a tutte le reti di poliedri, perchè in esse non entra affatto la forma speciale dei poliedri che rappresentano gli elementi della rete medesima. Per la risoluzione del problema che ci siamo proposti, è quindi indispensabile introdurre in calcolo questa forma, e a tal uopo sarebbe necessario ricorrere a tutte le possibili relazioni che legano fra di loro gli elementi di uno stesso poliedro regolare e semiregolare. Si otterrebbe così, in ultimo, un certo numero di equazioni di condizione delle quali, prendendo tutte le soluzioni intere e positive, si vengono a determinare i varî aggruppamenti di poliedri regolari e semiregolari che ci conducono alla conoscenza delle reti cercate.

6. Un altro metodo per la determinazione di queste reti è quello che scaturisce dalla considerazione seguente: Come nella ricerca dei poliedri regolari e semiregolari dello spazio ordinario è inclusa la determinazione delle reti piane regolari e semiregolari, non essendo queste che dei poliedri speciali di un numero infinito di faccie, così facendo la ricerca dei corpi regolari e semiregolari dello spazio a quattro dimensioni, si debbono trovare come casi particolari le reti poliedrali regolari e semiregolari del nostro spazio poichè tali reti, per analogia, dovrebbero considerarsi come poliedri di un numero infinito di elementi dello spazio a 4 dimensioni.

7. La risoluzione del problema proposto seguendo o l'una o l'altra delle vie precedentemente accennate, non è scevra di una qualche difficoltà. Riserbandomi di dare a suo tempo la risoluzione completa della questione coi due metodi in parola, mi limiterò per ora a seguire un terzo metodo che, pur non avendo il valore scientifico degli altri due, ha però il vantaggio, forse, di presentare una maggiore semplicità e brevità; senza contare poi che per esso non è necessario quel corredo di cognizioni sulla poliedrometria, che si richieggono per gli altri due.

Seguendo quest'ultima via si comincia a determinare il valore numerico degli angoli diedri e solidi dei varî poliedri regolari e semiregolari; indi si cercano quegli speciali aggruppamenti di tali poliedri pei quali la somma degli angoli diedri che stanno

(1) Brianchon, *Théorème nouveau sur les Polyèdres*, Journ. de l'éc. polyt. (1837), Cah. 25, t. XV, pag. 317. Dal vol. 5° del giorn. di Crelle (1830), pag. 37, si rileva che veramente il teorema enunciato era già stato dato da Grunert in una sua memoria dal titolo: *Einige stereometrische Sätze*.

intorno ad uno stesso spigolo è uguale a 4 diedri retti, oppure si cercano gli aggruppamenti pei quali la somma degli angoli solidi concorrenti in uno stesso punto eguaglia 8 triedri trirettangoli. La ricerca può quindi farsi in due modi distinti, e noi, seguendoli tutti e due, potremo controllare i risultati dell'uno con quelli dell'altro. Vogliamo però osservare che in ciò che segue non ci limiteremo ad un puro lavoro di tentativo quale sarebbe quello di combinare in tutti i modi possibili i varî valori angolari in maniera da soddisfare alle condizioni volute, giacchè con opportune distinzioni e confronti fra questi valori angolari, potremo notevolmente abbreviare quel lungo cammino e determinare, con un lavoro abbastanza breve, tutte le soluzioni del problema. E dopo ciò entriamo senz'altro in argomento esponendo successivamente i due metodi sopra accennati.

I Metodo. *Determinazione delle reti poliedrali per mezzo della considerazione degli angoli diedri dei poliedri.*

8. I corpi dei quali debbono risultare formati le reti che si cercano, non possono essere che i 5 regolari e cioè il *tetraedro*, *l'esaedro*, *l'ottaedro*, il *dodecaedro*, *l'icasaedro*; e i 13 semiregolari e cioè (secondo la nomenclatura di Kepler) (1) il *tetraedro*, *icosaedro*, *ottaedro*, *dodecaedro* e *icosaedro tronchi*; il *cubottaedro*, e *l'icosidodecaedro*; il *rombicubottaedro* e *l'icosidodecaedro*; il *cubottaedro tronco* e *l'icosidodecaedro tronco*; il *cubo simo* e il *dodecaedro simo*. Oltre questi si hanno da considerare ancora due classi indefinite di corpi semiregolari; la prima è quella costituita da *prismi* di cui la base è un poligono regolare di n lati $(n = 3, 4, \dots, \infty)$ e le faccie laterali n quadrati; la seconda classe è pure costituita da una serie infinita di corpi speciali, che diremo *prismi storti*, dei quali la base è un poligono regolare di n lati $(n = 1, 2, 3 \dots, \infty)$ e le faccie laterali sono $2n$ triangoli equilateri alternativamente colla base in alto ed in basso. Di queste ultime specie di poliedri semiregolari quella che ha per base un quadrato, fra i poliedri della prima classe, è identica all'esaedro regolare; quella che ha per base un triangolo, fra i poliedri della 2ª classe, non è altro che l'ottaedro regolare.

Parlando nel seguito di questo scritto di poliedri *regolari* e *semiregolari*, di *prismi* e di *prismi storti*, intenderemo sempre di significare rispettivamente i 5 poliedri regolari, i 13 semiregolari di Archimede, le serie di prismi e quella dei prismi storti ora accennati.

9. Per risolvere la questione che ci interessa, secondo il metodo indicato, dovremo intanto esaminare, salvo le ulteriori condizioni che a suo tempo stabiliremo, quali fra i poliedri considerati possono aggrupparsi intorno ad uno spigolo in modo che la somma dei diversi angoli diedri risulti eguale a 4 retti. È quindi necessario, prima di ogni altra cosa, di determinare il valore degli angoli diedri dei diversi poliedri sopra enumerati.

A tale scopo consideriamo in generale, come abbiamo già fatto al n. 3, il poliedro semiregolare pel quale le faccie di ordine $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ concorrono rispettivamente in numero di $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_n$ in ciascuno angoloide.

(1) *Harmonices mundi*, lib. II, 28.

Immaginiamo tale poliedro proiettato sulla sfera circoscritta di raggio 1, per modo che ad esso venga a corrispondere sulla sfera una rete semiregolare di poligoni sferici. Indicando con λ la lunghezza comune dei lati di questa rete e in generale con x_{l_r} il valore dell'angolo del poligono sferico di l_r lati, è facile riconoscere che si avranno allora le $n+1$ relazioni seguenti:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_1^n \varphi_r x_{l_r} = 360^\circ \\ \cos\frac{1}{2}\lambda = \dfrac{\cos\frac{180^\circ}{l_1}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_{l_1}} = \dfrac{\cos\frac{180^\circ}{l_2}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_{l_2}} = \cdots = \dfrac{\cos\frac{180^\circ}{l_r}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_{l_r}} \cdots = \dfrac{\cos\frac{180^\circ}{l_n}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_{l_n}} \end{cases}$$

le quali astrazion fatta dalla lunghezza e difficoltà dei calcoli, permettono di determinare le x, e quindi λ, quando sieno note tutte le l e le φ.

Chiamando ora Δ il diedro del poliedro formato dalle faccie di ordine l_m, l_n; a_m e a_n le apoteme rispettive di queste faccie; ϱ la lunghezza della congiungente il centro del poliedro col punto di mezzo dello spigolo comune alle faccie suddette; α_m e α_n l'angolo che ϱ forma con queste stesse faccie, si trova facilmente:

$$(5)\quad \begin{cases} \cos\alpha_m = \dfrac{a_m}{\varrho} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\lambda\cot\frac{180^\circ}{l_m}}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \cot\dfrac{180^\circ}{l_m}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda \\ \cos\alpha_n = \dfrac{a_n}{\varrho} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\lambda\cot\frac{180^\circ}{l_n}}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \cot\dfrac{180^\circ}{l_n}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

e quindi

$$(6)\quad \Delta = \alpha_m + \alpha_n = \operatorname{arc}\cos\left(\cot\frac{180^\circ}{l_m}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda\right) + \operatorname{arc}\cos\left(\cot\frac{180^\circ}{l_n}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\lambda\right).$$

10. Nel caso di un poliedro regolare, chiamando l ed s rispettivamente l'ordine delle faccie e degli angoloidi, le (4) divengono

$$sx = 360^\circ \quad , \quad \cos\frac{1}{2}\lambda = \frac{\cos\frac{180^\circ}{l}}{\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{s}}$$

e quindi dalle (5), tenendo conto dell'ultima delle precedenti, si deduce dopo alcune trasformazioni e riduzioni

$$(7)\quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\frac{180}{s}}{\operatorname{sen}\frac{180}{l}}$$

e infine dalle (6)

$$(8) \qquad \varDelta = 2\alpha = 2 \text{ arc sen} \left[\frac{\cos \frac{180}{s}}{\text{sen} \frac{180}{l}} \right]$$

Con queste relazioni è facile dedurre il valore del diedro di ognuno dei 5 poliedri regolari.

Osservazione. — I valori degli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro sono supplementari; infatti dalle precedenti si deduce subito,

$$(8') \qquad \begin{cases} \cos \varDelta = \frac{1}{3}, \text{ per il tetraedro} \\ \cos \varDelta = -\frac{1}{3}, \text{ per l'ottaedro.} \end{cases}$$

11. Gli angoli diedri dei poliedri semiregolari, tranne che pel *cubo simo*, pel *dodecaedro simo* e pei *prismi storti*, possono determinarsi in modo più facile di quello che risulterebbe dell' uso delle formule generali date sopra. Infatti conveniamo di notare l'angolo diedro di un poliedro semiregolare colla lettera δ alla quale opporremo, a guisa di indici, le iniziali che ricordino il nome del corpo, e dei numeri, a guisa di esponenti, che indichino l'ordine delle faccie che formano quel diedro; così ad esempio la notazione δ^{34}_{rco} indicherà l'angolo diedro del *rombicubottaedro* formato da una faccia triangolare e da una quadrangolare. Pei poliedri regolari potremo omettere l' indicazione dell'ordine delle faccie che formano l'angolo diedro. Ciò premesso è facile riconoscere che per gli angoli diedri del *tetraedro*, *cubo* e *ottaedro*, *tronchi*, per quelli del *cubottaedro* e per una parte di quelli del *cubottaedro tronco* abbiamo

$$(9) \quad \begin{cases} \delta^{66}_{tt} = \delta_t \\ \delta^{36}_{tt} = 180^\circ - \delta_t \end{cases}; \qquad (10) \quad \begin{cases} \delta^{88}_{ct} = \delta_c \; ; \; \delta^{66}_{ot} = \delta_o \\ \delta^{38}_{ct} = \delta^{46}_{ot} = \delta^{34}_{co} = \delta^{86}_{cot} = 180^\circ - \frac{1}{2}\,\delta_o \end{cases}$$

Pel *dodecaedro* e *icosaedro tronco*, per l'*icosidodecaedro* e per una parte di quelli dell'*icosidodecaedro tronco*, abbiamo analogamente:

$$(11) \quad \delta^{10\,10}_{dt} = \delta_d \; ; \; \delta^{66}_{it} = \delta_i \qquad \text{e} \qquad (12) \quad \delta^{56}_{it} = \delta^{3\,10}_{dt} = \delta^{35}_{id} = \delta^{6\,10}_{idt} = 180^\circ - \omega$$

essendo ω l'angolo diedro alla base di una piramide regolare a base pentagonale di cui le faccie laterali sono triangoli equilateri. Indicando con l lo spigolo di questa piramide si ha:

$$(13) \quad \frac{l}{2} \cot 30^\circ \cos \omega = \frac{l}{2} \cot 36^\circ \; ; \; \cos \omega = \frac{\cot 36^\circ}{\cot 30^\circ}, \text{ da cui } \omega = 37^\circ, 22', 38''.525.$$

Osserviamo ancora che è facile determinare il valore degli angoli diedri dei poliedri semiregolari ove entrano quelle faccie che provengono dal troncamento degli

spigoli di un poliedro regolare. Infatti per questi angoli, indicando con Δ il diedro del poliedro regolare e con δ quello cercato, abbiamo la relazione semplicissima

$$\delta = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\Delta. \tag{14}$$

12. Le precedenti relazioni sono sufficienti a determinare gli angoli diedri di tutti i poliedri regolari e di tutti i semiregolari, tranne quelli già ricordati al principio dell'articolo precedente. Per il *cubo simo* e *dodecaedro simo* non si può che ricorrere alle formule generali (4), (5), (6) l'uso delle quali importa un calcolo alquanto lungo. Pel *cubo simo* la prima delle (4) diviene $4x_3 + x_4 = 360^\circ$ dalla quale e per mezzo dell'altra relazione $\dfrac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_4} = \dfrac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_3}$ che si deduce dalle seconde della (4), si ottiene

$$\left(\frac{1}{\cos x_3}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{\cos x_3}\right) - 4 = 0. \tag{16}$$

Risolvendo questa equazione del 3° grado riguardando come incognita $\left(\dfrac{1}{\cos x_3}\right)$, si viene a conoscere x_3, e dopo ciò è facile determinare il valore di x_4, e quindi quello di λ per mezzo della relazione $\cos\frac{1}{2}\lambda = \dfrac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x_3}$.

Conosciuto λ, si determina poi δ^{33}_{cs} e δ^{34}_{cs} per mezzo della (6) facendovi successivamente $l_n = l_n = 3$, poscia $l_m = 3$; $l_m = 4$.

13. Pel *dodecaedro simo* si segue un procedimento analogo, solamente che l'equazione del 3° grado data sopra diviene ora

$$M^2\left(\frac{1}{\cos x_3}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{\cos x_3}\right) - 8 = 0 \tag{17}$$

ove

$$M = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 60^\circ};$$

si procede poi nello stesso modo per determinare x_5 e λ, e quindi δ^{33}_{ds} e δ^{35}_{ds}.

14. Pei *prismi* abbiamo in generale:

$$\delta^{n4}_{pn} = 90^\circ\ ,\ \delta^{44}_{pn} = \frac{180(n-2)}{n}. \tag{18}$$

Pei *prismi storti* si potrebbe fare uso delle medesime formule generali (4), (5), (6), ma è più semplice servirci del metodo speciale seguente: L'angolo diedro δ^{n3}_{psn} è uguale al supplemento dell'angolo acuto di un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è altezza di un triangolo equilatero di lato l, e il cateto adiacente a quell'angolo, è la differenza fra i raggi dei circoli circoscritti ed iscritto al poligono regolare di n lati, e di lato eguale ad l. Abbiamo quindi in generale

$$\cos\delta^{n3}_{psn} = -\frac{\operatorname{tg}\dfrac{90}{n}}{\sqrt{3}} = -\frac{\operatorname{tg}\dfrac{90}{n}}{2\cos 30^\circ}. \tag{19}$$

Per la determinazione del δ^{33}_{psn} si consideri il triedro di cui i 3 spigoli sono rappresentati da una costola comune alle due faccie triangolari, da un'altezza di una faccia triangolare e dall' altezza del prisma storto, partenti, tutte queste tre linee, da uno stesso vertice di una delle basi, per cadere sull'altra base. Il diedro di questo triedro che ha per spigolo l'altezza del triangolo equilatero è retto, e quello che ha per spigolo la costola del poliedro è un certo angolo β tale che

$$(20) \qquad \delta^{33}_{psn} = 180 - 2\beta$$

e quindi applicando a quel triedro rettangolo le note formule dei triangoli sferici rettangoli abbiamo

$$(21) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\, \delta^{33}_{psn} = \operatorname{sen} \beta = \frac{\cos \dfrac{180(n-2)}{2n}}{\cos 30^\circ} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{90}{n}}{\cos 30^\circ}.$$

15. In base a quanto precede diamo qui appresso la tabella dei corpi regolari e semiregolari (fra i quali debbono essere scelti gli elementi per costituire le diverse reti poliedrali) insieme ai valori degli angoli diedri corrispondenti.

Per questa tabella bastano poche spiegazioni. Nella prima colonna vi è la notazione simbolica dei varî poliedri; nella colonna intestata *angoloidi*, i primi numeri coll' indice esprimono rispettivamente il numero e l'ordine (comune a tutti) degli angoloidi che costituiscono il corpo; i numeri seguenti fra parentesi coi relativi indici, esprimono i numeri e l'ordine delle diverse faccie che costituiscono i singoli angoloidi. La colonna intestata *faccie* contiene il numero e l'ordine corrispondente delle faccie che formano l' intero corpo.

Così, ad esempio, pel *Rombicosidodecaedro* (*r i d*) si ricava che esso è costituito da 60 angoloidi tetraedrici, formati ciascuno dal concorso di una faccia triangolare, due quadrangolari e una pentagonale; lo stesso corpo contiene 20 faccie triangolari, 12 pentagonali, 30 quadrangolari; il numero delle costole è 120. L' ultima colonna contiene la indicazione delle formule da cui sono stati dedotti i valori degli angoli diedro del poliedro e i valori speciali che in alcune di quelle formule vi hanno preso le lettere.

Dei prismi e prismi storti abbiamo considerati solamente quelli che, come diremo al n. 24, non possono escludersi a priori come facenti parte di reti poliedrali.

POLIEDRI		ELEMENTI DEL POLIEDRO			ANGOLI DIEDRI	
Simboli	Nome	Angoloidi	Faccie	Costole	Valori	Riferimenti
t	Tetraedro	$4_3(3_3)$	4_3	6	$\delta_t = 70°\,31'\,43''\,,\,624$	8')
c	Cubo	$8_3(3_4)$	6_4	12	$\delta_c = 90$	7) ; $s=3$, $l=4$; 8)
o	Ottaedro	$6_4(4_3)$	8_3	12	$\delta_o = 109\ 28\ 16\ ,\ 376$	8')
					[illegible] , 700	
ps_5	Prismi storti a base pentagonale	$10_4(3_3\,,1_5)$	$2_5\,,10_3$	20	$\delta^{35}_{ps5} = 100\ 48\ 44\ ,\ 341$	19), 20), 21)
					$\delta^{33}_{ps5} = 138\ 11\ 22\ ,\ 866$	
ps_6	Prismi storti a base esagonale.	$12_4(3_3\,,1_6)$	$2_6\,,12_3$	24	$\delta^{36}_{ps6} = 98\ 54\ 57\ ,\ 944$	
					$\delta^{33}_{ps6} = 145\ 13\ 18\ ,\ 986$	
ps_8	Prismi storti a base ottoganale	$16_4(3_3\,,1_8)$	$2_8\,,16_3$	32	$\delta^{38}_{ps8} = 96\ 35\ 40\ ,\ 284$	
					$\delta^{33}_{ps8} = 153\ 57\ 47\ ,\ 572$	
ps_{10}	Prismi storti a base decagonale	$20_4(3_3\,,1_{10})$	$2_{10}\,,20_3$	40	$\delta^{3\,10}_{ps10} = 95\ 14\ 44\ ,\ 915$	
					$\delta^{33}_{ps10} = 159\ 11\ 09\ ,\ 678$	

δ^{44}_{p3}	$60^{\circ} = a = \frac{2}{3}$
$\delta_t = \delta^{66}_{tt}$	$70^{\circ}\,31'\,43'',\ 624 = b$
$\delta_c = \delta^{n4}_{pn} = \delta^{88}_{ct}$	$90 = c = 1$
$\delta^{103}_{ps\,10}$	$95\ 14\ 47\ ,\ 915 = d$
$\delta^{83}_{ps\,8}$	$96\ 35\ 40\ ,\ 284 = e$
$\delta^{63}_{ps\,6}$	$98\ 54\ 57\ ,\ 944 = f$
$\delta^{53}_{ps\,5}$	$100\ 48\ 44\ ,\ 341 = g$
$\delta^{43}_{ps\,4}$	$103\ 50\ 11\ ,\ 350 = h$
δ^{44}_{p5}	$108 = i = \frac{6}{5}$
$\delta_o = \delta^{66}_{ot} = \delta^{36}_{tt} = \delta^{33}_{ps\,3}$	$109\ 28\ 16\ ,\ 376 = j = 2 - b$
$\delta_d = \delta^{10\,10}_{dt}$	$116\ 33\ 54\ ,\ 184 = k$
δ^{44}_{p6}	$120 = l = \frac{4}{3}$
$\delta^{43}_{co} = \delta^{83}_{ct} = \delta^{64}_{ot} = \delta^{86}_{cot}$	$125\ 15\ 51\ ,\ 812 = m = 1 + \frac{1}{2}\,b$
$\delta^{33}_{ps\,4}$	$127\ 38\ 05\ ,\ 760 = n$
$\delta^{44}_{rco} = \delta^{48}_{cot} = \delta^{44}_{p8}$	$135 = o = \frac{3}{2}$
$\delta_i = \delta^{66}_{it} = \delta^{33}_{ps\,5}$	$138\ 11\ 22\ ,\ 866 = p$
$\delta^{35}_{id} = \delta^{3\,10}_{dt} = \delta^{56}_{it} = \delta^{6\,10}_{idt}$	$142\ 37\ 21\ ,\ 475 = q$
δ^{34}_{cs}	$142\ 59\ 00\ ,\ 093 = r$
$\delta^{44}_{p\,10}$	$144 = s = \frac{8}{5}$
$\delta^{34}_{rco} = \delta^{46}_{cot}$	$144\ 44\ 08\ ,\ 188 = t = 2 - \frac{1}{2}\,b$
$\delta^{33}_{ps\,6}$	$145\ 13\ 18\ ,\ 986 = u$
$\delta^{45}_{rid} = \delta^{4\,10}_{idt}$	$148\ 16\ 57\ ,\ 092 = v = 1 + \frac{1}{2}\,k$
δ^{35}_{ds}	$152\ 55\ 53\ ,\ 600 = w$
δ^{33}_{cs}	$153\ 14\ 04\ ,\ 340 = A$
$\delta^{33}_{ps\,8}$	$153\ 57\ 44\ ,\ 572 = B$
$\delta^{34}_{rid} = \delta^{64}_{idt}$	$159\ 05\ 41\ ,\ 433 = C = 1 + \frac{1}{2}\,p$
$\delta^{33}_{ps\,10}$	$159\ 11\ 09\ ,\ 678 = D$
δ^{33}_{ds}	$164\ 10\ 31\ ,\ 322 = E$

16. Nel quadro qui a tergo sono raccolti tutti i differenti valori, ricavati dalla precedente tabella, degli angoli diedri appartenenti ai diversi poliedri regolari e semiregolari e ai prismi e prismi storti con basi di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati.

Tali valori sono disposti per ordine crescente di grandezza; ognuno di essi è poi indicato con una lettera speciale per potere più facilmente mettere in evidenza le relazioni che passano fra di loro, e per rendere più semplice le ricerche che dovremo fare tra poco. Le espressioni numeriche di questa colonna rappresentano i valori degli angoli diedri in angoli retti.

17. Venendo ora alla determinazione delle reti poliedrali, in conformità di quanto è stato detto al n. 7, divideremo la ricerca in 5 casi distinti, determinando successivamente le reti che sono composte,

1°. Unicamente di prismi,
2°. » » prismi storti,
3°. » » prismi e di prismi storti,
4°. Di prismi e prismi storti insieme a poliedri regolari e semiregolari ordinari,
5°. Unicamente di poliedri regolari e semiregolari ordinarî.

1°. Reti poliedrali di prismi.

18. È chiaro che i prismi semiregolari, essendo tutti della medesima altezza e formati lateralmente da faccie quadrate eguali, non possono che associarsi l'uno di seguito all'altro in modo da formare tanti strati sovrapposti ognuno dei quali ha un'altezza eguale alla costola del solido; i varî piani di separazione degli strati appariranno perciò divisi in poligoni o, in altre parole, essi piani porteranno la traccia di una stessa rete piana regolare o semiregolare. Conseguentemente quante saranno queste reti piane, tanti saranno i modi differenti di riempire lo spazio con prismi semiregolari.

Ricordando quindi tutte le soluzioni trovate (n. 2 e 3) per le reti del piano, possiamo dire che esistono 10 reti composte di prismi a base,

1ª esagonali,
2ª quadrangolari e ottagonali,
3ª dodecagonali e triangolari,
4ª quadrangolari, esagonali e dodecagonali,
5ª quadrangolari,
6ª triangolari ed esagonali,
7ª triangolari, quadrangolari ed esagonali,
8ª triangolari ed esagonali,
9ª triangolari e quadrangolari,
9ª' triangolari e quadrangolari (varietà della precedente),
10ª triangolari.

19. Uno strato compreso fra due semipiani paralleli, di cui la *striscia* che lo termina è divisa in quadrati, può considerarsi come un prisma semiregolare colla

base di un numero infinito di lati. Con questi prismi, che noteremo con $p\infty$, può formarsi una 11ª rete poliedrale che è la corrispondente di quella piana considerata alla fine del n. 4. Questa 11ª rete risulta perciò formata da due pile indefinite di tali prismi, le quali combaciano fra di loro per mezzo di una rete piana di quadrati.

20. I risultati del n. 18 suggeriscono altre forme speciali di reti. Infatti una superficie prismatica regolare indefinita di n faccie, che noteremo con P_n, può riguardarsi come un poliedro regolare di n faccie regolari (bilatere) e di due angoloidi regolari n spigoli posti a distanza infinita. Ora se le varie pile indefinite di prismi dello stesso ordine che costituiscono le reti considerate al n. 18 si riguardano come altrettanti prismi indefiniti, o, ciò che è lo stesso, se in corrispondenza dei poligoni delle reti piane date al n. 2, si costruisce un prisma indefinito, si vengono ad ottenere altrettante reti dello spazio costituito da queste forme speciali di corpi regolari.

Come caso speciale di questa classe di reti possiamo dire che da un piano diviso in strisce possiamo dedurre, per lo spazio, una rete costituita da due prismi indefiniti di un numero infinito di faccie. Tale rete può essere dedotta in modo analogo alle precedenti, dalla rete piana correlativa considerata alla fine del n. 4, o dalla rete poliedrale del n. 19. È poi chiaro che tutti questi prismi indefiniti non possono formare delle reti altro che fra di loro, vale a dire non possono entrare in combinazione con altri corpi regolari e semiregolari per formare delle reti poliedrali.

20[bis]. Una terza serie di reti poliedrali si ottiene osservando che i reticolati piani del n. 2 possono considerarsi come corpi semiregolari di un numero infinito di faccie, per cui possiamo immaginare nello spazio altre 10 reti ed una varietà, composte ciascuna di una coppia di tali corpi, i quali combaciano fra loro per mezzo della stessa rete piana che li limita tutti e due. La rete piana 11ª dà luogo, in modo analogo, ad una rete dello spazio composto di due soli corpi aventi ciascuno due sole faccie di un numero infinito di lati.

2°. Reti di prismi storti.

21. I prismi storti semiregolari di ordine differente, ma con spigoli di eguale lunghezza, non hanno la stessa altezza, perchè questa risulta tanto più grande, quanto più grande è il numero dei lati della base. Segue di qui che con prismi storti di differente ordine non è possibile alcuna rete formata di aggruppamenti a strati come pel caso di prismi semiregolari. D'altra parte indipendentemente da questa considerazione, è chiaro che qualunque sieno i poliedri storti da aggregarsi fra di loro, deve sempre risultare, da tali aggruppamenti, il combaciamento di faccie triangolari dei diversi prismi. Ora mettendo in coincidenza due di tali facce, le due basi dei prismi storti vengono a formare tra di loro un angolo diedro convesso nel quale non è possibile incastonare nè uno nè due diedri di due altri solidi delle stesse specie. Infatti l'angolo alla base del prisma storto varia da un massimo di 109°28′16″,376 (ottaedro regolare) ad un minimo di 90° che corrisponde al caso limite del prisma storto con base di un numero infinito di lati. Sicchè in generale tale angolo può essere espresso da $90 + \alpha$ con

$$0 \leq \alpha \leq 19°28'16'',394.$$

Ora è chiaro che 3 qualunque di questi angoli diedri non arrivano a 360°, mentre 4 superano questo valore.

Sicchè si deve concludere che con soli prismi storti non è possibile alcuna rete poliedrale.

22. Possiamo però considerare il seguente caso speciale: Il prisma storto limite, al quale abbiamo or ora accennato, è analogo al prisma di cui abbiamo parlato al n. 19, colla differenza che la striscia che allora supponemmo divisa in quadrati, in questa è suddivisa invece in triangoli equilateri alternativamente colla base in alto ed in basso. Ora con questi prismi storti speciali, che noteremo con $ps\,\infty$, può formarsi una rete dello spazio, che differisce da quella del n. 19 pel solo fatto che la rete piana di combaciamento è di triangoli equilateri anzichè di quadrati.

3°. Reti poliedrali di prismi e prismi storti.

23. Le cose dette precedentemente sono sufficienti per poter concludere che non possono esistere reti dello spazio formate unicamente di prismi e di prismi storti. Infatti è facile riconoscere che le pile distinte di prismi e di prismi storti o le pile di queste due specie di prismi alternati fra di loro, non possono portarsi a combaciare perchè la somma dei diedri intorno agli spigoli orizzontali dei diversi strati supera 4 diedri retti. Anche qui però possiamo considerare un caso speciale di reti. Infatti le due pile indefinite formate alternativamente coi prismi $p\,\infty$ (n. 19) e $ps\,\infty$ (n. 22), possono venire in coincidenza, e la rete piana di combaciamento (formata di file di quadrati alternate con file di triangoli equilateri con base in alto e in basso alternativamente) non è altro che la varietà 9′ delle reti piane date ai n. 2 e 3.

4°. Reti non formate da soli prismi e prismi storti.

24. In questo caso è facile riconoscere che pile indefinite, alcune di prismi, altre di prismi storti non possono associarsi con poliedri regolari e semiregolari ordinarî per formare una rete dello spazio. Infatti nel caso di pile di prismi, gli altri *poliedri ordinari* dovrebbero aggregarsi ai prismi per mezzo di faccie quadrangolari in modo che la somma degli angoli diedri di questi ultimi risulti eguale a due retti; ora escludendo il caso dei cubi e degli altri prismi, per non ricadere in reti già determinate, si verifica subito, consultando il quadro del n. 16, che i diedri non appartenenti a prismi, alla formazione dei quali prendono parte faccie quadrilateri e cioè gli angoli diedri h, m, o, r, t, v, C non possono essere aggruppati fra di loro in modo da formare un diedro piatto. Parimente nel caso di pile di prismi storti gli altri poliedri dovrebbero aggregarsi ad essi per le faccie triangolari, e quindi escludendo gli ottaedri e gli altri prismi storti per non ricadere nei casi già considerati, si rileva dal medesimo quadro, che i diedri formati da almeno una faccia triangolare i cui valori angolari sono notati con j, m, q, r, t, w, A, C, E non possono essere aggregati fra di loro in modo da dare per somma $180 - 2\alpha$, ove α ha il significato già dichiarato al n. 21. Si può quindi concludere che se esistono reti di cui facciano parte, insieme ai poliedri ordinarî, dei prismi e dei prismi storti, questi non

possono aggregarsi a quelli che per mezzo delle basi e per conseguenza tali basi non possono essere che triangoli pentagoni, esagoni, ottagoni e decagoni.

Esclusi così a priori i prismi e prismi storti che non possono prender parte alla formazione di reti, vediamo fra quelli rimasti, quali altri debbono essere esclusi.

25. Cominciando dai prismi si consideri in generale il $p\,n$, ove n può prendere i valori 3, 5, 6, 8, 10, e portiamo poi la base a combaciare con quella delle faccie degli angoli diedri δ, registrati nel quadro del n. 16, che è formato da n lati escludendo, s'intende, quegli angoli diedri che appartengono ai soli prismi o prismi storti; dopo ciò l'angolo diedro $360° - (90° + \delta) = 270° - \delta$ che rimane scoperto, deve potersi completare con uno o due triedri di altri solidi semiregolari. Facendo ora tutte le necessarie prove (il numero delle quali viene del resto ridotto coll'osservare che in questi ultimi poliedri vi devono comparire faccie o quadrilatere od n-latere) si trova che solamente il prisma a base ottagonale (p 8) può prender parte alla costituzione di reti. Per questo solido si trova infatti che esso può aggrupparsi con altri regolari e semiregolari in modo da completare un giro; tali aggruppamenti sono:

1 $(\delta^{48}_{p8}\,\delta^{88}_{ct}\;\;\delta^{84}_{p8}\,\delta^{44}_{c})$ 2 $(\delta^{48}_{p8}\,\delta^{83}_{ct}\;\;\delta^{88}_{ct}\,\delta^{84}_{p8})$

3 $(\delta^{44}_{p8}\,\delta^{44}_{rco}\,\delta^{44}_{c})$ 4 $(\delta^{84}_{p8}\,\delta^{44}_{rco}\,\delta^{4\,8}_{cot})$

5 $(\delta^{84}_{p8}\,\delta^{44}_{p8}\;\;\delta^{48}_{cot})$ 6 $(\delta^{48}_{p8}\,\delta^{83}_{ct}\;\;\delta^{34}_{rco})$

7 $(\delta^{48}_{p8}\,\delta^{86}_{cot}\,\delta^{84}_{cot})$

Si hanno così complessivamente sette aggruppamenti possibili fra i diedri del prisma ottagono e i poliedri regolari e semiregolari in modo da formare 4 angoli diedri retti.

26. Ora è necessario vedere a quante reti di poliedri possono effettivamente dar luogo questi aggruppamenti. A tale scopo si osservi che i due estremi dell'asse (spigolo della rete) di ognuno dei giri trovati, per es. di un giro che chiameremo G, è vertice V di una stella S della rete, nel quale vertice concorrono altri giri che contengono due diedri appartenenti a due determinati solidi che prendono parte alla formazione di G; dovremo quindi cercare fra gli altri aggruppamenti, se esistono, quelli in cui due diedri sono gli stessi di quelli di G. Si ripete la stessa operazione per tutti gli altri giri che concorrono in V, e quando per ciascuno siamo sicuri dell'esistenza del giro di diedri, potremo asserire che esiste la rete di poliedri formata di stelle identiche ad S. Ripetendo la stessa cosa per gli aggruppamenti rimanenti si vengono a determinare tutte le reti possibili.

27. Tenuto conto della considerazione precedente è facile riconoscere che le soluzioni ottenute danno luogo alle due reti seguenti:

1ª (1-3-6) 2ª (5-7);

in questa notazione i numeri fra parentesi si riferiscono al numero d'ordine dei giri di diedri trovati al n. 25. Si osservi che i giri 2 e 4 debbono essere esclusi, perchè ad ognuno di essi non sono associabili altri giri secondo la condizione espressa nel numero precedente.

28. Per la ricerca delle reti contenenti prismi storti pei quali la base n (escludendo il caso di $n = 3$ che corrisponde all'ottaedro regolare) può assumere il valore

4, 5, 6, 8, 10, si procede nel modo stesso indicato al n. 25, e si trova l'unico giro di diedri $(\delta^{85}_{pos}\,\delta^{55}_{id}\,\delta_d)$ il quale, peraltro, non corrisponde ad alcuna rete di quelle cercate, perchè per essa non sono soddisfatte le condizioni espresse al n. 26.

5°. Reti di poliedri regolari e semiregolari.

29. Ci rimangono ora da trovare le reti di poliedri regolari e semiregolari che non sono prismi nè prismi storti. Per la determinazione di tutti i giri di diedri, scelti in modo convenientemente fra i valori $b, c, j, k, m, o, p, q, r, t, v, w$, A, C, E del quadro dato al n. 16, dovremo risolvere in numeri interi e positivi l'equazione:

$$bx_b + cx_c + jx_j + \cdots + \mathrm{A}x_{\mathrm{A}} + \mathrm{C}x_{\mathrm{C}} + \mathrm{E}x_{\mathrm{E}} = 360°.$$

Ma prendendo per unità l'angolo retto e tenendo conto delle espressioni che per alcuni diedri si hanno nell'ultima colonna del quadro predetto, la equazione precedente può essere ridotta all'altra:

$$\begin{aligned}[b(2x_b - 2x_j + x_m - x_t) + k(2x_k + x_v) + p(2x_p + x_{\mathrm{C}}) + \\ + 2qx_q + 2rx_r + 2wx_w + 2\mathrm{A}x_{\mathrm{A}} + 2\mathrm{E}x_{\mathrm{E}}] + \\ + [2x_c + 3x_o + 4x_j + 2x_m + 4x_t + 2x_v + 2x_{\mathrm{C}}] = 8.\end{aligned}$$

Ora poichè la parte racchiusa nella 2ª parentesi [ ] dà sempre luogo ad un numero intero, altrettanto deve accadere della prima; ma formando la tabella di tutti i multipli, inferiori ad 8, ossia a 720°, degli angoli b, k, p $2q$, $2r$, $2w$, 2A, 2E e combinandoli poi fra di loro in tutti i modi possibili, sempre però colla condizione di avere una somma non superiore a 720°, si verifica facilmente che niuno di questi aggruppamenti risulta eguale ad un numero intero di angoli retti; ciò porta a concludere che le espressioni in x che moltiplicano b, k, p ecc. che compariscono nella prima parentesi [ ] della equazione, debbono essere identicamente nulli, e quindi poichè le x debbono essere intere e positive l'equazione stessa dà luogo al seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_b - 2x_j + x_m - x_t = 0 \\ 2x_p + x_{\mathrm{C}} = 0 \\ 2x_c + 3x_o + 4x_j + 2x_m + 4x_t + 2x_v + 2x_{\mathrm{C}} = 8. \end{cases}$$

L'ultima equazione si può anche mettere sotto la forma

$$x_c + 3y_o + 2x_j + x_m + 2x_t + x_v + x_{\mathrm{C}} = 4$$

dopo aver posto $x_o = 2y_o$. La presenza di x_v, x_{C} sta a denotare che in qualche giro di diedri può comparire il *rombicosidodecaedro* o l'*icosidodecaedro tronco*; ora questi due corpi, contenendo rispettivamente faccie pentagone e decagone, non possono che rispettivamente venire a combaciare fra di loro perchè il sistema precedente mostra che non vi sono altri poliedri con facce di 5 e 10 lati. D'altra parte essendo $180 - 2v$ e $180 - 2\mathrm{C}$ minore di b che è il più piccolo (n. 16) dei diedri

dei corpi che possono entrare in combinazione, si conclude che non è possibile completare un giro quando di esso fanno parte i due corpi ricordati sopra. Sicchè sopprimendo dalla 2ª equazione e dall'ultima, i termini in x_v ed x_c e aggiungendovi primo membro della prima, il sistema dato sopra si riduce finalmente all'altro assai poi il più semplice:

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} 2x_b - 2x_j + x_m - x_t = 0 \\ (x_c + x_t) + 2(x_b + x_m) + 3y_o = 4. \end{cases}$$

Considerando le espressioni $(x_c + x_t)$, $(x_b + x_m)$ e $y_o = \frac{1}{2} x_o$ come incognite, si hanno le seguenti soluzioni per la 2ª equazione:

	$(x_c + x_t)$	$(x_b + x_m)$	y_o
I	4	0	0
II	2	1	0
III	1	0	1
IV	0	2	0

Dalle quali si deducono per x_c, x_t, x_b, x_m e x_o i seguenti sistemi di valori:

Incognite	I					II						III		IV		
	1	2	3	4	5	1	1′	2	2′	3	3′	1	2	1	2	3
x_c	4	3	2	1	0	2		1		0		1	0	0	0	0
x_t	0	1	2	3	4	0		1		2		0	1	0	0	0
x_b	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	2	1	0
x_m	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	2
x_o	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	0	0	0

che sostituiti successivamente nella prima delle (22) danno il mezzo di determinare i valori corrispondenti di x_j.

Dopo ciò si trova che le soluzioni accettabili pel sistema (22) e cioè quelle che corrispondono a valori interi e positivi per tutte le x sono indicate dal quadro seguente:

	x_b	x_c	x_j	x_m	x_o	x_t
(I_1)	0	4	0	0	0	0
(II_1)	1	2	1	0	0	0
(II_2')	0	1	0	1	0	1
(II_2)	1	0	0	0	0	2
(III_1)	0	1	0	0	2	0
(IV_1)	2	0	2	0	0	0
(IV_2)	0	0	1	2	0	0

30. **Questi** sistemi di valori rappresentano i coefficienti degli angoli b, c, j, m, o, t i quali possono essere sostituiti dalle varie δ che vi corrispondono nel quadro del n. 16 escluse, s'intende, le δ dei *prismi* per non ricadere in casi già considerati. Si può quindi formare la tabella seguente:

(I_1)	I	$4c$	4	$\delta_c\ \delta_{ct}^{88}$	—	—	—	—
(II_1)	II	$2c\ 1b\ 1j$	2	$\delta_c\ \delta_{ct}^{88}$	1	$\delta_t\ \delta_{tt}^{66}$	1	$\delta_o\ \delta_{ot}^{66}\ \delta_{tt}^{36}$
(III_1)	III	$1c\ 2o$	1	$\delta_c\ \delta_{ct}^{88}$	2	$\delta_{rco}^{44}\ \delta_{cot}^{48}$	—	—
($II_{2'}$)	IV	$1c\ 1m\ 1t$	1	$\delta_c\ \delta_{ct}^{88}$	1	$\delta_{co}^{43}\ \delta_{ct}^{83}\ \delta_{ot}^{64}\ \delta_{cot}^{36}$	1	$\delta_{rco}^{34}\ \delta_{cot}^{46}$
(IV_1)	V	$2b\ 2j$	2	$\delta_t\ \delta_{tt}^{66}$	2	$\delta_o\ \delta_{tt}^{36}\ \delta_{ot}^{66}$	—	—
(II_3)	VI	$1b\ 2t$	1	$\delta_t\ \delta_{tt}^{66}$	2	$\delta_{rco}^{34}\ \delta_{cot}^{46}$	—	—
(IV_2)	VII	$1j\ 2m$	1	$\delta_o\ \delta_{ot}^{66}\ \delta_{tt}^{36}$	2	$\delta_{co}^{43}\ \delta_{ct}^{83}\ \delta_{ot}^{64}\ \delta_{cot}^{86}$	—	—

La prima parte di questo quadro contiene tutte le soluzioni trovate; le colonne successive portano i diedri dei poliedri regolari e semiregolari da prendersi in numero eguale ai coefficienti scritti nelle piccole colonne.

Dal quadro precedente si rileva quali sieno i diedri che debbono essere associati tra di loro per poter formare un angolo. Ma siccome per ogni valore si hanno più diedri appartenenti ai poliedri differenti, così dovremmo fare le combinazioni in tutti i modi possibili di questi diedri. Bisogna però osservare che non tutti gli aggruppamenti così ottenuti corrispondono a delle reti, giacchè i diedri da associarsi debbono essere formati da faccie tali da rendere possibile il combaciamento fra di loro.

Così per esempio, se tre angoli diedri dei poliedri formano un giro succedendosi nell'ordine $(\widehat{\alpha\beta}), (\widehat{\gamma\delta}), (\widehat{\varepsilon\varphi})$ è necessario che le faccie siano due a due eguali e cioè $\beta = \gamma, \delta = \varepsilon, \varphi = \alpha$. Parimente pel caso di quattro diedri si deve avere $(\widehat{\alpha\beta}), (\widehat{\beta\gamma})$, $(\widehat{\gamma\delta}), (\widehat{\delta\varepsilon})$.

Si deve notare inoltre che per ogni giro, debbono anche considerarsi tutte le possibili *varietà* che risultano dal differente ordine di aggregazione dei diedri medesimi. Tali varietà saranno distinte coll'apporre un apice al numero d'ordine progressivo dei diversi giri ottenuti.

31. Tenendo presenti le osservazioni ora fatte ecco qui appresso tutti gli aggruppamenti possibili fra i quali non è stato considerato quello di $4\delta_c$ corrispondente alla rete già trovata di cubi (n. 18, 5ª)

I

1 $(\delta_{ct}^{88}\ \delta_{ct}^{88}\ \delta_{ct}^{88}\ \delta_{ct}^{88})$

II

Nessuno aggruppamento possibile.

III

1 $(\delta_c \, \delta^{44}_{rco} \, \delta^{44}_{rco})$ 2 $(\delta_c \, \delta^{48}_{cot} \, \delta^{84}_{cot})$ 3 $(\delta^{33}_{ct} \, \delta^{64}_{cot} \, \delta^{48}_{cot})$

IV

1 $(\delta_c \, \delta^{43}_{co} \, \delta^{34}_{rco})$ 2 $(\delta_c \, \delta^{46}_{ot} \, \delta^{64}_{cot})$

V

1 $(\delta_t \, \delta_o \, \delta_t \, \delta_o)$ 1′ $(\delta_t \, \delta_t \, \delta_o \, \delta_o)$ 2 $(\delta_t \, \delta_t \, \delta^{36}_{tt} \, \delta^{63}_{tt})$

3 $(\delta_t \, \delta^{36}_{tt} \, \delta^{36}_{tt} \, \delta^{63}_{tt})$ 4 $(\delta^{66}_{tt} \, \delta^{66}_{ot} \, \delta^{66}_{tt} \, \delta^{66}_{ot})$ 4′ $(\delta^{66}_{tt} \, \delta^{66}_{tt} \, \delta^{66}_{ot} \, \delta^{66}_{ot})$

5 $(\delta^{66}_{tt} \, \delta^{66}_{tt} \, \delta^{63}_{tt} \, \delta^{36}_{tt})$

VI

1 $(\delta_t \, \delta^{34}_{rco} \, \delta^{43}_{rco})$ 2 $(\delta^{66}_{tt} \, \delta^{64}_{cot} \, \delta^{46}_{cot})$

VII

1 $(\delta_o \, \delta^{34}_{co} \, \delta^{43}_{co})$ 2 $(\delta_o \, \delta^{33}_{ct} \, \delta^{63}_{ct})$ 3 $(\delta^{66}_{ot} \, \delta^{64}_{ot} \, \delta^{46}_{ot})$

4 $(\delta^{66}_{ot} \, \delta^{68}_{cot} \, \delta_{cot})$ 5 $(\delta^{36}_{tt} \, \delta^{64}_{ot} \, \delta^{43}_{co})$ 6 $(\delta^{36}_{tt} \, \delta^{66}_{cot} \, \delta^{63}_{ct})$

32. Tenendo ora presente quanto è stato detto al n. 26, abbiamo le seguenti 11 notazioni simboliche corrispondenti ad altrettante reti di poliedri regolari e semi-regolari:

1	S_6 ..... $(2\,III_2 - 4\,IV_1)$
2	S_4 ..... $(1\,III_2 - 1\,VII_4 - 2\,IV_2)$
3	S_4 ..... $(1\,III_3 - 1\,VI_2 - 2\,VII_6)$
4	S_{12} ..... $(12\,V_1)$
4′	S_{12} ..... $(6\,V_1 - 6\,V_{1'})$
5	S_6 ..... $(6\,V_3)$
5′	S_6 ..... $(2\,V_2 - 2\,V_3 - 2\,V_5)$
6	S_5 ..... $(1\,V^4 - 4\,VII_5)$
7	S_6 ..... $(3\,VI_1 - 3\,III_1)$
8	S_8 ..... $(8\,VII_1)$
9	S_5 ..... $(4\,VII_2 - 1\,I_1)$
10	S^4 ..... $(4\,VII_3)$

Nel quadro precedente si è dato un numero d'ordine a ciascuna rete; le S sono il simbolo di *stella* e l'indice corrispondente esprime l'ordine (rappresentato dal numero di spigoli concorrenti in ogni vertice) delle stelle stesse; le espressioni fra parentesi stanno ad indicare la specie ed il numero corrispondente dei varî giri di diedri che formano ciascuna stella; così ad esempio: la rete 2 è formata di stelle del 4° ordine; dei 4 spigoli che concorrono in ciascun vertice, uno è asse del giro di diedri III_2, uno del giro di diedri VII_4 e due del giro di diedri IV_2 (n. 31).

Si può osservare che il giro di diedri $V_{4'}$ della tabella del n. 31, non può appartenere ad alcuna rete di poliedri, per la ragione che (n. 26) gli altri giri di diedri, che insieme al $V_{4'}$ dovrebbero concorrere in uno stesso vertice della rete, non rientrano in quelli rimanenti della tabella stessa.

33. Raccogliendo tutti i risultati sin qui ottenuti, si può asserire che si hanno le seguenti classi di reti poliedrali:

1^a_a. 10 reti di prismi regolari con una varietà (n. 18) ed una rete speciale di due serie di prismi le cui basi hanno un numero infinito di lati (n. 19);

1^a_b. 10 reti di solidi prismatici regolari indefiniti con una varietà, ed una rete speciale di due solidi prismatici di un numero infinito di faccie (n. 20);

1^a_c. 10 reti ed una varietà, composte ciascuna di due poliedri semiregolari di un numero infinito di faccie, ed una rete speciale di due corpi limitati ciascuno da due faccie di un numero infinito di lati (n. 20^{bis});

2^a. Una rete di due pile di prismi storti aventi le basi di un numero infinito di lati (n. 22);

3^a. Una rete di due serie di corpi formate ciascuna da prismi e prismi storti alternati aventi tutti le basi di un numero infinito di lati (n. 23);

4^a. Due reti non formate da soli prismi (n. 27);

5^a. 10 reti e due varietà costituite da poliedri regolari e semiregolari.

Dopo aver fatta nuovamente la determinazione di queste reti col 2° metodo che ora esporremo, daremo una classificazione più dettagliata delle reti stesse (n. 45).

II. Metodo. *Determinazione delle reti per mezzo della considerazione degli angoli solidi dei poliedri.*

34. Per questa ricerca è necessario anzitutto determinare il valore σ dell'angolo solido di ognuno dei poliedri regolari, per mezzo della formula

$$\sigma = D - 2(s - 2)$$

nella quale s rappresenta l'ordine dell'angoloide e D la somma degli angoli diedri che li formano, la quale somma si ottiene, per ogni corpo, addizionando gli angoli diedri corrispondenti forniti dal quadro del n. 16.

Il quadro che segue dà il valore di σ per ogni poliedro regolare e semiregolare. La 2^a colonna contiene la indicazione dell'ordine dell'angoloide e quello delle singole faccie del poliedro che lo costituiscono. L'ultima colonna infine contiene, sotto forma letterale o numerica, l'espressione degli angoli solidi dei varî corpi; le δ di questa colonna hanno i valori dati alla tabella del n. 20 ed i numeri fra parentesi esprimono, al solito, il valore dell'angolo solido in triedri trirettangoli.

POLIEDRI		Ordine dell'angolo solido e delle faccie che lo formano	Valore dell'angolo solido	
Simbolo	Nome		Espressione numerica	Espress. letterale
t	Tetraedro	(333)	$\sigma_t = 81^\circ\, 35'\, 10'', 872$	$3\delta_t - 2$
c	Cubo	(444)	$\sigma_c = 90$	$R = (1)$
o	Ottaedro	(3333)	$\sigma_o = 77\ 53\ 05, 604$	$4 - 4\delta_t$
d	Dodecaedro	(555)	$\sigma_d = 169\ 41\ 42, 552$	$3\delta_d - 2$
i	Icosaedro	(33333)	$\sigma_i = 150\ 56\ 54, 300$	$5\delta_i - 6$
tt	Tetraedro tronco . . .	(366)	$\sigma_{tt} = 109\ 28\ 16, 376$	$2 - \delta_t$
ct	Cubo » . . .	(388)	$\sigma_{ct} = 160\ 31\ 43, 624$	$1 + \delta_t$
ot	Ottaedro » . . .	(466)	$\sigma_{ot} = 180$	$2R = (2)$
dt	Dodecaedro » . . .	(3 10 10)	$\sigma_{dt} = 221\ 48\ 37, 134$	$2\delta^{35}_{id} + \delta_d - 2$
it	Icosaedro » . . .	(566)	$\sigma_{it} = 248\ 26\ 05, 816$	$2\delta^{35}_{id} + \delta_i - 2$
co	Cubottaedro	(3434)	$\sigma_{co} = 141\ 03\ 27, 248$	$2\delta_t$
id	Icosidodecaedro. . . .	(3535)	$\sigma_{id} = 210\ 29\ 25, 900$	$4\delta^{35}_{id} - 4$
rco	Rombicubottaedro . . .	(3444)	$\sigma_{rco} = 199\ 28\ 16, 376$	$3 - \delta_t$
rid	Rombicosidodecaedro . .	(3454)	$\sigma_{rid} = 254\ 45\ 17, 050$	$6 - 2\delta^{35}_{id}$
cot	Cubottaedro tronco . .	(468)	$\sigma_{cot} = 225$	$\frac{5}{2}R = (\frac{5}{2})$
idt	Icosidodecaedro tronco .	(4 6 10)	$\sigma_{idt} = 270$	$3R = (3)$
cs	Cubo simo	(33334)	$\sigma_{cs} = 145\ 40\ 13, 206$	—
ds	Dodecaedro simo . . .	(33335)	$\sigma_{ds} = 198\ 23\ 21, 166$	—
p_3	Prismi a base triangolare	(44 *n*)	$\sigma_{p3} = 60$	$\frac{2}{3}R = (\frac{2}{3})$
p_4	quadrangolare . . .		$\sigma_{p4} = 90$	$1R = (1)$
p_5	pentagonale . . .		$\sigma_{p5} = 108$	$\frac{6}{5}R = (\frac{6}{5})$
p_6	esagonale		$\sigma_{p6} = 120$	$\frac{4}{3}R = (\frac{4}{3})$
p_8	ottagonale		$\sigma_{p8} = 135$	$\frac{3}{2}R = (\frac{3}{2})$
p_{10}	decagonale		$\sigma_{p\,10} = 144$	$\frac{8}{5}R = (\frac{8}{5})$
p_{12}	dodecagonale . . .		$\sigma_{p\,12} = 150$	$\frac{5}{3}R = (\frac{5}{3})$
ps_3	Prismi storti a base triangolare	(333 *n*)	$\sigma_{ps3} = 77\ 53\ 05, 576$	—
ps_4	quadrangolare . . .		$\sigma_{ps4} = 94\ 43\ 40, 180$	—
ps_5	pentagonale. . . .		$\sigma_{ps5} = 118\ 00\ 14, 414$	—
ps_6	esagonale		$\sigma_{ps6} = 128\ 16\ 33, 960$	—
ps_8	ottagonale		$\sigma_{ps8} = 141\ 06\ 49, 712$	—
ps_{10}	decagonale		$\sigma_{ps\,10} = 148\ 51\ 55, 186$	—
ps_{12}	dodecagonale . . .		$\sigma_{ps\,12} = 154\ 01\ 06, 688$	—

35. Per la risoluzione del problema proposto dovremo cercare le soluzioni dell'equazione

$$\Sigma x_r \sigma_r = 8, \tag{23}$$

dove le x sono numeri incogniti interi e positivi che indicano quante volte il poliedro corrispondente all'angolo solido σ prende parte alla formazione di una stessa stella. Osserveremo subito che fra le condizioni necessarie perchè sia accettabile una soluzione vi è quella che sia sempre pari il numero delle faccie di uno stesso ordine che prendono parte alla costituzione dei varî angoli solidi, separatamente considerati, e che concorrono in una stessa stella.

Questa osservazione ci permetterà, in qualche caso, di escludere subito alcuni corpi che non possono prendere parte alla costituzione di reti poliedrali. È poi sottinteso che nella formazione delle stelle una faccia di un dato ordine deve venire a combaciare con una faccia dello stesso ordine di un altro angolo solido, e che in generale questo aggruppamento può farsi in tanti modi diversi; quante sono le maniere differenti secondo le quali possono associarsi le faccie di un determinato ordine appartenenti a poliedri diversi.

Dopo ciò, venendo alla determinazione di tutte le reti possibili, divideremo la ricerca nel modo già detto al n. 17 per il I metodo.

36. 1° *Reti di soli prismi.* — Per le osservazioni fatte nel n. precedente, i prismi dello stesso ordine debbono tutti combaciare fra di loro per le basi in modo da formare tante pile a prismi regolari indefiniti. Segue di qui che riempire lo spazio di soli prismi semiregolari equivale a riempirlo di quelle pile. Ora è chiaro che ognuna di queste prende parte alla formazione di infinite stelle con un angolo solido che ha un valore doppio di quello dei prismi semiregolari che compongono la pila. L'equazione (23) diviene dunque per queste pile, $\Sigma \frac{x_r(l_r-2)}{l_r} = 2$, ove l_r rappresenta il numero delle faccie laterali dei prismi semiregolari; ma questa equazione è identica alla (1) (n. 2) quindi otterremo per essa tante soluzioni quante sono quelle che corrispondono alle reti piane. Si ritrovano così le reti poliedrali dei nn. 18 e 19, e, quando le pile si considerino come poliedri regolari indefiniti, quelle già determinate al n. 20.

37. 2° *Reti di soli prismi storti.* — Come nel caso precedente, anche pei prismi storti non possono considerarsi che le varie pile indefinite che risultano formate di prismi con base eguale; e quindi anche in questo caso l'angolo solido in ogni vertice assume un valore 2σ, e cioè doppio di quello dei prismi storti componenti la pila. Bisognerà ora vedere con quale di queste si può riempire lo spazio. Intanto per la osservazione già fatta al n. 21 i prismi storti avendo altezze differenti, quando sono di ordine differente, è chiaro che per una stessa rete non possono prendersi in considerazione altro che pile formate tutte da elementi dello stesso ordine e perciò, per la (23), dovremo avere in generale $2m\sigma_{psn} = 720°$, ovvero $m\sigma_{psn} = 360°$. Ora si vede subito che i valori di σ pei prismi storti dati dal quadro del n. 33 non possono soddisfare alla relazione precedente altro che pel prisma storto con base di un numero infinito di lati, nel qual caso si ottiene la rete speciale già trovata al n. 22.

38. 3° *Reti di prismi e prismi storti.* — Con ragionamenti analoghi ai precedenti si trova che in questo caso non possono prendersi in considerazione che pile formate tutte egualmente di prismi e prismi storti dello stesso ordine, e che alla relazione $m(\sigma_{pn} + \sigma_{psn}) = 720$, a cui si riduce la (23) non è possibile soddisfare altro che nel caso di prismi il cui ordine è infinitamente grande, sotto la quale condizione si trova la rete già ottenuta al n. 23.

39. 4° *Reti non formate da soli prismi e prismi storti.* — Per le ricerche relative a questo caso si segue una via perfettamente analoga a quella tenuta al n. 24, ossia si deve riscontrare in quali casi combinando in tutte le maniere possibili i valori delle σ corrispondenti a prismi e prismi storti, con quelle dei varî poliedri ordinari coi quali è compatibile per la forma delle faccie l'aggruppamento, si ottiene per la somma degli angoli solidi il valore di 720°.

Si trova che le soluzioni possibili non sono che le due seguenti:

$$\sigma_c + \sigma_{ct} + 2\sigma_{ps} + \sigma_{rco} = 8$$
$$2\sigma_{cot} + 2\sigma_{ps} = 8$$

le quali corrispondono appunto alle reti già ottenute coll'altro metodo ai nn. 27 e 28.

40. 5° *Reti di poliedri regolari e semiregolari ordinarî.* — Dal quadro del n. 34 si rileva che i valori degli angoli solidi dei varî poliedri regolari e semiregolari possono distinguersi in 4 classi, e cioè:

I. Angoli espressi per un numero intero o per un certo numero di parti aliquote di triedri trirettangoli;

II. Angoli nella espressione dei quali entra il δ_t;
III. Angoli in cui entra il $\delta_i \delta_d \delta_{id}^{35}$;
IV. Angoli solidi distinti dai precedenti.

Bisognerà ora determinare, al solito, tutti i possibili aggruppamenti di questi angoli solidi in modo da soddisfare alla equazione (23) $\Sigma x_r \sigma_r = 8$, e per una tale risoluzione esamineremo successivamente i seguenti casi di reti formate di poliedri i cui angoli solidi appartengono:

1° in tutto o in parte a quelli della classe IV;

2° in tutto o in parte a quelli della classe III senza che ve ne siano di quelli appartenenti alla classe IV;

3° solamente alle due classi I, II.

41. *1° Caso.* Questo caso si riferisce a quello in cui fra i poliedri della rete entrano fra gli altri il *cubo simo* o il *dodecaedro simo*, oppure tutti e due questi corpi.

Ora il valore dell'angolo solido di questi poliedri è tale che essi o i loro multipli associati in tutti i modi possibili fra di loro o coi valori semplici o multipli di tutti gli angoli solidi dei rimanenti poliedri coi quali è possibile l'associazione, non conduce mai, come è necessario, ad un valore esatto di 8 angoli retti. Si può quindi concludere che non esistono reti corrispondenti a questo caso.

42. *3° Caso.* **Per ciascuna stella della rete la somma di tutti gli angoli solidi delle classi I, II e III moltiplicati ciascuno per un conveniente coefficiente x intero o nullo, è data dalla somma delle tre espressioni:**

$$
(24)\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{I}\ldots\ldots[x_c + 2x_{ot} + \frac{5}{2}x_{cot} + 3x_{idt}] \\
\text{II}\ldots\ldots[\delta_t(3x_t - 4x_o - x_{tt} + x_{ct} + 2x_{co} - x_{rco}) + \\
\qquad\qquad + (-2x_t + 4x_o + 2x_{tt} + x_{ct} + 3x_{rco})] \\
\text{III}\ldots \left\{\begin{array}{l}
[\delta_d(3x_d + x_{dt}) + \delta_t(5x_t + x_{tt}) + \\
\qquad + \delta_{id}^{35}(2x_{dt} + 2x_{tt} + 4x_{td} - 2x_{rid})] + \\
+ [-2x_d - 6x_t - 2x_{dt} - 2x_{tt} - 4x_{td} + 6x_{rid}]
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

somma che deve essere eguale ad 8 (720°). Eliminando il determinatore 2, e ricordando che le x hanno valori interi, l'espressione precedente può mettersi sotto la forma

$$X_t\delta_t + X_d\delta_d + X_t\delta_t + X_{td}\delta_{id}^{35} = Y$$

ove tutte le X e la Y hanno solamente valori interi e positivi non escluso per la X_t il valore zero.

Ora riesce facile verificare che i valori di queste δ forniti dal quadro dato al n. 16, sono tali che la somma di essi e dei loro multipli presa in tutti modi possibili non risulta mai eguale ad un multiplo di 90°. Possiamo quindi concludere che anche nel caso ora esaminato non possono esistere reti.

43. *3° Caso.* Veniamo infine ad occuparci delle reti che non contengono che corpi i cui angoli solidi appartengono alla classe I e II. Per questa ricerca dovremo trovare tutte le soluzioni intere e positive della equazione che risulta dall'eguagliare ad 8 la somma delle prime due espressioni (I e II) date al numero precedente. Ora poichè la forma del 1° membro di questa equazione si riduce ad un multiplo di δ_t più un numero intero, e poichè, d'altra parte, non esiste un multiplo di δ_t (compatibili colle soluzioni del problema) che sia eguale ad un numero intero di volte 90° così, per ciò che riguarda la espressione II, dovremo avere:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_t - 4x_o - x_{tt} + x_{ct} + 2x_{co} - x_{rco} = 0 \\ -2x_t + 4x_o + 2x_{tt} + x_{ct} + 3x_{rco} = \text{M} \quad \text{(numero intero)} \end{array}\right.$$

alla quale ultima possiamo anche sostituire l'altra equazione

$$x_t + 0x_o + x_{tt} + 2x_{ct} + 2x_{co} + 2x_{rco} = \text{M}$$

che si ottiene dall'addizione delle due precedenti. La parte (I) rimanente dell'equazione ossia

$$x_c + 2x_{ot} + \tfrac{5}{2}x_{cot} + 3x_{idt} \quad \text{o l'altra} \quad 2x_c + 4x_{ot} + 5x_{cot} + 6x_{idt}$$

deve essere eguale ad un tal numero intero N per cui si abbia $\frac{\text{N}}{2} + \text{M} = 8$.

44. Dopo ciò per trovare tutte le reti corrispondenti a questo caso basterà risolvere il sistema

$$(25)\quad \begin{cases} 3x_t - 4x_o - x_{tt} + x_{ct} + 2x_{co} - x_{rco} = 0 \\ x_t + 0x_o + x_{tt} + 2x_{ct} + 2x_{co} + 2x_{rco} = 0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8 \\ 2x_c + 4x_{ot} + 5x_{cot} + 6x_{tdt} = 16\,,14\,,12\,,10\,,8\,,6\,,4\,,2\,,0 \end{cases}$$

ove i secondi membri delle equazioni 2ª e 3ª prendono successivamente i valori corrispondenti di una medesima colonna.

Escludendo, al solito, le soluzioni che non soddisfano alle osservazioni del n. 35 si ottengono tutte le soluzioni che si trovano riassunte nel quadro seguente:

Numero d'ordine	x_c	x_{ot}	x_{cot}	x_t	x_o	x_{tt}	x_{ct}	x_{co}	x_{rco}
1	2	—	—	—	—	—	—	1	2
2	1	1	2	—	—	—	—	—	—
3	—	—	2	—	—	1	1	—	—
4	—	—	—	8	6	—	—	—	—
4′	—	—	—	8	6	—	—	—	—
5	—	—	—	2	—	6	—	—	—
5′	—	—	—	2	—	6	—	—	—
6	—	2	—	—	—	2	—	1	—
7	1	—	—	1	—	—	—	—	3
8	—	—	—	—	2	—	—	4	—
9	—	—	—	—	1	—	4	—	—
10	—	4	—	—	—	—	—	—	—

Le varietà 4′ e 5′ differiscono rispettivamente dalle 4 e 5 pel solo fatto che nelle prime i tetraedri sono associati in coppie con una faccia in comune, mentre in quest'ultime tali tetraedri si associano in coppie di corpi opposti al vertice.

Anche in questo caso si hanno quindi le stesse 10 soluzioni e le due varietà già ottenute al n. 32, e così complessivamente, abbiamo ritrovato con questo secondo metodo tutte le classi di reti raccolte al n. 33.

45. Si può osservare che i due metodi, considerati l'uno indipendentemente dall'altro, sono sufficienti a determinare completamente le varie reti; tutti e due insieme poi si completano nel senso che il primo fornisce i poliedri che concorrono in ogni costola e il secondo quelli che concorrono in ogni vertice.

Ed ora, prima di passare allo studio delle reti, correlative a quelle determinate fin qui, daremo, raccolte in un quadro, tutte le opportune indicazioni relative al modo secondo il quale sono formate le reti trovate, che distingueremo nelle quattro classi seguenti:

I. *Reti regolari*, formate da poliedri regolari di una sola specie;

II. *Reti semiregolari*, formate da poliedri regolari di più specie;

III. *Reti uniformi*, formate da poliedri semiregolari di una sola specie;

IV. *Reti semiuniformi*, formate da poliedri regolari e semiregolari di più specie.

Avvertiamo poi che diremo *ordine* di un ente geometrico rispetto ad un determinato elemento, il numero totale di tali elementi che prendono parte alla costituzione di quell'ente.

Reti poliedrali

N. d'ordine	Ordine delle stelle rispetto agli angoloidi	Ordine delle stelle rispetto ai fasci	Ordine delle stelle rispetto alle faccie	Richiami e figure
		I. *Reti regolari*		
1	$8\sigma_c$	$6_4(4\delta_c)$	$12f_4$	n. 18 fig. 5*
		II. *Reti semiregolari*		
2	$14\begin{cases}8\sigma_t\\6\sigma_o\end{cases}$	$12_4(\delta_t\,\delta_o\,\delta_t\,\delta_o)$	$24f_3$	» 29-32 » 12
2′	$14\begin{cases}8\sigma_t\\6\sigma_o\end{cases}$	$12_4\begin{cases}6_4(\delta_t\,\delta_o\,\vartheta_t\,\delta_o)\\6_4(2\delta_t\,2\delta_o)\end{cases}$	$24f_3$	» 29-32 » 13
		III. *Reti uniformi*		
3	$4\sigma_{ot}$	$4_3(2\delta^{46}_{ot}\,1\delta^{66}_{ot})$	$6\begin{cases}4f_4\\2f_6\end{cases}$	» 29-32 » 14
4	$12\sigma_{p3}$	$8\begin{cases}6_4(4\delta^{34}_{p3})\\2_6(6\delta^{44}_{p3})\end{cases}$	$18\begin{cases}6f_3\\12f_4\end{cases}$	» 18 » 10*
5	$6\sigma_{p6}$	$5\begin{cases}3_4(4\delta^{64}_{p6})\\2_3(3\delta^{44}_{p6})\end{cases}$	$9\begin{cases}6f_4\\3f_6\end{cases}$	» 18 » 1*
		IV. *Reti semiuniformi*		
6	$6\begin{cases}2\sigma_c\\4\sigma_{p8}\end{cases}$	$5\begin{cases}2_4(2\delta_c\,2\delta^{48}_{p8})\\1_4(4\delta^{48}_{p8})\\2_5(1\delta_c\,4\delta^{44}_{p8})\end{cases}$	$9\begin{cases}7f_4\\2f_8\end{cases}$	» 18 » 2*
7	$6\begin{cases}2\sigma_{p3}\\4\sigma_{p\,12}\end{cases}$	$5\begin{cases}2_3(\delta^{43}_{p3}\,2\delta^{4\,12}_{p\,12})\\1_4(4\delta^{4\,12}_{p\,12})\\2_3(\delta^{44}_{p3}\,2\delta^{44}_{p\,12})\end{cases}$	$9\begin{cases}1f_3\\6f_4\\2f_{12}\end{cases}$	» 18 » 3*
8	$8\begin{cases}4\sigma_{p3}\\4\sigma_{p6}\end{cases}$	$6\begin{cases}4_4(2\delta^{34}_{p3}\,2\delta^{46}_{p6})\\2_4(2\delta^{44}_{p3}\,\delta^{44}_{p6}\,\delta^{44}_{p3}\,\delta^{44}_{p6})\end{cases}$	$12\begin{cases}2f_3\\8f_4\\2f_6\end{cases}$	» 18 » 8*

N. d'ordine	Ordine delle stelle rispetto			Richiami e figure
	agli angoloidi	ai fasci	alle faccie	
		IV. *Reti semiuniformi*		
9	$8 \begin{cases} 2\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \\ 2\sigma_{p6} \end{cases}$	$6 \begin{cases} 2_4(\delta_{p3}^{34}\, 2\delta_{p4}^{44}) \\ 2_4(2\delta_{p6}^{64}\, 2\delta_{p4}^{44}) \\ 2_4(\delta_{p6}^{44}\, \delta_{p4}^{44}\, \delta_{p3}^{44}\, \delta_{p4}^{44}) \end{cases}$	$12 \begin{cases} 10 f_4 \\ 1 f_6 \\ 1 f_3 \end{cases}$	n. 18 fig. 7*
10	$6 \begin{cases} 2\sigma_{p4} \\ 2\sigma_{p6} \\ 2\sigma_{p12} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 1_4(2\delta_{p4}^{44}\, 2\delta_{p6}^{46}) \\ 1_4(2\delta_{p6}^{46}\, 2\delta_{p12}^{4\,12}) \\ 1_4(2\delta_{p4}^{44}\, 2\delta_{p12}^{4\,12}) \\ 2_3(\delta_{p4}^{44}\, \delta_{p6}^{44}\, \delta_{p12}^{44}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 7 f_4 \\ 1 f_6 \\ 1 f_{12} \end{cases}$	» 18 » 4*
11	$10 \begin{cases} 6\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \end{cases}$	$7 \begin{cases} 4_4(2\delta_{p3}^{34}\, 2\delta_{p4}^{44}) \\ 1_4(4\delta_{p3}^{34}) \\ 2_5(2\delta_{p3}^{44}\, \delta_{p4}^{44}\, \delta_{p3}^{44}\, \delta_{p4}^{44}) \end{cases}$	$15 \begin{cases} 12 f_4 \\ 3 f_3 \end{cases}$	» 18 » 9*
11′	$10 \begin{cases} 6\sigma_{p3} \\ 4\sigma_{p4} \end{cases}$	$7 \begin{cases} 2_4(4\delta_{p3}^{34}) \\ 1_4(4\delta_{p4}^{44}) \\ 2_4(2\delta_{p4}^{44}\, 2\delta_{p3}^{34}) \\ 2_5(2\delta_{p4}^{44}\, 3\delta_{p3}^{44}) \end{cases}$	$15 \begin{cases} 12 f_4 \\ 3 f_3 \end{cases}$	» 18 » 9′*
12	$10 \begin{cases} 8\sigma_{p3} \\ 2\sigma_{p6} \end{cases}$	$7 \begin{cases} 3_4(4\delta_{p3}^{34}) \\ 2_4(2\delta_{p3}^{34}\, \delta_{p6}^{46}) \\ 2_5(4\delta_{p3}^{44}\, \delta_{p6}^{44}) \end{cases}$	$15 \begin{cases} 4 f_3 \\ 10 f_4 \\ 1 f_6 \end{cases}$	» 18 » 6*
13	$8 \begin{cases} 2\sigma_t \\ 6\sigma_{tt} \end{cases}$	$6_4(\delta_t\, \delta_{tt}^{36}\, \delta_{tt}^{66}\, \delta_{tt}^{63})$	$12 \begin{cases} 6 f_3 \\ 6 f_6 \end{cases}$	» 29-32 » 15
13′	$8 \begin{cases} 2\sigma_t \\ 2\sigma_{tt} \end{cases}$	$6_4 \begin{cases} 2_4(2\delta_t\, 2\delta_{tt}^{56}) \\ 2_4(\delta_t\, \delta_{tt}^{36}\, \delta_{tt}^{66}\, \delta_{tt}^{63}) \\ 2_4(2\delta_{tt}^{66}\, 2\delta_{tt}^{36}) \end{cases}$	$12 \begin{cases} 6 f_3 \\ 6 f_6 \end{cases}$	» 29-32 » 16

N. d'ordine	Ordine delle stelle rispetto agli angoloidi	Ordine delle stelle rispetto ai fasci	Ordine delle stelle rispetto alle faccie	Richiami e figure
		IV. ***Reti semiuniformi***		
14	$5 \begin{cases} 1\sigma_o \\ 4\sigma_{ct} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 4_3(\delta_o\, 2\delta^{38}_{ct}) \\ 1_4(4\delta^{88}_{ct}) \end{cases}$	$8 \begin{cases} 4f_3 \\ 4f_8 \end{cases}$	n. 29-32 fig. 17
15	$6 \begin{cases} 2\sigma_o \\ 4\sigma_{co} \end{cases}$	$8_3(2\delta^{34}_{co}\, 1\delta_o)$	$12 \begin{cases} 4f_4 \\ 8f_3 \end{cases}$	» 29-32 » 18
16	$5 \begin{cases} 1\sigma_t \\ 1\sigma_c \\ 3\sigma_{rco} \end{cases}$	$6 \begin{cases} 3_3(\delta_t\, 2\delta^{34}_{rco}) \\ 3_3(\delta_c\, 2\delta^{44}_{rco}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 3f_3 \\ 6f_4 \end{cases}$	» 29-32 » 19
17	$5 \begin{cases} 2\sigma_c \\ 1\sigma_{co} \\ 2\sigma_{rco} \end{cases}$	$6 \begin{cases} 2_3(\delta_c\, 2\delta^{44}_{rco}) \\ 4_3(\delta_c\, \delta^{43}_{co}\, \delta^{34}_{rco}) \end{cases}$	$9 \begin{cases} 2f_3 \\ 7f_4 \end{cases}$	» 29-32 » 20
18	$4 \begin{cases} 1\sigma_c \\ 1\sigma_{ot} \\ 2\sigma_{cot} \end{cases}$	$4 \begin{cases} 1_3(\delta_c\, 2\delta^{84}_{cot}) \\ 2_3(\delta_c\, \delta^{46}_{ot}\, \delta^{64}_{cot}) \\ 1_3(\delta^{66}_{ot}\, 2\delta^{68}_{cot}) \end{cases}$	$6 \begin{cases} 3f_4 \\ 2f_6 \\ 1f_8 \end{cases}$	» 29-32 » 21
19	$5 \begin{cases} 1\sigma_c \\ 2\sigma_{ps} \\ 1\sigma_{ct} \\ 1\sigma_{rco} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 1_4(\delta_c\, \delta^{48}_{ps}\, \delta^{88}_{ct}\, \delta^{84}_{ps}) \\ 2_3(\delta_c\, \delta^{44}_{rco}\, \delta^{44}_{ps}) \\ 2_3(\delta^{48}_{ps}\, \delta^{83}_{ct}\, \delta^{34}_{rco}) \end{cases}$	$8 \begin{cases} 1f_3 \\ 5f_4 \\ 2f_8 \end{cases}$	» 24-27 » 22
20	$4 \begin{cases} 1\sigma_{tt} \\ 1\sigma_{ct} \\ 2\sigma_{cot} \end{cases}$	$4 \begin{cases} 1_3(\delta^{88}_{ct}\, 2\delta^{84}_{cot}) \\ 1_3(\delta^{66}_{tt}\, 2\delta^{64}_{cot}) \\ 2_3(\delta^{36}_{tt}\, \delta^{68}_{cot}\, \delta^{83}_{ct}) \end{cases}$	$6 \begin{cases} 1f_3 \\ 1f_4 \\ 2f_6 \\ 2f_8 \end{cases}$	» 29-32 » 23
21	$5 \begin{cases} 2\sigma_{tt} \\ 1\sigma_{co} \\ 2\sigma_{ot} \end{cases}$	$5 \begin{cases} 1_4(\delta^{66}_{tt}\, \delta^{66}_{ot}\, \delta^{66}_{tt}\, \delta^{66}_{ot}) \\ 4_3(\delta^{36}_{tt}\, \delta^{64}_{ot}\, \delta^{43}_{co}) \end{cases}$	$8 \begin{cases} 2f_3 \\ 2f_4 \\ 4f_6 \end{cases}$	» 29-32 » 24
22	$4 \begin{cases} 2\sigma_{ps} \\ 2\sigma_{cot} \end{cases}$	$4 \begin{cases} 2_3(\delta^{84}_{ps}\, \delta^{44}_{ps}\, \delta^{48}_{cot}) \\ 2_3(\delta^{48}_{ps}\, \delta^{86}_{cot}\, \delta^{64}_{cot}) \end{cases}$	$6 \begin{cases} 3f_4 \\ 1f_6 \\ 2f_8 \end{cases}$	» 29-32 » 24bi

In questo quadro non compariscono tutte le reti trovate, perchè sono state omesse quelle per le quali è facile comprendere immediatamente il loro modo di costituzione. Riferendoci alla classificazione stabilita al n. 33, si ha che non figurano nel quadro, la rete speciale della classe 1^a_a e tutte quelle delle classi 1^a_b, 1^a_c, 2^a e 3^a.

Quanto alle notazioni adoperate nel quadro precedente osserveremo che i primi numeri dell'ultima colonna richiamano gli articoli del testo ove si tratta delle singole reti. I numeri della stessa colonna che si riferiscono alle figure e che portano un asterisco (*) indicano le reti piane da cui si deducono le corrispondenti dello spazio, secondo quanto è stato detto al n. 18.

46. Nel quadro precedente si è tenuto conto solamente del modo secondo il quale risultano formate le stelle delle diverse reti. Gli elementi di tali enti geometrici sono gli *angoli solidi*, i *fasci* e le *faccie*, e fra questi elementi sussiste la stessa relazione (di Eulero) che ha luogo pei poliedri, vale a dire il numero degli angoloidi, aumentato di quello dei fasci, eguaglia sempre il numero delle faccie aumentato di due.

Gli angoli solidi sono quelli stessi che appartengono ai varî poliedri che formano le reti; i fasci sono formati dal concorso dei varî diedri dei poliedri che hanno una costola in comune, e le faccie sono comuni a due poliedri adiacenti. La colonna intestata *angoli solidi* contiene la indicazione del numero e delle varie specie di angoloidi dei poliedri che concorrono in ogni stella delle singole reti.

La colonna intestata *fasci* contiene la indicazione del numero degli spigoli di ciascuna stella e il numero e la specie dei diedri appartenenti ai varî poliedri, che formano un giro intorno ad ognuno di questi spigoli.

Infine la colonna segnata *faccie* porta la indicazione del numero e dell'ordine delle varie faccie che concorrono in ciascuna stella. Così per esempio la notazione simbolica relativa alla rete 14^a ci dice che essa è *semiuniforme*; che ciascuna stella è formata dal concorso di 5 poliedri, e cioè di un ottaedro e di 4 cubi tronchi; che vi concorrono 5 spigoli di cui 4, sono assi di fasci del 3° ordine formati da un diedro dell'ottaedro e 2 dal diedro compreso tra faccie triangolari e ottagonali del cubo tronco e uno è asse di un fascio del 4° ordine formato da 4 diedri del cubo tronco; infine che, sempre in ciascun vertice, concorrono 8 facce di cui 4 sono triangolari e 4 ottagonali.

Per quanto riguarda gli elementi che costituiscono i varî poliedri che prendono parte alla formazione delle reti e per la interpretazione della notazione relativa ai varî poliedri ed ai corrispondenti diedri, si può ricorrere al quadro dato al n. 14.

Termineremo questa I Parte riportando qui appresso le immagini stereoscopiche di tutte le reti poliedrali cercate (12 fondamentali e 2 *varietà*), escluse quelle appartenenti alle serie riassunte nelle prime 5 classi enumerate al n° 33, le quali si deducono facilmente dalle reti piane di cui abbiamo già date le figure in principio.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23.

Fig. 24.

Fig. 24bis.

PARTE SECONDA

Reti correlative a quelle di poliedri regolari e semiregolari.

47. Come le reti piane possono considerarsi quali corpi di un numero infinito di faccie nello spazio a tre dimensioni, così le reti dello spazio ordinario possono riguardarsi come corpi di un numero infinito di poliedri dello spazio a 4 dimensioni; quindi per introdurre il concetto di correlatività nelle reti poliedrali si potrebbe osservare che come da una rete piana si passa alla sua correlatività mediante il principio di correlatività fra i poliedri dello spazio ordinario, così da una rete poliedrale si passa alla sua correlativa per mezzo del principio di correlativa tra i corpi dello spazio a 4 dimensioni.

Noi però riserbandoci tale modo di derivazione quando faremo la ricercá delle reti poliedrali come caso particolare dei corpi dello spazio a 4 dimensioni, secondo quanto abbiamo già detto al n. 7, ci contenteremo, per ora, di accennare alla corrispondenza che si può stabilire fra i varî elementi che compongono una rete di poliedri, per poterne dedurre le reti correlative.

48. A tale scopo osserviamo che in una rete dello spazio ordinario possiamo considerare come elementi primari i *poliedri* che compongono la rete e le *stelle* nei vertici delle quali si aggruppano quei poliedri.

Questi elementi principali sono costituiti da elementi secondari, e questi alla lor volta da altri elementi come apparisce dal seguente prospetto:

RETI	1. Stelle	2. Angoli solidi	4. Angoli diedri
			5. » piani
		3. Fasci	6. » diedri
			7. Diedroidri
	1′. Poliedri	2′. Angoli solidi	4′. Angoli piani
			5′. » diedri
		3′ Faccie	6′. » piani
			7′. Lati

Quanto al significato dell'elemento *diedroide* osserviamo che come due rette in un piano e due piani nello spazio si incontrano rispettivamente in un punto e secondo una retta, determinando le prime un angolo piano e i secondi un angolo diedro, così, per analogia, si può ritenere che due spazi ordinari nello spazio a 4 dimensioni s'incontrano secondo un piano, determinando una regione di detto spazio indefinito in tre sensi, al quale si può dare il nome di *diedroide*.

I *diedroidi* delle reti sopra considerate sono però un caso specialissimo di quelli ora definiti, perchè le regioni di spazio, che stanno dalle due bande del piano, appartengono allo stesso spazio ordinario, sicchè tali diedroidi speciali sarebbero i corrispondenti degli angoli piatti e dei diedri piatti dello spazio a due e tre dimensioni.

49. I due elementi principali, stelle e poliedri, sono correlativi; agli elementi secondari e terziari dell'uno corrispondono gli elementi secondari e terziari dell'altro; cosicchè riferendoci al prospetto dato precedentemente si può dire che per la correlatività ha luogo la corrispondenza fra gli elementi che abbiamo distinti collo stesso numero d'ordine. Dopo ciò possiamo dire che la corrispondenza fra due reti correlative dello spazio risulta stabilita dalle seguenti relazioni:

1°. Ad ogni *poliedro* regolare o semiregolare si può far corrispondere una *stella* avente il centro in quello del poliedro ed i *raggi* corrispondenti, perpendicolari alle faccie del poliedro medesimo nei punti centrali.

2°. Agli *angoli solidi* del poliedro corrispondono gli *angoli solidi* dello stesso ordine nelle stelle. Tali angoli sono supplementari.

3°. Alle *faccie* del poliedro corrispondono nella stella *fasci* dello stesso ordine. Gli angoli diedri del fascio sono complementari agli angoli piani della faccia.

4°. Agli *angoli diedri* del poliedro corrispondono le *faccie* o *angoli piani* della stella, il valore angolare dei quali è il supplemento di quello degli angoli diedri corrispondenti.

50. Per le stelle suddette adotteremo una notazione identica a quella già usata nella Prima Parte pei corrispondenti poliedri, colla sola differenza che le lettere latine saranno sostituite dalle greche. Così la notazione ($\varkappa\omega\tau$) starà ad indicare la stella corrispondente al cubottaedro tronco (*cot*), la quale stella risulta formata, per ciò che precede, da $6\varphi_8$, $8\varphi_3$, $12\varphi_4$ ossia da 6 fasci regolari del 4° ordine, 8 regolari del 3°, e 12 pure regolari del 4°. La notazione degli angoli piani A, della stella sarà fatta cogli stessi criteri adottati per la notazione degli angoli diedri δ dei poliedri (n. 11), e quindi ogni A sarà accompagnata dalle lettere che indicano la stella speciale a cui appartiene e dai numeri, a guisa di esponenti, che esprimono l'ordine dei fasci i cui assi (raggi della stella) determinano quell'angolo. Cosicchè riferendoci alla stella sopra considerata si trova che essa contiene 72 angoli piani i cui lati sono:

per 24, gli assi di fasci regolari di 8° e 6° ordine
» 24 » » » » » » 8° e 4° »
» 24 » » » » » » 6° e 4° »

Ora, secondo le convenzioni precedenti, tutto ciò può essere indicato simbolicamente colla notazione

$$72 \begin{cases} 24 \ldots A^{86}_{\varkappa\omega\tau} \\ 24 \ldots A^{84}_{\varkappa\omega\tau} \\ 24 \ldots A^{64}_{\varkappa\omega\tau} \end{cases}$$

51. Ogni rete ammette una correlativa. Se tutti i poliedri dell'una hanno un centro e i vertici delle stelle dell'altra coincidono con questi centri, ogni raggio comune a due stelle risulta perpendicolare nel centro della faccia comune ai due poliedri che contengono i vertici di queste due stelle. Due reti che si trovano in queste condizioni le diremo *coniugate*. Alle reti di poliedri regolari e semiregolari, con stelle eguali, corrispondono delle reti di stelle regolari e semiregolari le quali danno luogo alla formazione di poliedri eguali fra di loro.

Noi dobbiamo ora occuparci della determinazione di quest'ultime reti; però piuttosto che considerarle come aggregati di stelle, le riguarderemo ancora come insieme di poliedri tutti eguali fra di loro, e che coi loro aggruppamenti danno origine a stelle regolari e semiregolari con fasci regolari. Per brevità di linguaggio le reti trovate nella Prima Parte le chiameremo *reti fondamentali* e quelle che dobbiamo ora determinare le diremo *reti correlative*.

52. Le faccie che formano i corpi delle reti correlative sono in numero ed in ordine eguali a quelle dei fasci che compongono le stelle delle corrispondenti reti fondamentali; gli angoli di quelle faccie sono, come abbiamo già osservato, i supplementi dri varî angoli che costituriscono questi fasci. Ai fasci di 3° ordine (di diedri noti) corrispondono delle faccie triangolari delle quali essendo conosciuti gli angoli sono completamente determinàte di forma. Eccettuate quelle formate da soli prismi, nessuna fra le *reti fondamentali* contiene dei fasci di ordine superiore al 4°, cosicchè le faccie dei solidi cercati sono trilatere o al più quadrilatere. Anche per le faccie quadrilatere potremo, come abbiamo già osservato, determinare subito gli angoli. Per avere i lati di dette faccie basta osservare che ognuna delle costole del solido cercato è sempre data dalla somma delle apoteme dei due poliedri di cui la faccia comune è perpendicolare allo spigolo considerato. I poliedri regolari e semiregolari che costituiscono le reti fondamentali hanno tutti gli spigoli di eguale lunghezza l, quindi potremo esprimere tutte le apoteme relative alle diverse faccie dei varî poliedri in funzione di questa lettera.

53. Indicando in generale con a^n_k l'apotema relativa alla faccia di ordine n, del poliedro k il prospetto che segue dà la espressione delle varie apoteme dei poliedri regolari e semiregolari che entrano nella costituzione delle reti fondamentali:

Tetraedro . . . . $a_t = \frac{l\sqrt{6}}{12}$; Cubo . . . $a_c = \frac{l}{2}$

Ottaedro $a_o = \frac{l\sqrt{6}}{6}$

Tetraedro tronco . . . . $a^6_{tt} = \frac{l\sqrt{6}}{4}$; $a^3_{tt} = \frac{5l\sqrt{6}}{12}$

Cubo tronco . . . . $\begin{cases} a^8_{ct} = \frac{1}{2}\, l(1+\sqrt{2}) \,; \\ a^3_{ct} = \frac{l\sqrt{3}}{6}(3+2\sqrt{2}) = \frac{l\sqrt{6}}{12}(3\sqrt{2}+4) \end{cases}$

Ottaedro tronco . . . . $a^6_{ot} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$; $a^4_{ot} = l\sqrt{2}$

Cubottaedro . . . . $a^4_{co} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $a^3_{co} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$

Rombocubottaedro. . . . . . $\begin{cases} a^4_{rco} = \frac{1}{2} l (1 + \sqrt{2}) ; \\ a^3_{rco} = \frac{l}{6}(3\sqrt{3} + \sqrt{6}) = l\sqrt{6}\,\frac{3\sqrt{2}+2}{12} \end{cases}$

Cubottaedro tronco . . . . . $\begin{cases} a^4_{cot} = \frac{l}{2}(3 + \sqrt{2}) \quad ; \quad a^8_{cot} = \frac{l}{2}(1 + 2\sqrt{2}) \\ a^6_{cot} = \frac{l}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = \frac{l\sqrt{6}}{4}(2 + \sqrt{2}) \end{cases}$

Prisma a base ottagona . . . $a^4_{ps} = \frac{l}{2}(1 + \sqrt{2})$; $a^8_{ps} = \frac{l}{2}$

54. Veniamo ora alla determinazione delle reti correlative che ricaveremo da quelle fondamentali nell'ordine stesso secondo cui sono state trovate nella Prima Parte (n. 33).

1^a_a. Per le 10 reti di prismi e per la *varietà* (nn. 18 e 19) si vede subito che le correlative risultano pure formate da prismi di cui le basi sono rappresentate dai poligoni delle reti piane correlative (reti punteggiate, figg. 1-11) e le faccie laterali da rettangoli di cui l'altezza è uguale allo spigolo delle reti fondamentali.

Si osservi che la rete di cubi è autocorrelativa, e che quelle di prismi a base esagonale e di prismi a base triangolare sono l'una correlativa dell'altra. La rete 11ª, costituita da una pila indefinita di prismi aventi le basi di un numero infinito di lati e quindi limitati, lateralmente, da una striscia indefinita di quadrati (n. 19), ammette per correlativo la rete formata da infiniti strati di prismi di cui le basi sono due bilateri (striscie indefinite) e le faccie laterali debbono riguardarsi come rettangoli infinitamente allungati.

55. 1^a_b. Le correlative delle 10 reti e della *varietà*, di solidi prismatici regolari estesi indefinitamente, sono rappresentate dalle reti piane correlative a quelle fornite da una sezione retta delle reti di prismi predetti. Tali sezioni, rappresentate dalle reti punteggiate delle figg. 1 e 10, debbono però essere considerate come le reti di combaciamento di due poliedri di un numero infinito di faccie.

La rete 11ª (n. 20) di questa classe è costituita da due prismi indefiniti formati da un numero infinito di striscie, ossia da due *corpi biangoloidi* con un numero infinito di faccie e di spigoli; ora è facile riconoscere che la rete correlativa è identica alla precedente; possiamo quindi dire che anche la rete 11ª è *autocorrelativa*.

56. 1^a_c. Alle 10 reti ed alla *varietà*, costituite da due solidi di un numero infinito di faccie (n. 20[bis], figg. 1-11) corrispondono come correlative, le 11 reti di solidi prismatici indefiniti e delle quali le sezioni rette sono le reti piane rappresentate dalle reti punteggiate delle figg. 1-11.

La correlativa alla 11ª rete di questa classe è formata da infiniti piani che bisecano ortogonalmente gli spigoli della rete fondamentale; questi piani costituiscono nel loro insieme tanti biedri (strati) con due fasci regolari di un numero infinito di diedri, e due stelle regolari di un numero infinito di faccie.

57. 2ª. La rete formata da due pile indefinite di prismi storti di cui le basi hanno un numero infinito di lati, ha per correlativa un insieme di solidi prismatici indefiniti di cui la sezione, normale alla direzione degli spigoli, fornisce una rete di esagoni. Tali solidi sono analoghi a quelli della rete correlativa 11ª di cui si parla al n. 54, colla differenza che ognuno delle basi bilatere di quella è sostituita da due bilateri o striscie.

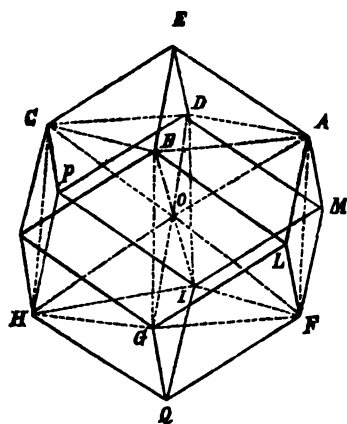
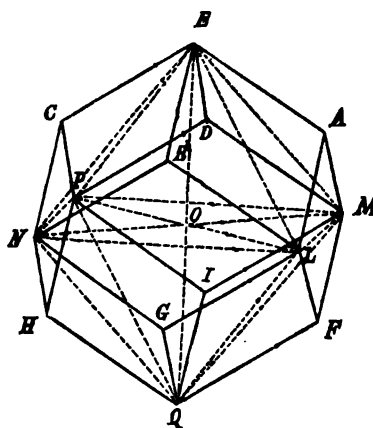



Fig. 25.   Fig. 26.

58. 3ª. La rete (n. 28) di prismi e prismi storti alternati, con base di un numero infinito di lati e quindi limitati lateralmente da striscie di quadrati e di triangoli rispettivamente, ha per correlativa quella formata di solidi le cui sezioni rette sono dei pentagoni rappresentati dalla rete piana punteggiata della fig. 9′. Le faccie di tali solidi, che corrispondono agli spigoli, comuni ai triangoli e ai quadrati, sono da considerarsi come rettangoli infinitamente allungati, le altre faccie sono bilaterali (striscie).

59. Le correlative alle classi 4ª e 5ª (n. 33) di reti fondamentali possono essere determinate contemporaneamente, tenendo presenti le osservazioni fatte e il prospetto dei valori delle apoteme dati al n. 53.

Prima però di venire a questa determinazione ci occuperemo di alcuni poliedri speciali e cioè del *dodecaedro romboidale* e dei varî solidi geometrici in cui questo può essere decomposto, perchè, come vedremo fra poco, sono appunto questi corpi che costituiscono gli elementi poliedrici delle reti correlative a quelle che non si deducono dalle reti piane. Passeremo ora in rassegna questi poliedri speciali.

60. *Dodecaedro romboidale* (A). Se sopra le 6 faccie di un cubo, assunte come basi (fig. 25), si costruiscono altrettante piramidi regolari coll'angolo diedro alla base di 45° e se immaginiamo poi soppresse le 12 costole del cubo stesso, si ottiene un corpo costituito da 12 losanghe che rappresenta il dodecaedro romboidale. Tale

corpo si può anche ottenere costruendo opportune piramidi triangolari sulle faccie dell'ottaedro regolare come mostra la fig. 26.

Il *dodecaedro romboidale* contiene 6 angoloidi regolari quadrispigoli situati alle estremità di 3 assi ortogonali (fig. 26) e 8 angoloidi regolari trispigoli posti agli estremi delle diagonali di un cubo (fig. 25). Il numero delle costole è di 24, e tutti gli angoli diedri sono eguali tra loro.

Chiamando l il lato della losanga, D_4 e D_3 gli assi del corpo che congiungono rispettivamente una coppia di angoloidi quadrispigoli e trispigoli; d_4 e d_3 le diagonali delle losanghe, che riuniscono rispettivamente due vertici di angoloidi quadrispigoli e trispigoli, si deduce subito, per ciò che precede, che la

$$\text{diagonale minore della losanga} = d_3 = l\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{» maggiore » »} = d_4 = d_3\sqrt{2} = l\,\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{diagonale minore del dodecaedro} = D_4 = 2d_3 = l_4\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{» maggiore » »} = D_3 = 2l$$

Il valore Δ dell'angolo diedro è 120°.

Gli angoli piani α_4 e α_3, relativi agli angoloidi quadrispigoli e trispigoli, sono dati rispettivamente da

$$\cos\frac{1}{2}\alpha_3 = \sqrt{2} \quad ; \quad \alpha_3 = 70^\circ 31' 43'',624$$

$$\alpha_3 = 180 - \alpha_4 = 109^\circ 28' 16'',376$$

ossia sono rispettivamente gli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro regolare (n. 15).

La figura 25 mostra che il dodecaedro romboidale può scomporsi in 4 *romboedri* o in 6 *ottaedri* e la 26, in 8 *bipiramidi triangolari* su base triangolare equilatera. Una di ciascuna specie di questi corpi è rappresentata in forma, posizione notazione, ma in dimensioni maggiori, dalle tre figure 27, 28, 29.

61. Il *romboedro* (B) fig. 27 ha 6 faccie eguali a quella del dodecaedro romboidale, e due degli angoli solidi triedri opposti A e O, sono pure eguali a quelli del dodecaedro stesso; gli altri 6 sono costituiti dal concorso di un angolo ottuso e di due acuti della losanga che rappresenta la faccia del dodecaedro romboidale; la grandezza delle sue varie parti è la seguente: Costola $= l$

$$\text{diagonale maggiore della faccia} = d_4 = l\,\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{» minore » »} = d_3 = l\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{diagonali del corpo, } AO = l$$

$$\text{» » » } AB = LD = EF = l\,\frac{\sqrt{33}}{3}$$

62. L'*ottaedro* (C) fig. 28, è la sesta parte del dodecaedro romboidale. È costituito da 8 triangoli isosceli che si ottengono dimezzando, colla diagonale minore, la losanga del dodecaedro romboidale. Gli angoloidi sono quadrispigoli e regolari; due

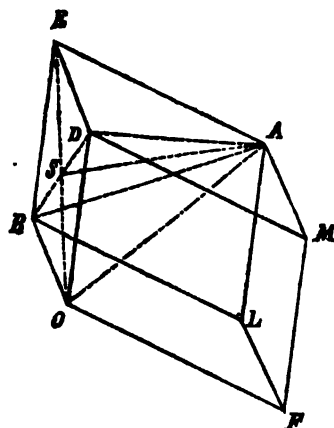



Fig. 27.

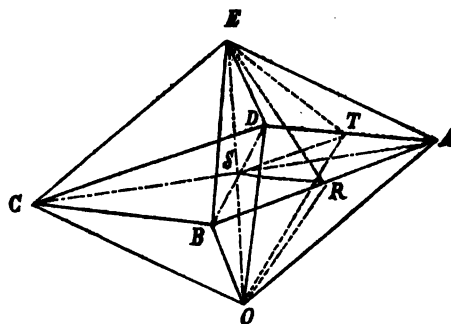



Fig. 28.

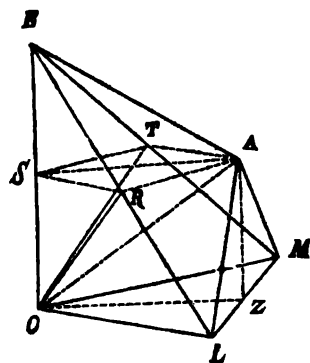



Fig. 29.

di essi E ed O sono eguali a quelli del dodecaedro romboidale; gli altri 4 sono eguali fra loro. Le lunghezze delle diagonali e dei lati sono le seguenti:

$$AB = BC = CD = AD = d_3 = l\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = EC = ED = OA = OB = OC = OD = l$$

$$AC = BD = d_3\sqrt{2} = d_4 = l\,\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$OE = d_3 = l\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Si osservi che la sezione ADCB dell'ottaedro è un quadrato, e le altre due AECO = BCDO sono losanghe eguali alla faccia del dodecaedro.

63. La *bipiramide* OELMA (D), fig. 29, è l'ottava parte del dodecaedro ed è formata da due piramidi triangolari regolari colla base in comune. Può riguardarsi come risultante dall'ottava parte dell'ottaedro che ha servito a dedurre il dodecaedro romboidale (n. 60) alla quale parte, e sopra la faccia stessa dell'ottaedro, è sovrapposta la piramide che ha per faccie laterali i triangoli isosceli ottenuti dimezzando le 3 losanghe del dodecaedro che concorrono in uno stesso angoloide trispigolo, per mezzo delle diagonali maggiori.

Le lunghezze degli spigoli sono

$$OE = OL = OM = \tfrac{1}{2} D_4 = d_3 = \frac{l 2\sqrt{3}}{3}$$

$$EL = LM = ME = d_4 = l \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$AE = AL = AM = l$$

64. Vediamo ora gli altri corpi che possono dedursi dai tre precedenti.

Piramide su base losanga (E). — Si deduce prendendo rispettivamente la metà e la terza parte, ABEDO, dell'ottaedro (fig. 28) e del romboedro (fig. 27). La losanga che serve di base è la faccia stessa del dodecaedro romboidale; le faccie laterali sono la metà di questa stessa faccia tagliata colla diagonale minore.

Lunghezza degli spigoli:

$$AE = AO = EB = BO = OD = DE = l$$

$$AB = AD = d_3 = \frac{l 2\sqrt{3}}{3}$$

65. *Piramide regolare a base quadrata* (F). — Si deduce solamente dall'ottaedro prendendone la metà ABCDE (fig. 28).

Gli spigoli sono:

$$AB = BC = CD = DA = d_3 = \frac{l 2\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = EC = ED = l$$

66. *Bipiramide trirettangola su base triangolare isoscele* (G). — Si deduce dall'ottaedro (fig. 28) prendendone la 4ª parte OERAT per mezzo di due piani che bisecano ortogonalmente i lati opposti del quadrato ABCD. Si ottiene anche prendendo una delle tre parti, per esempio OERAT, (fig. 29) in cui viene divisa la bipiramide (D) per mezzo dei piani passanti per AO perpendicolarmente ai tre spigoli EL, LH, ME della base equilatera. Per la lunghezza degli spigoli si trova:

$$OE = d_3 = l\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$AE = AO = l$$

$$RE = RO = TE = TO = \frac{1}{2}d_4 = l\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$AR = AT = \frac{1}{2}d_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

67. *Tetraedro di triangoli uguali ed isosceli* (H). — Si ottiene prendendo la metà EOBA del corpo E, n. 64, ossia del corpo ABEDO (figg. 27 e 28).

La lunghezza degli spigoli è data da:

$$EO = AB = d_3 = l\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$EA = EB = BO = OA = l$$

68. *Tetraedro* (I) *di cui le faccie sono un mezzo quadrato, una mezza losanga determinata dalla diagonale maggiore e due mezze losanghe sulla diagonale minore.* — Si deduce prendendo la metà ABDE del corpo (E) ossia di ABEDO (figg. 27 e 28), o la metà di (F) ossia ABCDE (fig. 28).

Gli spigoli sono:

$$BE = ED = EA = l$$

$$AB = AD = d_3 = \frac{l2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad BD = d_4 = l\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

69. *Piramidi triangolari* (J) *di cui la base è mezza losanga sulla diagonale minore.* — Si ottiene prendendo la metà ABDS dei corpi (H) = EOBA, ed (I) = ABDE (figg. 27 e 28).

Per la lunghezza degli spigoli si trova:

$$EA = EB = l$$

$$AB = d_3 = l\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$ES = \frac{1}{2}d_3 = l\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AS = BS = \frac{1}{2}d_4 = l\frac{\sqrt{6}}{3}$$

70. *Piramidi a base quadrata con faccie laterali distinte in due coppie di triangoli rettangoli eguali* (L). — Si ottiene prendendo la metà ARSTE del corpo (G) = OERAT (figg. 28 e 29), o la quarta parte del corpo (F) = ABCDE (fig. 28).

Il valore dei suoi spigoli è il seguente:

$$\mathrm{AR} = \mathrm{RS} = \mathrm{ST} = \mathrm{TA} = \mathrm{ES} = \tfrac{1}{2}\, d_3 = l\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{ER} = \mathrm{ET} = \tfrac{1}{2}\, d_4 = \frac{l\sqrt{6}}{3} \quad ; \quad \mathrm{AE} = l$$

71. *Tetraedro* (M) *di due coppie di triangoli rettangoli eguali.* — È la metà SRAE del solido precedente (L) = ARSTE (figg. 28 e 29) o la metà dèl solido (J) = ABES (figg. 27 e 28).

I suoi spigoli sono:

$$\mathrm{AR} = \mathrm{RS} = \mathrm{SE} = \tfrac{1}{2}\, d_3 = l\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{ER} = \tfrac{1}{2}\, d_4 = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

$$\mathrm{AS} = \tfrac{1}{2}\, d_4\, l\,\frac{\sqrt{6}}{3} \quad ; \quad \mathrm{AE} = l$$

72. Si può osservare che dei poliedri precedenti solamente il *dodecaedro*, il *romboedro* e l'*ottaedro* ammettono un centro geometrico.

Osserviamo ancora che dei 12 corpi trovati pei quali è possibile aggrupparne un certo numero, di una stessa specie, in modo da ottenere un poliedro regolare, si hanno i casi seguenti:

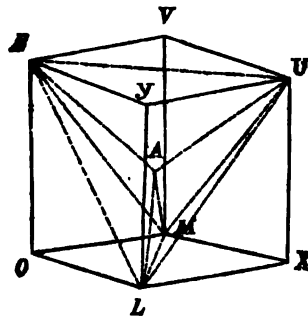



Fig. 30.

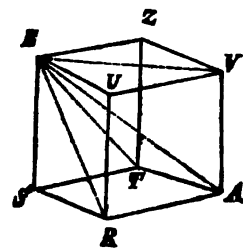



Fig. 31.

1°. Sei (F) per formare un cubo (k_1) di lato d_3 (fig. 25)
2°. Quattro (D) per formare un cubo (k_2) di lato $\frac{1}{2}\,\mathrm{D}_4 = d_3$ (fig. 30)
3°. Tre (L) per formare un cubo (k_3) di lato $\frac{1}{2}\, d_3$ (fig. 31)

73. Pei dodici corpi trovati possono essere messe in evidenza con facilità le derivazioni precedentemente accennate, per mezzo del seguente quadro:

$$
(A)\begin{cases}
(B)=\frac{1}{4}(A) \\
(C)=\frac{1}{6}(A) \\
(D)=\frac{1}{8}(A)
\end{cases}
\quad
(E)=\begin{cases}\frac{1}{3}(B)\\ \frac{1}{2}(C)\end{cases}
\quad
(F)=\frac{1}{2}(C)
\quad
(G)=\begin{cases}\frac{1}{4}(C)\\ \frac{1}{3}(D)\end{cases}
$$

$$
(H)=\frac{1}{2}(E)
\quad
(I)=\begin{cases}\frac{1}{2}(E)\\ \frac{1}{2}(F)\end{cases}
\quad
(J)=\begin{cases}\frac{1}{2}(H)\\ \frac{1}{2}(I)\end{cases}
\quad
(L)=\begin{cases}\frac{1}{4}(F)\\ \frac{1}{2}(G)\end{cases}
\quad
(M)=\begin{cases}\frac{1}{2}(J)\\ \frac{1}{2}(L)\end{cases}.
$$

74. Parimente nel quadro che segue abbiamo la indicazione del numero delle parti eguali di cui si compone ognuno dei corpi (A), (B), (C),... rispetto ad alcuni o a tutti i corpi che nel quadro precedente seguono quello considerato.

	(M)	(L)	(J)	(I)	(H)	(G)	(F)	(E)	(D)	(C)	(B)	(A)
(A)	96	32	48	24	24	24	12	12	8	6	4	1
(B)	24	—	12	6	6	—	—	3	—	—	1	
(C)	16	8	8	4	4	4	2	2	—	1		
(D)	12	6	—	—	—	3	—	—	1			
(E)	8	—	4	2	2	—	—	1				
(F)	8	—	4	2	—	—	1					
(G)	4	2	—	—	—	1						
(H)	4	—	2	—	1							
(I)	4	—	2	1								
(J)	2	—	1									
(L)	2	1										
(M)	1											

In questo quadro ogni numero indica quanti corpi corrispondenti al simbolo posto in testa alla colonna, sono contenuti nel corpo rappresentato dal simbolo della prima colonna a sinistra.

75. Infine nel terzo ed ultimo quadro seguente sono posti in evidenza i numeri delle varie specie di angoloidi appartenenti ai corpi (B), (C), (D)... (M) e che occorrono per formare i varî angoloidi dei corpi (A), (B), (C)... (M) o dei cubi (K_1), (K_2), (K_3), da cui il corpo considerato può derivarsi.

Tale quadro si limita a mettere in rilievo solamente quei casi che ci torneranno utili per poter riconoscere più facilmente di quali e quanti angoli solidi, appartenenti ai corpi predetti, sono composte le varie stelle delle reti correlative:

(B) =	$A_1 M_2 D_3 E_2 L_2 F_3 O_4 B_3$	(A)	figg. 25, 27
(C) =	$E_1 A_3 B_3 C_3 D_3 O_6$	(A)	» 25, 28
(D) =	$O_8 E_4 L_4 M_4 A_1$	(A)	» 26, 29
	$O_1 E_3 L_3 M_3 A_4$	(K_2)	» 30
(E) =	$A_3 B_2 E_1 D_2 O_3$	(B)	» 27
	$A_1 B_2 E_2 D_2 O_2$	(C)	» 28
(F) =	$A_2 B_2 C_2 D_2 E_1$	(C)	» 28
	$A_3 B_3 C_3 D_3 O_6$	(K_1)	» 25
(G) =	$O_4 E_4 R_2 A_1 T_2$	(C)	» 28
	$O_3 E_1 R_2 A_3 T_3$	(D)	» 29
H =	$E_2 O_2 B_1 A_2$	(E)	figg. 27, 28
I =	$A_2 B_2 D_3 E_1$	(E)	» 27, 28
	$A_1 B_2 D_2 E_2$	(F)	» 28
J =	$A_2 B_2 E_1 S_2$	(H)	» 27, 28
	$A_2 B_1 E_2 S_2$	(I)	» 27, 28
L =	$A_2 R_2 S_2 T_2 E_1$	(G)	» 28, 29
	$A_1 R_2 S_4 T_2 E_4$	(F)	» 28
	$A_3 R_2 S_1 T_2 E_3$	(K_3)	» 31
M =	$S_2 R_1 A_2 E_2$	(L)	» 28, 29
	$S_2 R_2 A_1 E_2$	(J)	» 27, 28

Le prime lettere fra parentesi sono i simboli dei corpi che si considerano; le lettere della terza colonna, sempre fra parentesi, rappresentano i corpi da cui derivano rispettivamente i primi. Gli indici numerici delle lettere (seconda colonna) le quali denotano i vari angoloidi del corpo corrispondente nella prima colonna, stanno a rappresentare il numero di tali angoloidi che abbisognano per formare gli angoloidi corrispondenti del corpo da cui può derivarsi il primo.

76. Occupiamoci in ultimo di due altri dodecaedri speciali i quali possono facilmente derivarsi dal *dodecaedro romboidale* (60). Uno di questi nuovi solidi insieme a quello rappresentato da una delle tre parti eguali in cui può decomporsi l'altro, forniscono gli elementi per costituire rispettivamente le correlative delle reti fondamentali 2′ e 13′.

Per la derivazione di uno di questi solidi si lasciano invariate nel *dodecaedro romboidale* (figg. 25 e 26) le tre losanghe che formano l'angolo solido triedro A; delle 6 costole parallele all'asse AH, si lasciano pure invariate quelle che partono dai tre vertici E, L, M mentre le altre tre DP, FQ, NB si riducono ad un terzo, e si riuniscono poi consecutivamente i punti N, G, Q, I, P, C (fig. 32).

La linea esagonale spezzata così ottenuta è simmetrica ad N L F M E E rispetto al piano che biseca ortogonalmente le tre costole CE, LG, MI, il che si rende manifesto osservando che i trapezî laterali risultano isosceli pel fatto che la proiezione p, per esempio di BL sulla LG, è la terza parte della stessa LG. Infatti, essendo (n. 60)

$$\cot \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{2}\,, \text{ si ha } \cos\alpha = \tfrac{1}{3}$$

e quindi

$$p = \mathrm{BL}\cdot\cos\alpha = \frac{\mathrm{BL}}{3}\,.$$

Dopo ciò prendendo H simmetrico di A rispetto al piano di simmetria predetto, e congiungendo questo punto con C, G e I si viene a formare in H un triedro di tre losanghe identico a quello che ha il vertice in A.

La lunghezza dell'asse AH (fig. 32), si trova osservando che $NB = \frac{1}{3} l$, che (n. 60) $AB = d_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$ e che quindi

$$AH = NB + 2AB \cos \omega = \frac{l}{3}(1 + 4\sqrt{3} \cos \omega) = \frac{5l}{3}$$

essendo ω l'angolo (fig. 25) che AB, lato di un cubo, forma colla sua diagonale AH.

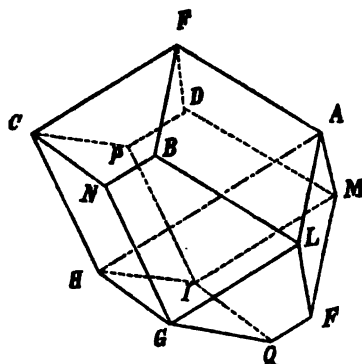



Fig. 32.

Dalla semplice ispezione della fig. 32 si riconosce subito che il dodecaedro ora considerato si compone di tre solidi eguali all'esaedro A L B E C N G H al quale daremo il nome di *rombotrapezoide* e che è formato da due losanghe e da 4 trapezî due a due eguali. I trapezî più piccoli hanno la base minore NB eguale alla terza parte della maggiore, e nei trapezî più grandi la base maggiore AH eguaglia i $\frac{5}{3}$ della minore.

77. Un altro dodecaedro, analogo al precedente, si ottiene supponendo che (fig. 25 o 26) il solo angolo solido H insieme alle tre losanghe che lo formano ruotino di 60° intorno all'asse AH. Dopo ciò ricordando quanto è stato detto al numero precedente relativamente alla lunghezza della proiezione di BL sulla LG, è facile riconoscere che questo nuovo *dodecaedro*, che chiameremo *rombotrapezoidale* ha una forma somigliante a quella della fig. 32. Tutti i suoi spigoli sono eguale ad l (lato della losanga del dodecaedro romboidale) eccettuati i 3, NB, QF, FD che sono eguali a $\frac{2}{3} l$ e i 3, LG, EC, MI che sono eguali a $\frac{4}{3} l$. Quest'ultimo dodecaedro è il corpo correlativo alla *varietà* del *cubo ottaedro*, nella quale i due triangoli equilateri e i due quadrati che concorrono in ciascun vertice resultano alternati fra di loro, per 6 angoloidi, e adiacenti l'uno all'altro per gli altri 6, mentre nel *cubo ottaedro ordinario* tutti gli angoloidi sono costituiti da due triangoli e due quadrati alternati.

Ed ora veniamo alla determinazione delle reti correlative a quelle formate da poliedri regolari e semiregolari.

78. Il quadro delle reti fondamentali dato al n. 45, e le osservazioni fatte ai nn. 51, 52, 53, ci mettono in grado di dedurre facilmente tutte le reti correlative.

Tralasciando quelle che sono già state trovate per altra via (nn. 54 ... 58), la determinazione delle rimanenti può farsi nel modo seguente.

Per la rete fondamentale 2 si ha che in ogni stella concorrono 14 angoloidi di cui 8 appartengono a dei tetraedri e 6 a degli ottaedri regolari, quindi nella correlativa ogni corpo ha 14 angoli solidi di cui 8 appartengono a stelle regolari tetraspigoli e 6 a stelle regolari ottaspigoli. Ogni stella della rete fondamentale contiene 12 fasci di 4° ordine i cui diedri opposti sono eguali, e perciò i corpi della rete correlativa debbono contenere 12 facce quadrilatere di cui gli angoli opposti sono eguali.

In ogni stella della prima rete concorrono 24 faccie appartenenti tutte a triangoli equilateri e quindi ogni corpo delle reti correlative deve contenere 24 diedri di 120° perchè tutti appartenenti a fasci regolari di 3° ordine.

Gli angoli α e β delle faccie quadrilatere sono (n. 49, 3°)

$$\alpha = 180 - \delta_t = \delta_o = 109° 28' 16'', 376 ,$$

e quindi

$$\beta = \delta_t = 70° 31' 43'', 624 .$$

La faccia è una losanga perchè tutti gli spigoli hanno una lunghezza espressa da (n. 52)

$$a_t + a_o = \frac{l\sqrt{6}}{12} + \frac{l\sqrt{6}}{2} = l\left(\frac{7\sqrt{6}}{12}\right)$$

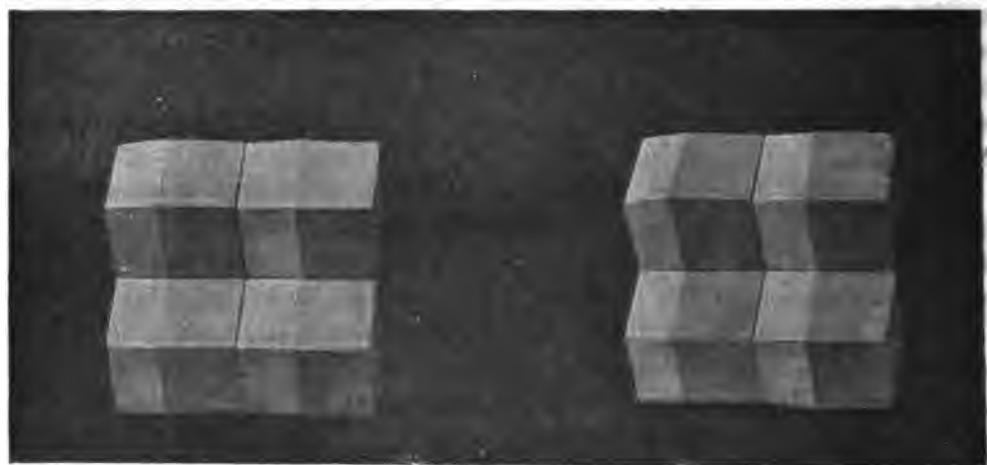



Fig. 33.

I corpi, adunque, che formano la rete correlativa alla 2 (fig. 33) sono dei *dodecaedri romboidali* già descritti al n. 60.

79. Per la determinazione della rete correlativa alla 2′ si ragiona nello stesso modo, giacchè i corpi che la costituiscono non differiscono da quelli della rete pre-

cedente che per la forma di alcune delle faccie, perchè sei di esse sono losanghe eguali a quelle del dodecaedro romboidale, e sei sono trapezî isosceli i cui angoli sono eguali a quelli della losanga. Gli spigoli del solido sono:

$$\text{base maggiore del trapezio} = 2\,a_o = \tfrac{4}{3}\,l\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$\text{» minore » »} = 2\,a_t = \tfrac{2}{3}\,l\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$\text{lati eguali} \ldots\ldots = a_o + a_t = l\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

Questi valori divisi per $\frac{\sqrt{6}}{4}$ diventano identici a quelli ottenuti pel *dodecaedro rombotrapezoidale* (77). La correlativa alla 2′ è quindi formata di questi speciali dodecaedri ed è rappresentata dalla fig. 34.

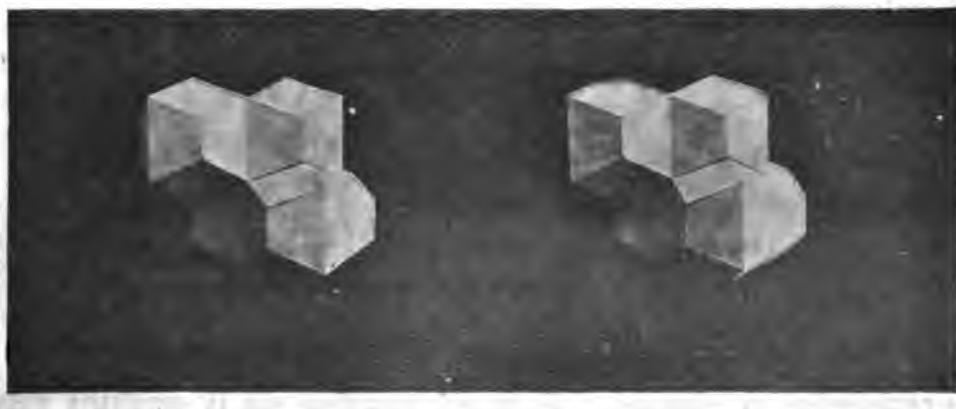



Fig. 34.

80. La rete correlativa alla 3 si trova collo stesso metodo; essa è formata di tetraedri di cui le 4 facce sono triangoli e isosceli eguali. Le lunghezze degli spigoli sono le seguenti:

$$\text{base del triangolo} = 2\,a^4_{ot} = l\,2\sqrt{2} = l\,\frac{2\sqrt{3}}{6}\,(\sqrt{6})$$

$$\text{lati eguali} = 2\,a^6_{ot} = l\sqrt{6} = l\,(\sqrt{6})$$

Questi valori divisi per $(\sqrt{6})$ si riducono a quelli degli spigoli del tetraedro (H) considerato al n. 67.

81. Per le reti che portano il numero d'ordine dal 4 al 12 sono già state considerate le corrispondenti correlative ai nn. 54 ... 58.

La correlativa alla rete 13 si ricava seguendo lo stesso procedimento e si trova che essa risulta formata di romboedri (n. 61).

82. La rete correlativa della 13′ è costituita da 7 facce, 8 angoloidi e 12 costole.

Infatti, esaminando la rete 13′ si vede che ai 2 fasci $2_4(\delta_t^{ss}\,\delta_{tt}^{ss}\,\delta_{tt}^{ss}\,\delta_{tt}^{ss})$ corrispondono due losanghe i cui lati sono $l\frac{\sqrt{6}}{2}$; ai due fasci, $2_4(2\,\delta_{tt}^{sa}2\delta_{tt}^{ss})$ corrispondono due trapezi isosceli di cui i lati sono:

$$\text{base maggiore} = 2\,a_{tt}^{e} = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{base minore} = 2\,a_t = 2\,\frac{l\sqrt{6}}{6} = \frac{l}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{lati eguali} = a_t + a_{tt}^{3} = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l\,\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Infine ai due fasci $2_4(2\,\delta_{tt}^{ss}\,2\delta_{tt}^{ss})$ corrispondono pure due trapezi isosceli i lati del quale sono:

$$\text{base maggiore} = 2\,a_{tt}^{3} = \frac{5\,l\sqrt{6}}{6} = \frac{5l}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{base minore} = 2\,a_{tt}^{e} = \frac{l\sqrt{6}}{2} = l\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{lati eguali} = 2\,a_{tt}^{e} = l\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Dividendo per $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ tutti i valori trovati e confrontando i resultati con quelli che corrispondono al solido del n. 77, si può concludere che la correlativa della rete 13′ è formata da *rombotrapezoedri*.

83. Senza esporre ora dettagliatamente le ricerche relative alle reti correlative rimanenti, tanto più che queste ricerche si conducono con metodo identico a quello seguito precedentemente, ci contenteremo di dare i risultati finali i quali ci dicono che i corpi che rispettivamente costituiscono le correlative alle reti fondamentali

	14 , 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22
sono	(F) , (C) , (D) , (G) , (J) , (L) , (I) , (E) , (M)

già studiati e descritti ai nn. 60-75.

Dal quadro del n. 45 si deduce facilmente, per ogni rete correlativa, l'ordine delle varie stelle rispetto agli angoloidi. Ma per trovare l'ordine di dette stelle rispetto agli angoloidi dei corpi (A) (B) (C) . . . (L) (M) che le formano, basta osservare che per la rete di dodecaedri romboidali (A) (fig. 33) le stelle di angoloidi triedri (A , B , C , D , E , F , G , H , I , figg. 25, 26) sono di 6° ordine, e quelle di an-

goloidi tetraedri (E, L, M, N, F, Q, figg. 25, 26) sono di 4° ordine. Dopo ciò il prospetto del n. 75 ci permette di risolvere subito la questione proposta. Si consideri per es. la rete correlativa alla 14, formata di corpi (F). Dal prospetto predetto si riconosce subito che gli angoloidi A (= B = C = D) ed E sono rispettivamente di 2° e 1° ordine rispetto agli angoloidi omonimi di (F); che gli angoloidi del dodecaedro romboidale sono di ordine 3° e 1° rispetto a quelli del corpo (C); dunque le stelle della rete sono di ordine 24° e 6° rispetto ai medesimi angoloidi.

Allo stesso risultato si giunge osservando che gli angoloidi A = B = C = D e O di K_1, sono rispettivamente di ordine 3° e 6° rispetto agli angoloidi omonimi di F, e che nella rete di cubi tutte le stelle sono dell' 8° ordine rispetto agli angoloidi.

84. Tutte le nozioni esposte fin qui, intorno alla costituzione delle reti correlative, possono essere riassunte in un quadro analogo a quello dato al n. 45 per le reti fondamentali; però possiamo dispensarci dal compilare questo nuovo quadro, giacchè quello precedentemente ricordato può egualmente servire per le reti correlative, quando: I. Gli enti *stelle* si cambino coi *poliedri*; II. *L'ordine della stella* (n. 45) rispetto agli *angoloidi*, ai *fasci* alle *faccie*, con quello dei *poliedri*, rispetto agli *angoloidi*, alle *faccie* alle *costole*; III. I numeri che nella costituzione delle singole stelle indicano: 1°, i gruppi di *angoloidi eguali* appartenenti alle varie specie di *poliedri*; 2°, i gruppi di *fasci eguali* costituiti da speciali *diedri* di determinati *poliedri*; 3°, i gruppi di *faccie eguali* o *regolari* dei varî ordini, si cambino rispettivamente coi numeri che nella costituzione dei singoli poliedri indicano: 1°, i gruppi di *angoloidi eguali* appartenenti alle varie specie di *stelle*; 2°, i gruppi di *faccie eguali* contenenti speciali *angoli piani* di determinate *stelle*; 3°, i gruppi di *fasci eguali* o *regolari* dei varî ordini.

85. Dobbiamo però osservare che mentre per le reti fondamentali possiamo limitarci a dare il quadro del n° 45 contenente la sola indicazione del modo di costituzione delle stelle, essendo la forma dei poliedri regolari e semiregolari ben nota, per le reti correlative sarebbe opportuno che il quadro corrispondente, oltre contenere le analoghe indicazioni relative ai poliedri, contenesse anche quelle che si riferiscono alle stelle regolari e semiregolari. Ma anche questa parte del prospetto può facilmente compilarsi ponendo mente a quanto è stato detto al n. 49, e alla forma dei solidi regolari e semiregolari quale risulta dal quadro dato al n. 14. Ci limiteremo qui a riportare un esempio della completa indicazione di tutte le particolarità relative alla costituzione di una rete fondamentale e alla sua corrispondente correlativa:

Rete fondamentale di c, co *e* rco *con stelle pentangoloidali* (rete 17)

STELLE				POLIEDRI		
Ordine rispetto			Poliedri	Ordine rispetto		
agli angoloidi	ai fasci	alle faccie		agli angoloidi	alle faccie	alle costole
5 { $2\sigma_c$	6 { $2_3(\delta_c^{44}, 2\delta_{rco}^{44})$	9 { $2f_3$	*c*	$8\sigma_3$	$6f_4$	12 $\}f_4 \| f_4\{$
$1\sigma_{co}$		$7f_4$	*co*	$12\sigma_4$	$8f_3, 6f_4$	24 $\}f_3 \| f_4\{$
$2\sigma_{rco}$	$4_3(\delta_c^{44}\ \delta_{co}^{43}\ \delta_{rco}^{34})$		*rco*	$24\sigma_3$	$8f_3, 6f_4, 10f'_4$	48 $\}24(f_4 \| f'_4), 24(f_3 \| f'_4)$

Rete correlativa di $\varkappa$, $\varkappa\omega$, $\varrho\varkappa\omega$ con poliedri pentangoloidali (rete di corpi (G))

POLIEDRI			STELLE			
Ordine rispetto			Stelle	Ordine rispetto		
agli angoloidi	alle faccie	alle costole		agli angoloidi	alle faccie	alle costole
5 { $2\sigma_{\chi}$	6 { $2_5(\alpha_{\chi}^{44}\ 2\alpha_{\rho\chi\omega}^{44})$	9 { $2\varphi_3$	$\varkappa$	$8\sigma_3$	$6\varphi_4$	$12\ \}\varphi_4 \vert \varphi_4\{$
$1\sigma_{\chi\omega}$		$7\varphi_4$	$\varkappa\omega$	$12\sigma_4$	$8\varphi_3, 6\varphi_4$	$24\ \}\varphi_3 \vert \varphi_3\{$
$2\sigma_{\rho\chi\omega}$	$4_3(\alpha_{\chi}^{44}\ \alpha_{\chi\omega}^{43}\ \alpha_{\rho\chi\omega}^{34})$		$\varrho\varkappa\omega$	$24\sigma_3$	$8\varphi_3, 6\varphi_4, 10\varphi'_4$	$48\ \}24(\varphi_4 \vert \varphi'_4), 24(\varphi_3 \vert \varphi'_4)$

Si noti che le f'_4 sono quadrati uguali alla f_4, tuttavia sono stati distinti fra di loro perchè effettivamente le f'_4 hanno nel *r c o* una funzione diversa da quella delle f_4.

La stessa cosa si può ripetere per gli angoloidi quadrispigoli regolari φ_4 e φ'_4 rispetto alla stella $\varrho\varkappa\omega$.

Fig. 35.

86. Le cellette degli alveari delle api hanno, come è noto, la forma prismatica esagonale. L'ingresso di tali celle è un esagono regolare, e il fondo è costituito da tre losanghe eguali che formano un angolo solido triedro col vertice sull'asse della superficie prismatica. Tali celle sono disposte secondo due strati (fig. 35), l'uno contro l'altro in maniera che il fondo di ognuno è costituito dalle losanghe di tre alveoli dello strato opposto. Ora è facile riconoscere che questo aggregamento è identico a quello di due strati di *dodecaedri romboidali*, come si rileva dalla stessa fig. 35, nella quale una di tali celle è stata appunto ridotta a dodecaedro romboidale. È pure noto (ed è stato matematicamente dimostrato) che la forma dell'alveare è tale che con una data quantità di materia (cera) contiene il maggior numero possibile di celle uguali e simili e di data capacità. La rete (fig. 33) di *dodecaedri romboidali* deve quindi soddisfare alla stessa condizione di *minimum*.

87. Porrò termine al presente lavoro colla seguente osservazione: Le reti piane *semiregolari* e le loro *correlative*, possono tutte ottenersi mediante opportune modificazioni fatte rispettivamente sugli angoloidi o sulle faccie delle reti regolari, nella stessa guisa che i *poliedri semiregolari* e i loro *correlativi* possono ricavarsi con analoghe modificazioni effettuate sugli elementi dei *poliedri regolari* (1).

Lo stesso fatto deve ora verificarsi per le reti dello spazio ordinario, vale a dire che quelle semiregolari e le loro correlative, debbono potersi ottenere con modificazioni da eseguirsi sull'unica rete regolare di poliedri (rete di esaedri); anzi, guidati dall'analogia di quanto si verifica pel nostro spazio, quelle speciali operazioni di modificazioni sopra accennate per passare dalla rete poliedrale regolare alle semiregolari corrispondenti, debbono suggerire molto probabilmente i modi per ottenere i corpi semiregolari e i loro correlativi dello spazio a quattro dimensioni dai 6 poliedri regolari dello stesso spazio.

Per ora mi basta di avere accennato alla questione nella speranza di potervi tornar sopra quando, come ho già detto ai nn. 7 e 47, mi occuperò della ricerca delle reti dello spazio ordinario considerandole come poliedri di un numero infinito di elementi dello spazio a 4 dimensioni.

(1) Di queste derivazioni dei poliedri semiregolari dai regolari mi occuperò più estesamente in altro lavoro.

Sopra un nuovo tipo di sali complessi ossigenati.

Memoria del dott. ITALO BELLUCCI

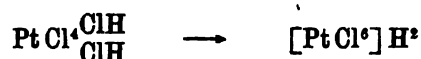
(Presentata dal Socio E. PATERNÒ, approvata dal Socio S. CANNIZZARO)

INTRODUZIONE.

È noto come dopo le ricerche di JÖRGENSEN (1), di KOHLRAUSCH (2), di WAGNER (3), di HITTORF e SALKOWSKI (4) e di MIOLATI (5) sia stato provato nel modo più ampio che il cloruro platinico $PtCl^4$ può combinarsi con due molecole di acqua per formare l'acido bibasico:

$$PtCl^4{}^{OH^2}_{OH^2} \longrightarrow [PtCl^4(OH)^2]H^2$$

in modo perfettamente simile a come combinandosi con due molecole di acido cloridrico forma il comune acido cloroplatinico:

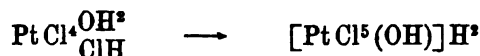
$$PtCl^4{}^{ClH}_{ClH} \longrightarrow [PtCl^6]H^2$$

Con questo comportamento il cloruro platinico viene a discostarsi dalla generalità degli altri cloruri metallici, i quali, come è noto, trovansi in soluzione acquosa dissociati elettroliticamente e spesso anche idroliticamente ed offre così il primo esempio di un cloruro metallico che si sciolga nell'acqua senza alcuna ionizzazione dei suoi atomi di cloro.

Si ha adunque che l'acqua di fronte al cloruro platinico si comporta in certo qual modo come di fronte alle anidridi acide dei sali ossigenati; vi si combina cioè per formare un acido bibasico tanto che aggiungendo del nitrato di argento ad una

(1) Journ. prakt. Chemie [2] *16*, 345, 1877.
(2) Wied. Annal. *63*, 423, 1897.
(3) Zeitschr. physik. Chemie, *28*, 66, 1899.
(4) Zeitschr. physik. Chemie, *28*, 546, 1899.
(5) Zeitschr. anorg. Chemie, *22*, 445, 1900.

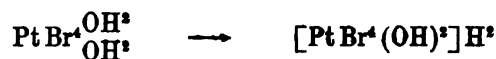
soluzione acquosa di cloruro platinico non si precipita cloruro di argento, ma il sale $[PtCl^4(OH)^2]Ag^2$.

Questa proprietà del cloruro di platino appare anche in maggior rilievo se si considera che esso può combinarsi (1) contemporaneamente con una molecola di acido cloridrico e con una di acqua per formare un acido bibasico intermedio fra i due sopra menzionati e cioè:

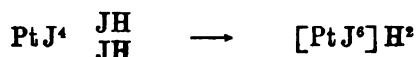
$$PtCl^4{}^{OH^2}_{ClH} \longrightarrow [PtCl^5(OH)]H^2$$

acido che è stato ben caratterizzato sia allo stato libero, con indagini fisico-chimiche, sia in numerosi suoi sali.

In modo del tutto analogo al cloruro di platino è stato dimostrato (2) che si comportano il bromuro $PtBr^4$ e lo joduro PtJ^4, i quali rispettivamente combinandosi con due molecole di acqua, dànno origine ai due acidi bibasici:

$$PtBr^4{}^{OH^2}_{OH^2} \longrightarrow [PtBr^4(OH)^2]H^2$$

$$PtJ^4{}^{OH^2}_{OH^2} \longrightarrow [PtJ^4(OH)^2]H^2$$

così come gli stessi bromuro e ioduro, combinandosi con due molecole di acido bromidrico o di acido iodidrico, dànno origine agli acidi esabromo ed esaiodoplatinici:

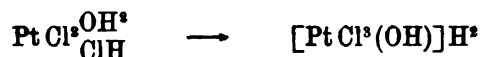
$$PtBr^4{}^{BrH}_{BrH} \longrightarrow [PtBr^6]H^2$$

$$PtJ^4{}^{JH}_{JH} \longrightarrow [PtJ^6]H^2$$

Vi ha adunque una gran somiglianza nel comportamento dei tre composti $PtCl^4$, $PtBr^4$, PtJ^4 tanto di fronte all'acqua, come di fronte agli idracidi rispettivi.

L'esperienza ha finora dimostrato che non solo a questi composti alogenati del platino tetravalente compete siffatta proprietà, sebbene anche al cloruro platinoso $PtCl^2$ il quale come si combina con due molecole di acido cloridrico per dare l'acido cloroplatinoso:

$$PtCl^2{}^{ClH}_{ClH} \longrightarrow [PtCl^4]H^2$$

così può combinarsi (3) con una molecola di acido cloridrico e con una di acqua:

$$PtCl^2{}^{OH^2}_{ClH} \longrightarrow [PtCl^3(OH)]H^2$$

per dare egualmente un acido bibasico.

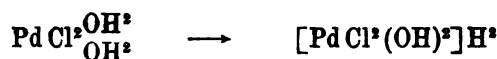
(1) Miolati e Bellucci, Zeitschr. anorg. Chemie, *26*, 209, 1901.

(2) Miolati e Bellucci, Zeitschr. anorg. Chemie, *26*, 222, 1901. — Bellucci, Gazz. Chim. Ital., *33*, 147 (1903).

(3) Miolati e Pendini, Zeitschr. anorg. Chemie, *33*, 264, 1903.

Anche altri metalli nei loro composti alogenati condividono le proprietà di quelli del platino.

Un caso molto caratteristico e che ci dà una idea dell'equivalenza che offrono le molecole di acido cloridrico e di acqua a combinarsi con alcuni cloruri metallici lo presenta il cloruro palladoso $PdCl^2$. Se noi evaporiamo su bagno-maria una soluzione di palladio in acqua regia, nella quale, come è noto, si ammette l'esistenza dell'acido cloropalladico $[PdCl^6]H^2$, avviene un'eliminazione di cloro a mano a mano che la concentrazione procede e si giunge così a trasformare tutto il composto da palladico a palladoso, vale a dire nell'acido cloropalladoso $[PdCl^4]H^2$ che sappiamo essere egualmente instabile. Seguitando l'evaporazione fino ad avere un liquido denso sciropposo, per soggiorno nel vuoto su potassa, si ottiene alla fine cristallizzato il composto $PdCl^2, 2H^2O$. Questo cloruro si scioglie nell'acqua, comunicandole una forte reazione acida, e se si tratta (1) una tale soluzione con nitrato di argento non precipita cloruro di argento ma un composto corrispondente alla formola $[PdCl^2(OH)^2]Ag^2$; onde se ne deduce che al cloruro $PdCl^2, 2H^2O$ compete evidentemente la formola dell'acido bibasico:

$$PdCl^2{}^{OH^2}_{OH^2} \longrightarrow [PdCl^2(OH)^2]H^2$$

in analogia perfetta con quello che si è visto per i cloruri del platino.

Questo fatto speciale del cloruro palladoso è, ripeto, molto caratteristico; dappoichè durante lo svaporamento della soluzione di palladio in acqua regia si viene quasi a formare una specie di concorrenza fra le molecole di acido cloridrico e di acqua a rimaner combinate col cloruro palladoso e risulta alfine cristallizzato l'acido $[PdCl^2(OH)^2]H^2$ piuttostochè l'acido $[PdCl^4]H^2$ che sappiamo per l'appunto essere instabile.

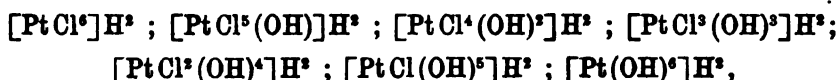
Anche nella soluzione acquosa di tricloruro d'oro $AuCl^3$, per il comportamento elettrolitico che essa presenta (2), è stata dedotta la presenza di un acido risultante dalla combinazione del cloruro aurico con una molecola di acqua e rispondente al tipo del comune acido cloroaurico $[AuCl^4]H$.

Questo comportamento di alcuni composti alogenati di fronte all'acqua è stato finora sperimentalmente provato soltanto per i sali sopra accennati, riferibili al $Pt^{II\ e\ IV}$, al Pd^{II}, ed all'Au^{III}. Dei tentativi (3) intesi a vedere se altri sali del platino tetravalente, contenenti radicali acidi diversi dagli alogeni, come ad es. $Pt(CN)^4$, $Pt(SCN)^4$, $Pt(NO^2)^4$, si combinassero egualmente con l'acqua non hanno raggiunto risultati favorevoli, per quanto se ne abbia un indizio nel caso del composto $Pt(NO^2)^4$.

L'esistenza, sopra menzionata, di questo tipo di acidi alogenati ed ossigenati, nei quali l'ossidrile fa le veci di radicali alogenici, oltre a porre in luce una nuova proprietà di alcuni cloruri metallici, ci si presenta vieppiù interessante se noi poniamo questi acidi in relazione con gli alogenosali puri. Il Miolati infatti basandosi sull'accennato comportamento del cloruro platinico di fronte all'acqua (loc. cit.),

(1) Bellucci e Plate, Chemiker Zeitung., *28*, 214 (1904).
(2) Hittorf e Salkowski (loc. cit.).
(3) Miolati e Bellucci, Gazz. Chim. Ital. *30*, 588, 1900.

ed in parte sull'esistenza sconnessa di alcuni composti clorurati del platino, di costituzione incerta e male interpretata, intuì ed ammise come probabile l'esistenza di una serie di acidi che partendo dall'acido esacloroplatinico $[PtCl^6]H^2$ giungesse fino all'acido esa-ossiplatinico $[Pt(OH)^6]H^2$ per graduale sostituzione degli atomi di cloro del primo con altrettanti ossidrili, serie che qui trovasi rappresentata:

$$[PtCl^6]H^2\ ;\ [PtCl^5(OH)]H^2\ ;\ [PtCl^4(OH)^2]H^2\ ;\ [PtCl^3(OH)^3]H^2;$$
$$[PtCl^2(OH)^4]H^2\ ;\ [PtCl(OH)^5]H^2\ ;\ [Pt(OH)^6]H^2,$$

della quale l'acido tetracloroplatinico $[PtCl^4(OH)^2]H^2$, sopra accennato, sarebbe per l'appunto il terzo termine. Onde esso sotto questo punto di vista non ci apparirebbe più isolato, ma come termine di una serie di acidi, serie che offre nella chimica minerale il primo esempio di questa facoltà, che potremo dire *alogenica*, dell'ossidrile $(OH)'$ di poter sostituire altrettanti atomi di alogeno, formando col metallo degli anioni misti (clorurati ed ossidrilati), ovvero soltanto ossidrilati.

La previsione di questa serie si è andata man mano avverando sperimentalmente essendo riuscito di dimostrare l'esistenza di quasi tutti i suoi termini. Lasciando in disparte l'acido esacloroplatinico noto da così gran tempo, all'identificazione sopra citata dell'acido tetracloroplatinico $[PtCl^4(OH)^2]H^2$, seguì quella del pentacloroplatinico $[PtCl^5(OH)]H^2$ (loc. cit.), poi quella del monocloroplatinico [1] $[PtCl(OH)^5]H^2$ e successivamente quella del bicloroplatinico [2] $[PtCl^2(OH)^4]H^2$. A completare sperimentalmente questa serie di acidi non mancavano quindi che l'acido tricloroplatinico $[PtCl^3(OH)^3]H^2$ e l'ultimo termine, l'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$.

Nello intendimento di portare ancora un nuovo contributo a questa serie di acidi, fin da due anni or sono io credei opportuno di rivolgere la mia attenzione ad uno dei due termini ancora sconosciuti di tale serie e precisamente all'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$, trovandosi questo in molto stretto rapporto, specie per il modo di genesi, con il termine immediatamente superiore della serie, vale a dire con l'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$, da me precedentemente identificato (loc. cit.). Ed io rivolgeva la mia attenzione a questo ultimo termine non più clorurato anche con la speranza di portare un po' di luce nel campo dei platinati intorno a cui fino ad allora non si avevano che notizie rare ed in gran parte incerte. Prendendo in esame l'idrato $PtO^2, 4H^2O$, preparato già da Frémy, sono giunto a dimostrare che ad esso spetta appunto la formola dell'acido bibasico $[Pt(OH)^6]H^2$

$$PtO^2, 4H^2O = [Pt(OH)^6]H^2$$

cioè esso rappresenta l'ultimo termine non più clorurato della serie sovra riportata di acidi cloroplatinici, riuscendo ad ottenere anche dei platinati cristallizzati ai quali tutti compete la formola $[Pt(OH)^6]X'_2$.

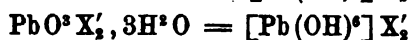
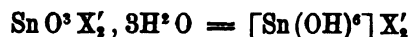
Le ricerche cristallografiche eseguite gentilmente per mio invito dal dott. F. Zambonini sovra il platinato di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$ da me ottenuto, sono venute poi a stabilire che questo sale è isomorfo con lo stannato e con il piombato di potassio

(1) Bellucci, Gazz. Chim. Ital. *33*, 134, 1903.

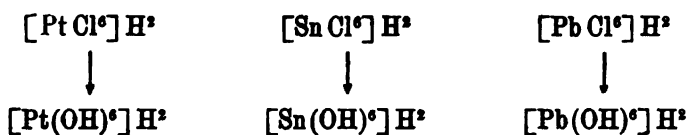
(2) Miolati e Pendini, Zeitschr. anorg. Chemie, *33*, 254, 1903.

già preparati da FRÉMY ed ai quali si attribuivano le formole rispettive $SnO^3K^2, 3H^2O$ e $PbO^3K^2, 3H^2O$. Si veniva così a stabilire per la prima volta una vera relazione di isomorfismo fra composti del Pt^{IV}, Sn^{IV} e Pb^{IV}, fra composti cioè di metalli appartenenti a due gruppi tanto differenti dal sistema periodico, e si rafforzava l'isomorfismo tra Pb^{IV} e Sn^{IV} di cui finora si aveva qualche rarissimo esempio e di cui alcuni anzi negavano l'esistenza.

Stabilito questo isomorfismo tra platinato, stannato e piombato potassici si poteva ben credere con ogni probabilità che agli stannati ed ai piombati suddetti spettassero le formole $[Sn(OH)^6]K^2$ e $[Pb(OH)^6]K^2$, si avesse cioè genericamente:

$$SnO^3X'_2, 3H^2O = [Sn(OH)^6]X'_2$$
$$PbO^3X'_2, 3H^2O = [Pb(OH)^6]X'_2$$

vale a dire le tre molecole di acqua finora ritenute di cristallizzazione fossero da riguardarsi come facenti parte integrante della costituzione del sale, sotto forma di ossidrili, ed avessero anche gli stannati ed i piombati suddetti una costituzione del tutto analoga a quella da me dimostrata per i platinati.

Oltre a questo criterio dell'isomorfismo anche delle analogie di indole chimica parlavano in favore di questa nuova interpretazione, tra cui molto caratteristica l'esistenza dell'acido clorostannico $SnCl^6H^2, 6H^2O$ di composizione in tutto simile a quella dell'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2, 6H^2O$. Data tale nuova interpetrazione si sarebbero potuti così riconnettere gli stannati ed i piombati ai cloroacidi relativi, come nel caso dell'acido platinico:

$$[PtCl^6]H^2 \downarrow [Pt(OH)^6]H^2 \qquad [SnCl^6]H^2 \downarrow [Sn(OH)^6]H^2 \qquad [PbCl^6]H^2 \downarrow [Pb(OH)^6]H^2$$

stabilendo anche per quei sali, come per i platinati, delle intrinseche per quanto semplici relazioni genetiche con i relativi clorosali.

Su questo indirizzo inteso appunto a dimostrare la costituzione degli stannati e piombati nel modo ora accennato ho voluto intraprendere delle ricerche, coadiuvato dal dott. N. PARRAVANO. Tali ricerche hanno confermato questa mia previsione giacchè crediamo di esser riusciti a dimostrare più che sufficientemente che anche agli stannati ed ai piombati suddetti spettano le formole $[Sn(OH)^6]X'_2$ e $[Pb(OH)^6]X'_2$, in luogo delle antiche $SnO^3X'_2, 3H^2O$ e $PbO^3X'_2, 3H^2O$.

I risultati di queste indagini sono già stati tutti pubblicati nella Gazzetta Chimica Italiana e nella Zeitschrift für anorganische Chemie, a mano a mano che esse procedevano. Ho creduto non fosse opera del tutto superflua il riunirli insieme e succintamente nella presente Memoria, in modo da porgere un concetto maggiormente sintetico sovra tali ricerche che presentano per l'appunto una stretta unità di indirizzo.

Esporrò adunque queste cronologicamente, a seconda che hanno effettivamente proceduto, dividendo la presente Memoria in 5 capitoli così distinti: 1° *Platinati*, 2° *Stannati*, 3° *Piombati*, 4° *Relazioni di isomorfismo fra questi sali*, 5° *Considerazioni generali*.

PARTE SPERIMENTALE.

I.

Platinati.

Come ho detto precedentemente io ho ripreso in esame l'idrato $PtO^2, 4H^2O$, già preparato da FRÉMY, ed al quale secondo le mie ricerche, qui sotto esposte, vedremo spettare la formola dell'acido bibasico $[Pt(OH)^6]H^2$.

Alla parte sperimentale relativa trovo opportuno però far precedere un breve riassunto delle poche conoscenze che fino ad oggi si avevano intorno ai platinati.

Parte storica.

I. W. DÖBEREINER (1) mescolando una soluzione di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con eccesso di carbonato sodico ed esponendo il miscuglio alla luce solare diretta ottenne un precipitato giallo-cromo che egli trovò contenere il 0,5-1 °/₀ di cloro; lo considerò come un platinato di sodio $Na^2O, 3PtO^2$.

FR. WEISS e FR. DÖBEREINER (2) ripresero poco dopo lo studio di questo platinato sodico; trovarono che non conteneva cloro ma soltanto ossido di platino, soda ed acqua. Ne stabilirono la formula $Na^2O, 3PtO^2, 6H^2O$.

TOPSÖE (3) scaldando all'ebollizione una soluzione di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con forte eccesso di acqua di barite ottenne il platinato $PtO^3Ba, 4H^2O$.

Conviene qui notare che numerosi chimici (4) da BERZELIUS in poi si sono occupati dell'azione del calore o della luce solare diretta sovra miscugli di acido cloroplatinico con eccesso di acqua di calce o di barite, giungendo tutti a risultati molto sconcordanti. Avendo io ripreso precedentemente in esame l'azione delle acque alcalino-terrose sovra l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$, sotto l'influenza della luce solare diretta, sono riuscito a dimostrare (5) che in tali condizioni non si ottengono mai platinati, ma si giunge sempre a prodotti clorurati e più precisamente ai sali dell'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$, il penultimo termine della serie di acidi ossidrilati, sovra riportata. Ond'è che l'esistenza di questo platinato di bario ottenuto da TOPSÖE va senza dubbio esclusa.

È da ricordarsi infine che G. ROUSSEAU (6) ha ottenuto dei platinati cristallizzati (di Ba, di Na) scaldando per qualche ora a 1100°, in crogiuolo di platino, un

(1) Pogg. Ann. *28*, 184, 1833.

(2) Annalen der Pharmacie, *14*, 18, 1835.

(3) Berichte, *3*, 462, 1870.

(4) BERZELIUS, Ann. de chimie et physiq. [1] *87*, 126, 1813. — HERSCHEL, Annalen der Pharmacie, *3*, 337, 1832. — I. W. DÖBEREINER, Annalen der Pharmacie, *14*, 18, 1835. — FR. DÖBEREINER, Annalen der Pharmacie, *14*, 252, 1835. — JOHANSEN, Annalen der Pharmacie, *155*, 204, 1870. — TOPSÖE, Berichte, *3*, 462, 1870.

(5) Gazz. Chim. Ital. *33*, 134, 1903.

(6) Compt. Rendus, *109*, 144, 1899.

miscuglio a p. e. di cloruro o bromuro di bario, di barite e di cloruro platinico. A seconda delle condizioni di alcalinità ha ottenuto i seguenti sali: PtO^2, BaO e $2PtO^2, 3BaO$.

Ben poche sono, come vedesi, le conoscenze che si avevano intorno ai platinati, poichè di sali ottenuti per via umida, dei quali unicamente ho inteso occuparmi non rimane, con certezza molto relativa, che il platinato $Na^2O, 3PtO^2, 6H^2O$, trovato da WEISS e FR. DÖBEREINER; formula questa che si rinviene a tutt'oggi a rappre-presentare l'unico tipo di platinato finora ottenuto per via umida.

Parte sperimentale.

Io ho ripreparato l'idrato $PtO^2, 4H^2O$, secondo il metodo indicato da FRÉMY, vale a dire riscaldando lungamente all'ebollizione una data quantità di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con una soluzione al 10 % di idrato sodico, in eccesso. La soluzione platinica passa in tal modo da un colore giallo-rosso ad un colore giallo-d'oro.

La soluzione del platinato così ottenuta si diluisce con acqua e si neutralizza a temperatura ordinaria con acido acetico diluito; si ha in tal modo un precipitato bianco, leggermente giallognolo, che va al fondo del recipiente. Si lava per decantazione questo precipitato; però con il ripetersi di tali lavaggi esso stenta moltissimo a deporsi, nè può raccogliersi su filtro perchè passa attraverso la carta anche più compatta. Per separarlo dal liquido sono perciò ricorso all'impiego di una potente centrifuga elettrica; così il precipitato si raccoglie molto bene in fondo ai tubi ed il liquido può decantarsi con tutta facilità.

Il precipitato dopo essere stato centrifugato veniva poi tolto dal fondo del tubo ed agitato lungamente sempre con nuova quantità di acqua alla temperatura ordinaria e quindi di nuovo centrifugato. Tale operazione venne ripetuta parecchie volte; dopo di che il precipitato venne steso su mattonella porosa e lasciato essiccare all'aria. In tal modo si rapprende in piccole masse compatte, giallastre, fragili, insolubili in acqua. È completamente esente di cloruri, e contiene soltanto piccole quantità di alcali.

Le analisi fatte su tale idrato comprovano che esso ha realmente la composizione $PtO^2, 4H^2O$. Per analizzare la sostanza, essiccata all'aria, ne venne calcinato un dato peso in corrente di aria secca, raccogliendo e pesando l'acqua svoltasi in tubi a cloruro di calcio. Si pesava poi il residuo di platino sia prima che dopo aver asportato con acqua acidulata con ac. solforico le piccole impurezze di alcali. Ecco i risultati analitici ottenuti:

I. Sost. gr. 0,5328, gr. 0,3545 Pt, gr. 0,3490 Pt (dopo lavaggio con H^2SO^4), (gr. 0,0024 Na^2O = 0,45 %).

II. Sost. gr. 0,5966, gr. 0,3992 Pt, gr. 0,3914 Pt (id. id.), gr. 0,1404 H^2O (gr. 0,0034 Na^2O = 0,57 %).

Riferendosi a 100 p. di sostanza si ha:

	Trovato		Calcolato
	I	II	per $PtO^2, 4H^2O$
Pt	65,49	65,61	65,20
H^2O	—	23,52	24,12

Le due analisi vennero eseguite su prodotti di diverse preparazioni. È quasi impossibile togliere completamente, anche con lunghi e numerosi lavaggi, tutto l'alcali all'idrato $PtO^2, 4H^2O$, e non sono mai riuscito ad ottenere questo idrato esente completamente di alcali.

Come ha trovato anche LOTHAR WÖHLER ([1]), in un recente bellissimo studio sugli ossidi ed idrati del platino, l'idrato $PtO^2, 4H^2O$ mantenuto per breve tempo alla temp. di 100° sembra perdere soltanto due molecole di H^2O e ridursi a PtO^2, $2H^2O$: però per più lungo essiccamento a 100° la disidratazione prosegue oltre, e coll'allontanarsi dell'acqua l'idrato $PtO^2, 4H^2O$ assume un colorito sempre più bruno scuro fino a diventar nero. WÖHLER (loc. cit.) asserisce che per molto prolungato riscaldamento a 100° o poco al disopra di 100°, si giunge all'idrato PtO^3H^2 e che è impossibile allontanare completamente quest'ultima molecola di acqua anche scaldando l'idrato PtO^3H^2 per 24 ore alla temp. di 410-445°, temperatura alla quale già incomincia notevolmente la decomposizione del PtO^2 con relativa perdita di ossigeno. Non si riesce cioè ad allontanare totalmente l'acqua se non con completa decomposizione del biossido in platino ed ossigeno.

Con il progressivo disidratarsi l'idrato $PtO^2, 4H^2O$ perde la sua solubilità sia negli acidi che nelle soluzioni alcaline. Le mie ricerche in proposito non hanno potuto che confermare le accuratissime indagini del WÖHLER.

I. L'idrato $PtO^2, 4H^2O$ in specie se preparato di recente ed ancora umido si scioglie alla temperatura ordinaria con grande facilità nelle soluzioni acquose degli idrati di sodio e di potassio, colorandole in giallo. Evaporando lentamente queste soluzioni su b. m., in capsule di platino o d'argento e poi abbandonandole nel vuoto su ac. solforico si ottengono dei cristalli di un color giallo-oro tanto più netti quanto più è alcalina la soluzione donde prendono origine. Se l'evaporazione si fa rapidamente si ottiene solo un deposito finemente cristallino, quasi polveroso, giallognolo: mentre alla superficie si formano delle croste cristalline. Sono riuscito invece ad ottenere facilmente e ben cristallizzato il platinato potassico seminando nella sua soluzione un cristallino di stannato di potassio, che ho già detto essere isomorfo col primo. Questo cristallino vi cresce dentro e provoca una bella cristallizzazione di platinato, se si ha cura di mantenerne la soluzione concentrata nel vuoto su ac. solforico. Di questo fatto, che è una delle più grandi conferme dello stretto isomorfismo esistente fra platinato e stannato potassici, diremo meglio quando ci occuperemo della relativa parte cristallografica. Basti per ora il dire che senza ricorrere a questo piccolo espediente riuscirebbe molto difficile ottenere il platinato di potassio in cristalli ben definiti. Il sale di potassio ha in ogni modo tendenza molto maggiore a dare cristalli netti di quello che il sale di sodio.

Tanto il sale di sodio che di potassio sono solubili in acqua e vi si sciolgono con colorazione gialla, comunicando all'acqua una forte reazione alcalina; sono insolubili in alcool etilico. Si purificavano, spremendoli alla pompa, agitandoli due o tre volte sempre con nuove e piccole quantità di acqua (onde asportare i carbonati

([1]) Zeitschr. Anorg. Chemie, *40*, 436, 1904.

alcalini) e quindi con alcool etilico fino a che questo perdeva la reazione alcalina. Si ottengono così allo stato di grande purezza.

Le analisi eseguite sui due sali seccati prima su cloruro di calcio e poi alla temp. di 100°, portano a considerarli come sali dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, ad ammettere cioè per essi le formole $[Pt(OH)^6]K^2$ e $[Pt(OH)^6]Na^2$ e non le corrispondenti $PtO^3K^2, 3H^2O$ e $PtO^3Na^2, 3H^2O$ in base alle considerazioni che sotto verremo svolgendo.

Riporto intanto i risultati delle analisi eseguite sui due sali. La sostanza veniva calcinata in presenza di acido solforico; si pesava il residuo di platino e di solfato alcalino e quindi lisciviando con acqua si pesava il residuo di solo platino. Ovvero si dosava il platino precipitando questo con nastro di magnesio o con zinco dalla soluzione debolmente acetica del sale. Circa la determinazione dell'acqua, per perdita di peso, per elevazione di temperatura, ci soffermeremo più sotto.

Sale di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$.

I. Sostanza gr. 0,4658, gr. 0,4576 $Pt + SO^4K^2$, gr. 0,2396 Pt.
II. Sostanza gr. 0,4190, gr. 0,4112 $Pt + SO^4K^2$, gr. 0,2146 Pt.
III. Sostanza gr. 0,4094, gr. 0,2114 Pt.

Riportandosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $[Pt(OH)^6]K^2$
$Pt + SO^4K^2$	98,22	98,15	—	98,40
Pt	51,45	51,22	51,62	51,93
K	21,01	21,07	—	20,87

Sale di sodio $[Pt(OH)^6]Na^2$.

I. Sostanza gr. 0,4528, gr. 0,4444 $Pt + SO^4Na^2$, gr. 0,2535 Pt.
II. Sostanza gr. 0,3734, gr. 0,3653 $Pt + SO^4Na^2$, gr. 0,2102 Pt.
III. Sostanza gr. 0,3738, gr. 0,2116 Pt.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $[Pt(OH)^6]Na^2$
$Pt + SO^4Na^2$	97,66	97,82	—	98,25
Pt	55,98	56,29	56,61	56,80
Na	13,52	13,47	—	13,44

È duopo ora fermarci all'azione che il calore esercita sovra questi due platinati. Come si è detto, alla temperatura di 100° questi sali che, secondo la formola $PtO^3X'_2, 3H^2O$, conterrebbero tre molecole di acqua di cristallizzazione, non perdono nulla del proprio peso. Il sale di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$ comincia a perdere acqua

alla temperatura di 160° (soltantò il 30 %) mentre si calcola per $3H^2O$ il 14,41 %. Però fino dalla temperatura di 160°, temperatura minima a cui questo sale comincia a perdere acqua, compaiono nel sale quantità notevoli di carbonati, che copiosamente si accrescono con il progressivo elevarsi della temperatura, onde la piccola perdita di acqua viene in qualche modo compensata in peso dall'assorbimento dell'anidride carbonica atmosferica. Resta però in tal modo dimostrato all'evidenza che il sale $[Pt(OH)^6]K^2$ non può perdere tracce di acqua se non decomponendosi, scindendosi cioè in ossido di platino (o platino metallico a seconda della temperatura) ed in idrato di potassio che all'aria si carbonatizza, ma il sale stesso non tende menoma mente a divenire alla formola anidra PtO^3K^2, come dovrebbe qualora ad esso spet tasse la formola $PtO^3K^2, 3H^2O$. Riscaldando il sale a temperatura più elevata, senza però calcinarlo, si ha un residuo di platino metallico e si libera dell'idrato sodico (l'alcool etilico assume in tal caso dal residuo una forte reazione alcalina).

Il sale di sodio $[Pt(OH)^6]Na^2$ si comporta egualmente. Soltanto alla temperatura di 150-160° comincia a perdere sensibilmente di peso (l'1,05 %); a 200° perde il 2,50 %, mentre si calcola per $3H^2O$ il 15,76 %. Anche in tal caso fino dalla temperatura di 150-160°, temperatura minima a cui il sale comincia a perdere di peso, compaiono nel sale forti quantità di carbonati che indicano come anche il sale di sodio non possa perdere minima quantità di acqua senza demolirsi in ossido di platino, o platino metallico, ed in idrato sodico; onde è che tali perdite su accennate vengono anche in tal caso compensate in peso a causa della formazione del carbonato. Riscaldando rapidamente il sale sodico, a temperatura più elevata, si liberano forti quantità di idrato sodico e si separa platino metallico.

Non è possibile adunque eliminare dai due sali alcalini anche piccole quantità di acqua, senza che essi si decompongano; fatto che sta di per sè stesso a dimostrare che quest'acqua trovasi nei due sali come acqua di costituzione e non di cristallizzazione quale indicherebbe la formola $PtO^3X'_2, 3H^2O$.

II. Altro fatto che parla in grande favore della formola $[Pt(OH)^6]X'_2$ da darsi a questi sali, in luogo della formola $PtO^3X'_2, 3H^2O$, è il seguente.

La soluzione acquosa di uno dei due platinati, e per essi consideriamo il sale potassico $[Pt(OH)^6]K^2$, trattata con eccesso di soluzioni di nitrato di argento o di nitrato talloso, si decolora completamente nel mentre si formano i rispettivi sali di argento e talloso, come precipitati amorfi, fioccosi, insolubili in acqua, di colorito debolmente giallastro.

Se al sale potassico spetta effettivamente la formola $[Pt(OH)^6]K^2$ dovevano derivarsi per doppio scambio un sale di argento ed uno talloso, insolubili, amorfi, della formola $[Pt(OH)^6]X'_2$; se invece gli compete la formola corrispondente PtO^3K^2, $3H^2O$ si dovevano ottenere un sale di argento ed uno talloso della formola $PtO^3X'_2$. Le analisi che qui sotto riporto, eseguite sui sali di argento e talloso, stanno a provare che a questi effettivamente compete la formola $[Pt(OH)^6]X'_2$ e non la formola $PtO^3X'_2$.

I due sali di argento e talloso vennero lavati a temperatura ordinaria con acqua, per decantazione e quindi su filtro. Si seccarono all'aria su mattonella porosa e poi, prima di analizzarli, in stufa a 100°.

Sale di argento $[Pt(OH)^6]Ag^2$.

Seccato ha l'aspetto di una polvere lievemente giallognola, la quale, esposta lungamente alla luce, si imbrunisce alla superficie. Per analizzare questo sale se ne calcinava una determinata quantità all'aria od in crogiuolo di Rose in corrente di idrogeno: si pesava il residuo di platino ed argento, residuo che poi bollito lungamente con acido solforico concentrato lasciava indietro il solo platino. L'acqua si determinò calcinando la sostanza in corrente di aria secca e raccogliendola in tubi a cloruro di calcio.

I. Sostanza gr. 0,4934, gr. 0,3934 $Pt + Ag^2$, gr. 0,1896 Pt.
II. Sostanza gr. 0,4672, gr. 0,3728 $Pt + Ag^2$, gr. 0,1804 Pt.
III. Sostanza gr. 0,6306, gr. 0,5056 $Pt + Ag^2$, gr. 0,0702 H^2O.

Riferendosi a 100 parti di sostanza si ha:

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $[Pt(OH)^6]Ag^2$
$Pt + Ag^2$	79,72	79,79	80,18	80,18
Pt	38,44	38,61	—	38,00
Ag	41,31	41,18	—	42,10
H^2O	—	—	11,14	10,54

Sale di tallio $[Pt(OH)^6]Tl^2$.

È di aspetto identico a quello del sale di argento. La separazione del platino dal tallio fu effettuata scaldando la sostanza in corrente di acido cloridrico, raccogliendo opportunamente il cloruro di tallio che volatilizzava. Si pesò il residuo di platino ed il tallio allo stato di ioduro talloso.

I. Sostanza gr. 0,5100, gr. 0,1418 Pt, gr. 0,4724 ITl.
II. Sostanza gr. 0,4966, gr. 0,1388 Pt, gr. 0,4620 ITl.

	Trovato		Calcolato
	I	II	per $[Pt(OH)^6]Tl^2$
Pt	27,81	27,96	27,63
Tl	57,13	57,38	57,90

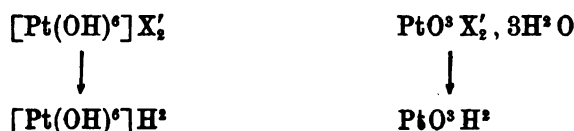
III. In favore della costituzione dei platinati secondo la formola $[Pt(OH^6)]X'_2$ e non $PtO^3X'_2, 3H^2O$, parla inoltre anche uno dei modi possibili di formazione di questi sali. Esponendo alla luce solare diretta un miscuglio di soluzioni di acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con forte eccesso di acque alcalino-terrose (Ba, Ca, Sr) ho potuto dimostrare [1] che si perviene ai sali dell'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$, vale a dire l'idrato alcalino-terroso sostituisce con altrettanti ossidrili soltanto cinque

[1] Gazz. chim. ital. *33*, 147, 1903.

dei sei atomi di cloro dell'acido $[PtCl^6]H^2$. Esponendo invece alla luce solare diretta miscugli di acido cloroplatinico $[PtCl^6]H^2$ con forte eccesso di soluzione di uno degli idrati alcalini (Na, Li), ho potuto provare che si giunge ai sali del tipo $[Pt(OH)^6]X'_2$, vale a dire, gli idrati alcalini, agendo più potentemente degli alcalino-terrosi, sostituiscono con altrettanti ossidrili tutti sei gli atomi di cloro dell'acido $[PtCl^6]H^2$.

Acidificando infatti con acido acetico questi ultimi miscugli, esposti soltanto per poche ore alla luce solare diretta, ne precipita abbondantemente l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, od altrimenti evaporandoli essi forniscono delle masse cristalline giallastre che, convenientemente purificate e liberate dall'eccesso di alcali e dal cloruro alcalino, all'analisi risultarono come sali dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$. Questa analogia di comportamento tra gli idrati alcalini e gli alcalino-terrosi, di fronte all'acido $[PtCl^6]H^2$ mi sembra porti una grande conferma alla costituzione dei platinati secondo la formola $[Pt(OH)^6]X'_2$.

IV. Inoltre tutti i platinati considerati, di potassio, di sodio, di argento, talloso, trattati a temperatura ordinaria con acido acetico riprecipitano nuovamente l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$ di cui sono i sali e dal quale derivano. Se ai platinati in luogo della formola $[Pt(OH)^6]X'_2$ spettasse invece la formola $PtO^3X'_2, 3H^2O$ si sarebbe dovuto avere l'acido PtO^3H^2:

$$[Pt(OH)^6]X'_2 \downarrow [Pt(OH)^6]H^2 \qquad PtO^3X'_2, 3H^2O \downarrow PtO^3H^2$$

e non l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$ di un grado di idratazione tanto superiore e la cui origine non troverebbe spiegazione qualora si volesse ammettere che le tre molecole di acqua trovansi nei platinati come acqua di cristallizzazione e non di costituzione.

Sotto l'influenza del calore o della luce solare diretta i sei atomi di cloro dell'acido $[PtCl^6]H^2$ vengono adunque, per azione degli idrati alcalini, rimpiazzati da altrettanti ossidrili e si generano i platinati riferibili all'acido $[PtOH)^6]H^2$. Il metodo migliore per preparare questi platinati allo stato di purezza, e col maggior rendimento possibile, è di bollire a lungo la soluzione dell'acido $[PtCl^6]H^2$ con forte eccesso di idrato potassico fino a completa soluzione del cloroplatinato precipitatosi. Si potrebbe poi provocare la cristallizzazione diretta del platinato, ma non si riesce in tal caso a separare il platinato stesso dal cloruro alcalino e si ha un rendimento minimo. Conviene meglio quindi, come si è detto, precipitare dalla soluzione del platinato formatosi, l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, lavare questo meglio che si può e scioglierlo di nuovo nell'idrato alcalino (di Na o di K).

I platinati considerati hanno il carattere di veri sali complessi; così il platinato di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$, oltre a fare nettamente, come si è visto, doppi scambi, con le soluzioni metalliche, trovasi in soluzione acquosa, anche molto diluita normalmente dissociato. Ciò ben risulta dalle determinazioni di conducibilità equivalente da me eseguite sulle soluzioni di platinato potassico a partire dalla diluizione $v = 32$ litri a giungere a $v = 1024$ litri. Tali determinazioni vennero eseguite alla tempe-

ratura di 25°, coi metodi noti, ed i valori di conducibilità trovansi qui sotto espressi in Ohm e rappresentano la media di due diverse serie di determinazioni. A lato per raffronto sono riportati i valori ottenuti da WALDEN [1] nelle determinazioni di conducibilità equivalente eseguite, in identiche condizioni, sulle soluzioni di cloroplatinato potassico $[PtCl^6]K^2$.

V	$^1/_2[Pt(OH)^6]K^2$		$^1/_2[PtCl^6]K^2$	
	μ	$\mu\infty$	μ	$\mu\infty$
32	93,7	118,1	116,0	142
64	97,6	116,4	122,3	142,3
128	102,1	117,2	127,3	143,3
256	105,5	116,8	131,2	143,2
512	109,6	117,1	134,4	142,4
1024	113,6	117,4	137,3	142,3
	$\Delta = 19,9$		$\Delta = 21,3$	

Il valore di Δ indica per la nota regolarità trovata da OSTWALD [2] e WALDEN [3] che il platinato di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$ esiste anche in soluzioni diluitissime come sale di un acido bibasico, normalmente dissociato. Esso non va soggetto affatto ad idrolisi (alla temper. di 25°), come lo dimostra anche il fatto che le determinazioni di conducibilità ripetutute per la soluzione $^N/_{32}$, a lunghi intervalli di tempo portavano sempre agli stessi valori. Il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$, e così dicasi degli altri platinati, si comporta perciò in riguardo alla stabilità in modo perfettamente analogo al cloroplatinato $[PtCl^6]K^2$; entrambi vanno considerati come veri sali complessi. Nella terza e quinta colonna del quadro di numeri su riportato, trovansi calcolati i valori limiti delle conducibilità equivalenti per i due sali $[PtCl^6]K^2$ e $[Pt(OH)^6]K^2$, dedotti dalle rispettive conducibilità equivalenti in base alla nota regola [4]:

$$\lambda\infty = \lambda_v + nC_v .$$

I valori limiti medi delle conducibilità equivalenti sono per un $^1/_2[Pt(OH)^6]K^2 = 124,7$ e per $^1/_2[PtCl^6]K^2 = 142,6$; da questi valori detraendo la conducibilità del ione $K = 74,0$ (25°), si hanno le seguenti velocità di migrazione dei due anioni:

$$^1/_2[PtCl^6] = 68,6$$
$$^1/_2[Pt(OH)^6] = 50,7 .$$

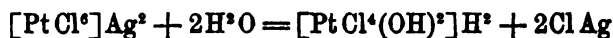
La velocità di migrazione di $^1/_2[PtCl^4(OH)^2]$, anione riferibile all'acido tetracloroplatinico $[PtCl^4(OH)^2]H^2$, è stata trovata da MIOLATI [5] eguale a 61,5, inter-

(1) Zeitschr. phys. Chemie, *2*, 76, 1888.
(2) OSTWALD, Zeitschr. phys. Chemie, *1*, 75, 1887; *2*, 901, 1888.
(3) WALDEN, Zeitschr. phys. Chemie, *1*, 529, 1887; *2*, 49, 1888.
(4) I valori numerici per questi calcoli furono tolti dall'ultima edizione del trattato di OSTWALD e LUTHER (Manuel pratique des mesures physico-chimiques, 10 ediz., pag. 459, 1904).
(5) MIOLATI, Zeitschr. anorg. Chemie, *22*, 458, 1900.

media cioè, come era da aspettarsi per questo anione misto, fra i due valori su riportati.

La grande stabilità dei platinati $[Pt(OH)^6]X'_2$ viene del resto posta in chiara luce anche dal comportamento del loro sale di argento $[Pt(OH)^6]Ag^2$.

Questo sale può essere riscaldato con acqua senza che soffra alterazioni nella sua composizione; ciò a differenza del cloroplatinato di argento $[PtCl^6]Ag^2$, il quale, come si sa [1], comincia a decomporsi a contatto dell'acqua già a temperatura ordinaria scindendosi nel modo seguente:

$$[PtCl^6]Ag^2 + 2H^2O = [PtCl^4(OH)^2]H^2 + 2ClAg$$

con formazione dell'acido tetracloroplatinico. Nel suo complesso l'anione $[Pt(OH)^6]''$ offre perciò maggiore stabilità dell'anione $[PtCl^6]''$.

Riassumendo adunque per sommi capi i fatti sperimentali più salienti in base ai quali deve attribuirsi ai platinati la formula $[Pt(OH)^6]X'_2$ e non la corrispondente $PtO^3X'_2, 3H^2O$, si ha:

1° Tanto il platinato di sodio $[Pt(OH)^6]Na^2$ che di potassio $[Pt(OH)^6]K^2$ non perdono nulla del proprio peso, tenuti lungamente in stufa a 100°.

Cominciano a perdere sensibilmente di peso soltanto alla temperatura di 150-160°, però a questa stessa temperatura, la minima a cui cominciano a perdere acqua, le molecole dei due platinati si demoliscono con separazione di alcali ed ossido di platino o platino metallico. Non tendono perciò affatto a ridursi (nè tanto meno si riducono) al tipo anidro $PtO^3X'_2$, come avrebbero dovuto se a loro spettasse la costituzione rappresentata dalla formola $PtO^3X'_2, 3H^2O$.

2° La formazione per doppio scambio dal sale di potassio, di sali completamente insolubili, amorfi, di argento e talloso, della formola $[Pt(OH)^6]Ag^2$ e $[Pt(OH)^6]Tl^2$ e non delle formole PtO^3Ag^2 e PtO^3Tl^2.

3° Il loro modo di formazione. Come partendo dall'acido $[PtCl^6]H^2$ con eccesso di acque alcalino-terrose, sotto l'azione del calore o della luce solare diretta, si arriva ai sali dell'acido monocloroplatinico $[PtCl(OH)^5]H^2$, così partendo dallo stesso acido con eccesso di idrati alcalini si giunge nelle stesse condizioni ai platinati, ossia ai sali dell'acido $[Pt(OH)^6]H^2$.

4° Tutti i platinati considerati, trattati con acido acetico, lasciano precipitare l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$ da cui derivano, e non l'acido PtO^3H^2.

5° L'esistenza infine di tutta la serie ormai completa di acidi ossidrilati e clorurati, serie che ho indicato in principio di questa Memoria.

[1] NORTON, Journ. prakt. Chemie, *2*, 469, 1870; *5*, 365, 1872. — JÖRGENSEN, Journ. prakt. Chemie, *16*, 345, 1877. — MIOLATI (loc. cit.).

II.

Stannati.

(In unione col dott. N. Parravano).

Gli stannati presi in esame appartengono, come si è detto, al tipo finora rappresentato dalla formola $SnO^3X'_2, 3H^2O$: furono anzitutto considerati gli stannati di potassio e di sodio.

Parte storica.

Intorno agli stannati di potassio e di sodio cui oggidì si attribuisce universalmente la formola $SnO^3X'_2, 3H^2O$, esistono numerose Memorie riferentisi più che altro ai metodi di preparazione, essendo, come è noto, lo stannato di sodio (Präparirsalz) largamente adoperato nella industria tintoria. Basterà perciò citare i lavori di Moberg (1), di Frémy (2), di Marignac (3), di Ordway (4) e di Ditte (5). Sono tutti concordi questi chimici nello attribuire ai due stannati la formola $SnO^3X'_2, 3H^2O$, tranne Frémy (loc. cit.) che ha loro assegnato la formola $SnO^3X'_2, 4H^2O$, stabilendo però, nelle analisi da lui eseguite, la percentuale dell'acqua soltanto per differenza.

I modi di preparazione dei due stannati alcalini, lasciando in disparte quelli industriali, sono varî. Possono ottenersi agendo con un eccesso di idrato alcalino su una soluzione di cloruro stannico (Frémy), sia facendo agire l'idrato stannoso in soluzione concentrata e bollente di idrato potassico (Ditte), sia fondendo l'acido metastannico con un eccesso di idrato alcalino (Frémy, Marignac).

Parte sperimentale.

È quest'ultimo metodo, perfezionato da Marignac sulle orme delle indicazioni di Frémy, più conveniente e preferibile agli altri per il maggior rendimento, che noi abbiamo seguito per la preparazione dei due sali alcalini.

Per purificare gli stannati di sodio e di potassio, dopo averli raccolti e ben spremuti alla pompa, si agitavano rapidamente e per un paio di volte, con poca acqua fredda, e si lavavano quindi con alcool etilico (nel quale sono insolubili) fino

(1) Berzelius Jahresberichte, *22*, 142.
(2) Ann. de chimie et phys. [3] *12*, 460; *23*, 385.
(3) Ann. min. (5) *15*, 278; Oeuvres complètes, I, 591.
(4) Jahresberichte, 1865, 240.
(5) Ann. de chimie et phys. [5] *27*, 145.

a scomparsa completa della reazione alcalina. I due stannati così ottenuti e purificati venivano seccati prima su cloruro di calcio, poi in stufa a 100°, ove, lungamente mantenuti, non perdono nulla del proprio peso. Le analisi che qui sotto riportiamo furono infatti da noi eseguite sui sali seccati a 100°, e confermano per questi sali la composizione $SnO^3X^2, 3H^2O$.

Intorno alla determinazione dell'acqua, da dedursi dalla perdita di peso per arroventamento del sale, ci soffermeremo più sotto estesamente.

Sale di sodio $SnO^3Na^2, 3H^2O$.

I. Sost. gr. 0,4128, gr. 0,2318 SnO^2, gr. 0,1618 SO^4Na^2.
II. » » 0,4731, » 0,2648 » » 0,1845 »
III. » » 0,9439, » 0,1896 H^2O.
IV. » » 1,2337, » 0,2542 »

	Trovato				Trovato	Calcolato
	I	II	III	IV	da Marignac	per $SnO^3Na^2, 3H^2O$
Sn	44,18	44,03	—	—	43,93	44,44
Na	17,60	17,51	—	—	17,04	17,29
H^2O	—	—	20,09	20,06	20,51	20,27

Sale di potassio $SnO^3K^2, 3H^2O$.

I. Sost. gr. 0,4746, gr. 0,2366 SnO^2, gr. 0,2774 SO^4K^2.
II. » » 0,4428, » 0,2210 » » 0,2590 »

	Trovato		Trovato	Calcolato
	I	II	da Marignac	per $SnO^3K^2, 3H^2O$
Sn	39,22	39,27	39,98	39,65
K	26,24	26,26	26,27	26,20
H^2O	—	—	—	18,09

È d'uopo ora, come si è detto, fermarci sull'azione che il calore esercita sovra questi due stannati alcalini, perchè è appunto da questa azione che si deduce una prima prova che le tre molecole di acqua degli stannati non possono riguardarsi come acqua di cristallizzazione.

I. Alla temperatura di 100° i due stannati di sodio e di potassio, che pure contengono tre molecole di acqua, non perdono nulla del proprio peso, nè alterano affatto il loro aspetto cristallino, nè la loro solubilità in acqua.

Lo *stannato di sodio* $SnO^3Na^2, 3H^2O$ comincia a perdere acqua soltanto alla temperatura di 140° (0,94 %). Occorre un forte arroventamento per raggiungere la costanza di peso, nel quale caso il sale, come vedesi dalle analisi su riportate, abbandona quantitativamente le sue tre molecole di acqua. Lo stannato così arroventato acquista l'aspetto di una polvere bianca, opaca, la quale non contiene idrato sodico

(l'alcool non assume reazione alcalina), nè tracce sensibili di carbonato. Trattando con acqua alla temperatura ordinaria questo sale residuo (SnO^3Na^2), non si avverte la minima elevazione di temperatura. A grande differenza però dal sale sodico idrato ($SnO^3Na^2, 3H^2O$), il sale calcinato non accenna menomamente a sciogliersi nell'acqua, e, per quanto agitato, torna rapidamente a fondo del recipiente come polvere pesante. Se si eleva la temperatura, l'acqua provoca subito un idrolisi ed il residuo si trasforma in acido stannico, idrolisi che del resto si manifesta notevolmente anche a temperatura ordinaria.

Lo stannato sodico $SnO^3Na^2, 3H^2O$ allorchè ha perso per azione del calore tre molecole di acqua, si trasforma adunque in uno stannato (SnO^3Na^2) che non solo non si scioglie inalterato nell'acqua, e tanto meno ha quindi tendenza a riassumere le tre molecole di acqua per tornare al sale originario, ma viene con rapidità dall'acqua stessa decomposto, a grande differenza del sale idrato che si scioglie notevolmente nell'acqua, ove a temperatura ordinaria subisce un' idrolisi di grado molto minore.

Ma ancor più notevole è l'azione del calore sullo *stannato di potassio* $SnO^3K^2, 3H^2O$.

Già FRÉMY (loc. cit.), nella sua prima Memoria sugli stannati, sebbene non abbia dosato l'acqua direttamente nei sali di sodio e di potassio, si era accorto che lo stannato di potassio esposto alla temperatura del rosso, si disidrata solo in parte (egli giunse ad una perdita del 17 %) e che, calcinato a lungo, una parte della potassa diventava libera. Ad onta di tutto ciò FRÉMY ammise che lo stannato di potassio poteva ridursi anidro e che era soltanto questione di raggiungere per ciò temperature molto elevate.

MARIGNAC (loc. cit.) asserisce che lo stannato di potassio « perde per calcinazione l'acqua senza fondere, ma la perdita di peso non rappresenta tutta l'acqua allontanata, perchè vi è sempre assorbimento di anidride carbonica, tanto è vero che il residuo fa sempre effervescenza con gli acidi e non si ridiscioglie che molto incompletamente ». A lato delle analisi da noi eseguite sugli stannati di sodio e di potassio, abbiamo riportato, come sopra vedesi, le percentuali trovate da MARIGNAC, dalle quali emerge infatti che mentre egli è riuscito, come noi, a dosare l'acqua nel sale sodico, non riporta affatto la percentuale dell'acqua relativa al sale di potassio, in coincidenza con quello che anche a noi è occorso sperimentalmente.

DITTE (loc. cit.) ammette infine che lo stannato di potassio perda per azione del calore in prima fase due molecole di acqua, e che riscaldando più oltre si giunga a disidratare completamente il sale. Il sale anidro, secondo DITTE, tende inoltre a riassorbire con molta avidità l' umidità atmosferica e mescolato con piccola quantità di acqua vi si combina istantaneamente svolgendo calore. Anche nelle sue *Leçons sur les métaux* (II, 319) DITTE conferma che lo stannato di potassio può col calore ridursi anidro ed in tale stato è avidissimo di riassorbire l'acqua.

Trovansi adunque concordi FRÉMY, MARIGNAC e DITTE nello ammettere che il sale $SnO^3K^2, 3H^2O$ possa per forte calcinazione ridursi anidro. Le asserzioni di questi chimici sono in completo disaccordo con i risultati delle nostre prove sperimentali, risultati che per sommi capi così possono riassumersi.

Lo stannato di potassio $SnO^3K^2, 3H^2O$ comincia a perdere acqua soltanto alla temperatura di 130° (1,4 %; a 150° 1,97 %). Arroventato per lungo tempo, in atmosfera d'aria esente di anidride carbonica, dette un massimo di perdita corrispondente al 14,50 %, ben lungi quindi da 18,09 % calcolato per tre molecole di acqua.

Dopo la calcinazione esso perde completamente, come il sale sodico, l'aspetto lucente e si riduce ad una polvere bianca, opaca, pesante.

Anche soltanto riscaldato a 130-140° (temperatura minima a cui comincia a perdere acqua), accenna già notevolmente a decomporsi in acido stannico e potassa (idrato e carbonato), vale a dire non possono col calore allontanarsi tracce di acqua dalla molecola dello stannato di potassio senza che questa si demolisca.

Calcinato fortemente, ma per breve tempo (10 minuti) lascia un residuo che contiene fortissima quantità d'idrato e carbonato di potassio. Trattato questo residuo con poca acqua è pur vero, come dice Ditte, che si ha una forte elevazione di temperatura, nel mentre resta indisciolto, come sostanza polverosa, il biossido di stagno parzialmente o totalmente scisso dallo stannato. Ma questa elevazione di temperatura provocata dall'acqua sul residuo, è da Ditte erroneamente attribuita allo stannato anidro, avidissimo, secondo tale Autore, di ricombinarsi con l'acqua. Essa è invece dovuta unicamente all'idrato di potassio, risultante dalla demolizione dello stannato. Tanto è vero che se si esaurisce prima tale residuo con alcool assoluto (il quale non asporta in tal caso tracce di stagno, ma unicamente l'idrato potassico) e si torna a seccare nuovamente (a 130°) non si ha poi con l'acqua alcuna elevazione di temperatura.

Se si calcina poi lo stannato fortemente e per lo spazio di più ore, il residuo contiene soltanto fortissime quantità di carbonati (l'alcool non assume più reazione alcalina). Trattando con poca acqua questo residuo non si nota che una piccola elevazione di temperatura, venendosi così a confermare che la causa del forte riscaldamento è unicamente da attribuirsi all'idrato di potassio, in quest'ultimo caso completamente trasformato in carbonato dalla più lunga calcinazione all'aria. L'acqua non asporta da questo ultimo residuo tracce di stagno, il che dimostra che la scissione dello stannato per opera di una prolungata calcinazione è totale.

In modo del tutto analogo adunque a quello che abbiamo visto avvenire per il platinato di potassio, anche lo stannato appena comincia a perdere acqua al di sopra di 100° si demolisce con liberazione di potassa.

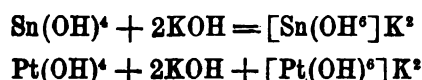
L'insieme di questi fatti sperimentali ora esposti per gli stannati di sodio e di potassio, parla in grande favore di un ufficio ben più notevole tenuto dalle tre molecole d'acqua nella costituzione dei due stannati, di quello che possa essere esercitato dall'acqua di cristallizzazione.

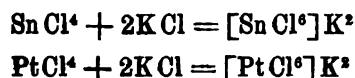
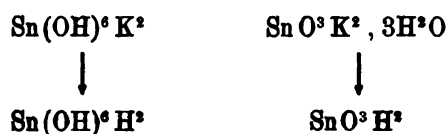
Proseguiamo oltre nella esposizione di altri fatti sperimentali sui quali si poggia la dimostrazione della costituzione degli stannati secondo la formola $[Sn(OH)^6]X'_2$.

II. Per quello che già si è visto sappiamo che gli ossi-platinati alcalini $[Pt(OH)^6]X^2$ e per essi consideriamo il sale potassico $[Pt(OH)^6]K^2$, possono ottenersi bollendo l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ con forte eccesso d'idrato potassico. A somiglianza di ciò partendo dall'acido clorostannico $SnCl^6H^2$, ed agendovi con

eccesso d'idrato di potassio, si doveva giungere allo stannato $[Sn(OH)^6]K^2$. L'operare però in soluzioni acquose di acido clorostannico, per lo stato di scissione molecolare in cui questo vi si trova, equivaleva ad agire su soluzioni di cloruro stannico. FRÉMY (loc. cit.) ha infatti ottenuto lo stannato di potassio $SnO^3K^2, 3H^2O$ per azione di un eccesso di idrato potassico sulle soluzioni di cloruro stannico. Noi abbiamo ripetuto questo metodo di preparazione e siamo giunti infatti ad ottenere, sebbene con pessimo rendimento, lo stannato di potassio $SnO^3K^2, 3H^2O$, lo stesso che ottiensi dalla fusione dell'acido metastannico con idrato potassico.

Può adunque ottenersi lo stannato di potassio $Sn(OH)^6K^2$ dalle soluzioni di cloruro stannico, come il platinato di potassio $Pt(OH)^6K^2$ può anche essere ottenuto dalle soluzioni di cloruro platinico. Per conveniente azione dell'idrato potassico sui due cloruri platinico e stannico, si precipitano in prima fase gli idrati, stannico $Sn(OH)^4$ e platinico $Pt(OH)^4$, i quali si sciolgono poi nell'eccesso di alcali, combinandosi a due molecole di idrato alcalino, per formare i relativi stannati e platinati complessi:

$$Sn(OH)^4 + 2KOH = [Sn(OH^6]K^2$$
$$Pt(OH)^4 + 2KOH + [Pt(OH)^6]K^2$$

in modo perfettamente analogo a come i cloruri stannico e platinico si addizionano a due molecole di cloruro di potassio per dare il clorostannato ed il cloroplatinato:

$$SnCl^4 + 2KCl = [SnCl^6]K^2$$
$$PtCl^4 + 2KCl = [PtCl^6]K^2$$

III. A somiglianza di come dal platinato potassico $[Pt(OH)^6]K^2$ abbiamo visto che può ottenersi per azione di un acido più forte il relativo acido $[Pt(OH)^6]H^2$, doveva ottenersi dalla soluzione dello stannato potassico $[Sn(OH)^6]K^2$ l'acido esaossistannico $[Sn(OH)^6]H^2$. Alla formola dello stannato di potassio $[Sn(OH)^6]K^2$ equivale, come ben vedesi, anche la formola $SnO^3K^2, 3H^2O$. Se, come dovremo ammettere, le tre molecole d'acqua dello stannato invece di essere di cristallizzazione fanno parte integrante della costituzione del sale, dovremo avere nell'un caso o nell'altro, due prodotti ben diversi allorchè provochiamo da questo sale, con un acido più energico, la precipitazione del relativo acido stannico, e precisamente:

vale a dire nel primo caso un biossido combinato a quattro molecole di acqua, nell'altro un biossido combinato ad una sola molecola di acqua, in modo del tutto analogo a quello che si è detto parlando del platinato.

A tal uopo abbiamo precipitato dalla soluzione di stannato di potassio l'acido stannico a mezzo di una limitata quantità di acido cloridrico diluito, raffreddando con ghiaccio. Si lavò con acqua fredda ripetutamente il precipitato gelatinoso, si raccolse su filtro e si lasciò seccare su carta, esposto all'aria. Dopo sei giorni di tale essiccamento la percentuale dell'acqua era divenuta costante e tale si mantenne anche dopo un mese di tempo. Riportiamo i risultati delle analisi eseguite su quest'acido stannico; il biossido di stagno, residuo della calcinazione, veniva ripesato per controllo anche dopo di avere asportato con acqua le piccole impurezze rimaste aderenti al precipitato, malgrado i numerosi lavaggi.

I. Sost. gr. 0,3154, gr. 0,2524 SnO^2
II. » » 0,4431, » 0,0818 H^2O
III. » » 0,5632, » 0,1052 »

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $SnO^2, 2H^2O$
Sn	62,96	—	—	63,54
H^2O	—	18,46	18,67	19,36

L'acido stannico analizzato corrisponde quindi alla formula $SnO^2, 2H^2O$ ossia $Sn(OH)^4$. È da notarsi che la precipitazione dell'acido stannico dallo stannato di potassio era già stata fatta da Frémy, il quale ottenne un idrato che, seccato *nel vuoto*, aveva la composizione SnO^2, H^2O. Infatti se l'idrato $Sn(OH)^4$, stabile nelle ordinarie condizioni di temperatura e pressione, si espone allo stato polverizzato all'azione del vuoto, esso si riduce ad SnO^3H^2. Per la dimostrazione che ci eravamo proposti giova egualmente l'aver ottenuto dallo stannato $Sn(OH)^6K^2$ l'idrato $Sn(OH)^4$ che non può certamente supporsi derivato dal tipo $SnO^3K^2, 3H^2O$, il quale avrebbe dovuto dare l'idrato SnO^3H^2.

Sotto questo aspetto riscontriamo adunque un minor grado di stabilità delle forme stanniche in confronto di quelle platiniche. Infatti mentre l'acido esa-ossiplatinico $Pt(OH)^6H^2$, che deriva dai platinati, è stabile e si riduce ad idrato platinico $Pt(OH)^4$ soltanto scaldato per qualche tempo a 100°, l'acido esa-ossistannico $Sn(OH)^6H^2$, che dovrebbe derivare dagli stannati, è logico ammettere sia instabile, e che, anche soltanto esposto all'aria, si riduca ad idrato stannico $Sn(OH)^4$.

In concordanza con ciò vedremo più oltre, dallo studio delle conducibilità elettriche delle soluzioni acquose diluite, risultare parimenti la minore stabilità degli stannati in confronto dei platinati.

IV. Un altro fatto molto notevole che parla in favore della nuova interpretazione da darsi agli stannati secondo la formola $Sn(OH)^6X^2$ in luogo della formola $SnO^3X^2, 3H^2O$, ci vien fornito dalla costituzione di alcuni stannati insolubili che prendono origine allorchè si mescola una soluzione di stannato alcalino con quella di alcuni sali metallici. Nel doppio scambio che avviene nella formazione dei sali insolubili, se veramente allo stannato di potassio spetta la formola $[Sn(OH)^6]K^2$,

devonsi evidentemente ottenere stannati insolubili del tipo $[Sn(OH)^6]X''$, mentre se allo stannato compete la formola $SnO^3K^2, 3H^2O$, devonsi ottenere stannati insolubili del tipo SnO^3X''.

Come sotto vedremo, i sali da noi analizzati appartengono tutti al tipo $[Sn(OH)^6]X''$, confermando appieno che la costituzione che compete a tali stannati è veramente quella rappresentata dalla formola ossidrilata.

Al contrario degli stannati di sodio e di potassio, dei quali, come abbiamo visto, si sono occupati parecchi chimici, può ben dirsi che gli unici che si siano occupati di altri stannati metallici (sempre del tipo α) sieno Ditte (1) e Moberg (loc. cit.) dei cui lavori terremo conto al momento opportuno.

Abbiamo tentato anzitutto di preparare lo stannato di argento, precipitando con soluzione di nitrato di argento una soluzione di stannato di potassio, purissimo. Si forma in tal caso un precipitato amorfo, fioccoso, di colorito dapprima giallognolo, che poi imbrunisce rapidamente ed allo stato di secchezza assume un colorito marrone-scuro. Le numerose analisi eseguite su questo sale, seccato su acido solforico fino a costanza di peso, sebbene si avvicinino moltissimo ai valori che si calcolano per la formula $Sn(OH)^6Ag^2$, non offrono le coincidenze desiderabili, in seguito ad alterazioni cui va forse soggetto il sale.

Una notevole stabilità è assunta al contrario dal:

Sale di piombo $[Sn(OH)^6]Pb$.

È un precipitato bianco, amorfo, che si ottiene aggiungendo, a temperatura ordinaria, ad una soluzione di stannato di potassio una soluzione di nitrato di piombo. Lavato con acqua a temperatura ordinaria e seccato su acido solforico fino a costanza di peso, si mostra come una polvere bianca, amorfa, solubile in acido nitrico diluito (tipo α-stannico) e del tutto insolubile in acqua. Il sale mantenuto in istufa a 100° non perde che il 0,95 % di acqua (calcolato per $3H^2O = 12,65$ %), e perde tutta l'acqua soltanto per arroventamento.

I.	Sost. gr.	0,3102,	gr. 0,2190	$PbSO^4$,	gr. 0,1079	SnO^2.
II.	» »	0,4541,	» 0,3208	»	» 0,1568	»
III.	» »	0,6581,	» 0,0771	H^2O.		
IV.	» »	0,7026,	» 0,0836	»		

	Trovato				Calcolato
	I	II	III	IV	per $Sn(OH)^6Pb$
Sn	27,37	27,17	—	—	27,72
Pb	48,23	48,25	—	—	48,40
H^2O	—	—	11,72	11,90	12,65

Il sale di piombo $[Sn(OH)^6]Pb$ allorchè è stato calcinato ed ha perso le tre

(1) Comptes-Rend., *96*, 701 (1883).

molecole di acqua assume un colorito giallognolo. Non è improbabile che esso si trovi così ridotto ad un miscuglio di biossido di stagno e protossido di piombo. Il sale di piombo disidratato, tenuto a contatto lungamente con acqua, sia a temperatura ordinaria, che all'ebollizione, rimane del tutto inalterato come polvere pesante, giallognola, al fondo del recipiente.

Sale di bario $[Sn(OH^6]Ba, 4H^2O$.

Uno stannato di bario della formola $SnO^3Ba, 6H^2O$ era stato ottenuto da Moberg (loc. cit.) per doppio scambio dello stannato di potassio con cloruro di bario.

Altro stannato di bario era pure stato ottenuto da Ditte (loc. cit.), mescolando una soluzione di stannato di potassio con una satura di barite, ovvero con una soluzione satura a freddo di cloruro di bario. Ditte assegnò allo stannato di bario così ottenuto la formola $SnO^2, 2BaO, 10H^2O$. Noi abbiamo preparato questo sale di bario per doppio scambio dal sale potassico. Venne ben lavato con acqua a temperatura ordinaria, seccato prima all'aria e poi su cloruro di calcio fino a costanza di peso. È un sale bianco, polveroso, completamente solubile in acqua, ed esente di carbonati.

Le nostre analisi portano ad ammettere per questo sale la formola $[Sn(OH)^6]Ba, 4H^2O$, la quale differisce da quella assegnata da Moberg allo stesso sale solo per una molecola di acqua in più (È da notarsi in proposito che Moberg non ha dosato l'acqua in questo sale).

A 100° (ovvero nel vuoto su acido solforico), esso, come si vedrà dalle analisi, perde *soltanto* quattro molecole di acqua, riducendosi ad $[Sn(OH)^6]Ba$ e mostrando così nettamente la differenza che esiste fra le tre molecole di acqua interna di costituzione (resistenti a 100°) e le quattro molecole che si allontanano a 100° e che vanno considerate come acqua di cristallizzazione.

Il sale seccato a 100° mantiene perfettamente il suo colorito bianco, mentre il residuo della calcinazione presenta un colorito lievemente giallognolo; è esente da carbonati. Abbiamo seguito di venti in venti gradi, fino a 200°, la perdita dell'acqua che subisce questo sale di bario con l'elevarsi successivo della temperatura, e riportiamo qui sotto i dati ottenuti i quali dimostrano, come vedesi, che alla temperatura di 200° persiste ancora nel sale una quantità di acqua superiore a quella corrispondente ad una molecola:

Temperatura	Perdita acqua °/₀ di sostanza	Molec. H^2O per 1 molec. di sale
100°	17,17	4 (calc. 16,76)
120°	19,27	
140°	20,85	5 (calc. 20,95)
160°	21,62	
180°	22,65	6 (calc. 25,14)
200°	23,80	

Ed ecco i risultati ottenuti nell'analisi:

I.	Sost. gr. 0,4596,	gr. 0,1566	SnO^2,	gr. 0,1490	SO^4Ba.
II.	» » 0,3642,	» 0,1245	»	» 0,1968	»
III.	» » 0,3492,	» 0,1208	»	» 0,1895	»
IV.	» » 0,4000,	» 0,0692	H^2O,	(a 100°).	
V.	» » 0,9407,	» 0,1603	»	»	
VI.	» » 0,3443,	» 0,1008	»	(per calcinaz.).	
VII.	» » 0,6674,	» 0,2017	»	»	

	Trovato							Calcolato per	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	$[Sn(OH)^6]Ba$ $4H^2O$	$SnO^2 2BaO$ $10H^2O$
Sn	26,82	26,91	27,22	—	—	—	—	27,56	18,59
Ba	31,85	31,76	31,90	—	—	—	—	31,95	43,11
H^2O (a 100°)	—	—	—	17,3	17,04	—	—	16,76	—
H^2O (per calcin.)	—	—	—	—	—	29,27	30,17	29,32	28,27

Spetta quindi allo stannato di bario la formola $[Sn(OH)^6]Ba, 4H^2O$, in corrispondenza del tipo $[Sn(OH)^6]K^2$ da cui deriva. A lato delle percentuali calcolate per tale formola, abbiamo posto a raffronto le percentuali che si calcolano secondo la formola $SnO^2, 2BaO, 10H^2O$ che Ditte (loc. cit.) ha creduto di attribuire a questo sale, pur preparato nelle identiche condizioni seguite da noi. Si vedrà così la grande discordanza esistente fra le percentuali risultanti dalle nostre analisi e quelle calcolate secondo la formola di Ditte.

Sale di calcio $[Sn(OH)^6]Ca$.

Moberg ha pure preparato per doppio scambio uno stannato di calcio cui assegnò la formola $SnO^3Ca, 4H^2O$.

Anche Ditte ha ottenuto uno stannato di calcio al quale ha attribuito la formola $SnO^2, CaO, 5H^2O$. Noi abbiamo preparato questo sale versando una soluzione di stannato di potassio in un eccesso di soluzione di cloruro di calcio. Si ottiene così, nell'atto in che si mescolano le soluzioni, un precipitato gelatinoso il quale a 100°, su bagno-maria, acquista un aspetto polveroso, bianco, finemente cristallino. È solubile in acido nitrico diluito, insolubile in acqua. Seccato anche nel vuoto su acido solforico si mantiene della formola $[Sn(OH)^6]Ca$, ed a 100° non subisce che una perdita insignificante di acqua, corrispondente al 0,36 %. Anche per questo sale abbiamo voluto seguirne la perdita di acqua, con elevazioni successive di temperatura, fino a 200°.

Ecco i risultati:

Temperatura	Perdita acqua % di sostanza	Molec. H^2O per 1 di $[Sn(OH)^6]Ca$
100°	0,36	—
120°	2,50	—
140°	2,84	—
160°	3,00	—
200°	4,63	1 (calc. 6,91 %).

A 200° il sale $[Sn(OH)^6]Ca$ non giunge, come vedesi, a perdere neppure una delle tre molecole di acqua di costituzione; occorre infatti una calcinazione prolungata per allontanare dal sale tutta l'acqua.

I. Sost. gr. 0,3843, gr. 0,2192 SnO^2, gr. 0,0842 CaO.
II. » » 0,3453, » 0,1963 » » 0,0774 »
III. » » 0,7210, » 0,1524 H^2O.
IV. » » 0,5451, » 0,1158 »

	Trovato				Calcolato per	
	I	II	III	IV	$[Sn(OH)^6]Ca$	$SnO^2, CaO, 5H^2O$
Sn	44,87	44,73	—	—	45,48	39,95
Ca	15,65	16,02	—	—	15,35	13,49
H^2O	—	—	21,14	21,25	20,75	30,36

Come vedesi la formola che noi attribuiamo allo stannato di calcio $[Sn(HO)^6]Ca$ differisce per una sola molecola di acqua da quella di Moberg e per due da quella di Ditte.

Sale di stronzio $[Sn(OH)^6]Sr$.

Anche lo stannato di stronzio era stato già preparato da Ditte, e questi gli aveva assegnata la formola $2SnO^2, 3SrO, 10H^2O$. Fu preparato come fece Ditte aggiungendo una soluzione satura di idrato di stronzio o di cloruro di stronzio ad una di stannato di potassio, o anche viceversa. Di aspetto gelatinoso tostochè si precipita, diviene su bagno-maria di aspetto finemente polveroso, bianco. Nel vuoto su acido solforico non perde nulla del proprio peso. A 100° non perde che il 0,33 % di acqua; a 140° il 0,97 % (calcolato per una molecola di acqua = 5,85 %). Occorre anche qui una calcinazione per allontanare completamente le tre molecole di acqua.

I. Sost. gr. 0,3463, gr. 0,1660 SnO^2, gr. 0,2045 SO^4Sr.
II. » » 0,3988, » 0,2346 SO^4Sr.
III. » » 0,6138, » 0,1088 H^2O.
IV. » » 0,5330, » 0,0956 »

	Trovato				Calcolato per	
	I	II	III	IV	$[Sn(OH)^6]Sr$	$2SnO^2 3SrO, 10H^2O$
Sn	37,71	—	—	—	33,45	29,92
Sr	28,15	28,04	—	—	28,43	38,18
H^2O	—	—	17,72	17,90	17,54	22,75

Pure in questo caso il sale di stronzio appartiene allo stesso tipo di stannati $[Sn(OH)^6]X''$ e le nostre analisi discordano dalla formola che Ditte ha attribuito a tale stannato.

L'esistenza degli stannati insolubili ora descritti, appartenenti tutti al tipo $[Sn(OH^6)]X''$, ed in cui l'anione $[Sn(OH)^6]''$ è passato sempre per doppio scambio

dall'una all'altra molecola, precisamente come per i platinati l'anione $[Pt(OH)^6]''$, conferma in modo non dubbio la nuova interpretazione da darsi alla costituzione degli stannati.

Abbiamo voluto anche determinare la conducibilità elettrica equivalente di soluzioni di $^1/_2[Sn(OH)^6]K^2$ a partire dalla diluizione $v = 32$ litri a giungere a $v = 1024$ litri. I valori qui riportati sotto μ_1 e μ_2 riferisconsi a due pesate differenti dello stesso sale. Temperatura del termostato = 25° C.

	$^1/_2[Sn(OH)^6]K^2$			$^1/_2[Pt(OH)^6]K^2$
V	μ_1	μ_2	μ (media)	μ
32	97,4	97,5	97,5	93,7
64	105,4	105,6	105,5	97,6
128	112,6	113,2	112,9	102,1
256	122,4	122,8	122,6	105,5
512	134,7	134,9	134,8	109,6
1024	155,1	155,8	155,5	113,6
		$\Delta = 58,0$		$\Delta = 19,9$

Per la soluzione di stannato cui si riferiscono i valori indicati sotto μ_1 vennero ripetute le determinazioni di conducibilità dopo i seguenti intervalli di tempo:

V	dopo 24 ore	dopo 72 ore	dopo 120 ore	dopo 168 ore
32	108,0	114,0	119,5	119,7
64	115,8	130,5	136,5	136,4

I valori trovati di conducibilità equivalente, e quello di $\Delta = 58,0$, stanno ad indicare che lo stannato di potassio, a grandi diluizioni acquose è in parte idrolizzato, il che vien reso anche evidente dall'aumento graduale dei valori stessi della conducibilità per la soluzione N/32 dopo determinati periodi di tempo.

A lato dei valori ottenuti per lo stannato abbiamo riportati quelli trovati per le soluzioni di platinato potassico $^1/_2[Pt(OH)^6]K^2$, dai quali ultimi emerge che questo sale complesso segue invece la nota legge di Ostwald e Walden e trovasi anche a grandi diluizioni acquose normalmente dissociato, concordemente a tutta la maggiore stabilità che domina in questi composti platinici in confronto dei relativi stannici.

Riassumendo per sommi capitoli i fatti sperimentali sovra esposti, in base ai quali crediamo debba attribuirsi agli stannati la formola $[Sn(OH)^6]X'_2$, si ha:

1°. L'azione del calore sugli stannati solidi:

a) Gli stannati esaminati, tutti del tipo $[Sn(OH)^6]X'_2$ non perdono nulla o quantità insignificanti delle loro tre molecole di acqua alla temperatura di 100°. È necessario in ogni caso una forte elevazione di temperatura per allontanare dagli stannati le tre molecole di acqua; in alcuni casi (ad es.: sale di calcio) alla temperatura di 200° non si allontana ancora una quantità di acqua corrispondente ad una molecola.

b) Il sale potassico $[Sn(OH)^6]K^2$ appena comincia a perdere acqua a 140°, comincia pure a decomporsi in acido stannico e potassa; non possono cioè allontanarsi da esso quantità anche minime di acqua, senza che la sua molecola si demolisca, in perfetto accordo con quello che avviene per il platinato potassico $[Pt(OH)^6]K^2$.

c) I sali di sodio (solubile), di piombo, calcio, stronzio, e bario (insolubili) dopo aver perso con una forte elevazione di temperatura le tre molecole di acqua, ed essersi ridotti al tipo $SnO^3X'_2$, messi poi in contatto con acqua, non accennano affatto a riassumere le tre molecole di acqua e tornare al tipo originario.

2°. Come il platinato potassico $[Pt(OH)^6]K^2$ può ottenersi anche dal cloruro platinico $PtCl^4$, per azione di idrato di potassio in eccesso, così lo stannato di potassio $[Sn(OH)^6]K^2$ può derivarsi parimenti dal cloruro stannico $SnCl^4$.

3°. L'idrato stannico $Sn(OH)^4$ proveniente dallo stannato di potassio $[Sn(OH)^6]K^2$ presenta un grado di idratazione tale che non potrebbe immaginarsi derivato dal tipo $SnO^3K^2, 3H^2O$.

4°. La facoltà che ha il sale $[Sn(OH)^6]K^2$ di fare doppi scambi con le soluzioni metalliche dando origine a stannati insolubili, nei quali si conserva sempre il tipo $[Sn(OH)^6]X'_2$.

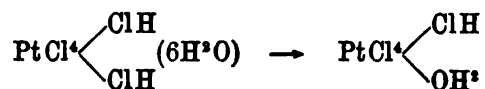
5°. L'isomorfismo infine delle forme cristalline dello stannato $[Sn(OH)^6]K^2$ col platinato $[Pt(OH^6]K^2$, del quale ci occuperemo più oltre.

I platinati $[Pt(OH)^6]X'_2$ e gli stannati $[Sn(OH)^6]X'_2$ di cui ci siamo occupati trovansi come si è detto in stretta relazione di genesi con i relativi clorosali $[PtCl^6]X'_2$ ed $[SnCl^6]X'_2$, relazione la quale nel caso dei composti platinici viene potentemente rafforzata dall'esistenza della serie di acidi intermedi, ossidrilati e clorurati, già accennata in principio di questa Memoria. Esistono fra l'acido clorostannico $[SnCl^6]H^2$ e l'acido stannico $[Sn(OH)^6]H^2$ dei termini intermedi misti analoghi a quelli platinici? Per quanto *a priori* la stabilità molto più limitata del complesso stannico di fronte a quello platinico facessero ritenere ciò molto difficile, pur tuttavia noi abbiamo eseguito in proposito alcune ricerche, che qui sotto riassumiamo, prendendo di mira l'acido clorostannico e mantenendolo in raffronto con l'acido cloroplatinico, ricerche che avevano se non altro l'obbiettivo di fornire un po' di notizie intorno all'acido clorostannico poco o nulla conosciuto.

Perfetta è invero l'analogia che offrono in rapporto alla loro composizione i due acidi cloroplatinico $PtCl^6H^2, 6H^2O$ e clorostannico $SnCl^6H^2, 6H^2O$ descritto il primo da Weber (1) nel 1867, l'altro più recentemente da Engel (2) nel 1886. Tale apparente identità trova però un contrasto, ben più marcato di quello che poteva *a priori* supporsi, nel diverso grado di stabilità di questi due acidi. Numerose ricerche sono state eseguite per definire le condizioni in cui l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2, 6H^2O$ abbandona parzialmente o totalmente le due molecole di acido cloridrico per ridursi in definitiva a cloruro platinico. È infatti noto (3) che mantenendo l'acido esacloro-

(1) Pogg. Ann., *131*, 441.
(2) Compt. Rend., *103*, 213.
(3) Pigeon, Ann. de chim. et phys. [7], *2*, 443 (1894); Miolati e Bellucci, Zeitschr. anorg. Chemie, *26*, 209 (1901).

platinico nel vuoto a 100° in presenza di potassa, esso perde una molecola di acido cloridrico, cui subentra una di acqua, dando l'acido pentacloroplatinico:

$$PtCl^4\left\langle\begin{matrix}ClH\\ClH\end{matrix}\right.(6H^2O) \rightarrow PtCl^4\left\langle\begin{matrix}ClH\\OH^2\end{matrix}\right.$$

vale a dire l'acido bibasico $[PtCl^5(OH)]H^2$ che rappresenta l'acido esacloroplatinico in cui un atomo di cloro è sostituito da un ossidrile. Ed è soltanto se si scalda a 170° nel vuoto ed in presenza di potassa che si arriva a far perdere all'acido esacloroplatinico due molecole di acido cloridrico ed a ridurlo a cloruro platinico anidro (1).

Circa la stabilità dell'acido clorostannico, in rapporto alla maggiore o minore facilità con cui esso elimina l'acido cloridrico per ridursi a cloruro stannico, non si conosce invece alcun dato sperimentale.

L'acido clorostannico fu da noi preparato col metodo di Seubert (2) col quale si hanno eccellenti rendimenti. Ne fu verificato il punto di fusione che si trovò essere a 19°,5 (sec. Engel circa i 20°, sec. Seubert a 19°,2).

L'acido clorostannico si mantiene inalterato se si conserva in recipienti chiusi, nel mentre all'aria, anche all'ordinaria temperatura, come già ha notato Seubert (loc. cit.), viene perdendo lentamente acido cloridrico, discostandosi quindi *a priori* dal comportamento dell'acido cloroplatinico. Ci sembrò tuttavia di un certo interesse il vedere se questa perdita dell'acido cloridrico potesse anche per l'acido clorostannico, come per il cloroplatinico, limitarsi in speciali condizioni ad una sola molecola, ovvero si allontanassero addirittura tutte due le molecole e risultasse in definitiva cloruro stannico.

A tale scopo una certa quantità di acido clorostannico $SnCl^6H^2, 6H^2O$ fu mantenuta costantemente per più giorni nel vuoto in presenza di idrato di potassio, alla temperatura ordinaria. L'acido clorostannico si trasformò fin dal principio in un liquido denso, oleoso e dopo dodici giorni il rapporto tra lo stagno ed il cloro divenne costante e risultò $\frac{1\,Sn}{4\,Cl}$, vale a dire il composto si era ridotto a cloruro stannico. Questo lasciato poi a sè per molti giorni entro recipiente a tappo smerigliato, si rapprese in un ammasso di piccoli cristalli splendenti, i quali sottoposti all'analisi dettero i seguenti risultati:

Sost. gr. 0,3712, gr. 0,1585 SnO^2, gr. 0,6115 AgCl.

	Trovato	Calcolato per $SnCl^4, 5H^2O$
Sn	33,59	33,82
Cl	40,52	40,47

vale a dire l'acido clorostannico $SnCl^6H^2, 6H^2O$, alla temperatura ordinaria, nel vuoto in presenza di potassa, si trasforma nell'idrato $SnCl^4, 5H^2O$ che è uno degli idrati noti del cloruro stannico, e vi si trasforma, per prove da noi fatte, *anche soltanto esposto all'aria*, in sottile strato, dopo circa tre mesi di tempo.

(1) Pigéon (loc. cit.).
(2) Berichte, *20.* 793 (1887).

Non accenna adunque menomamente l'acido clorostannico a dare un composto stabile, analogo all'acido pentacloroplatinico $[PtCl^5(OH)]H^2$.

Questa stabilità molto minore dell'acido clorostannico di fronte a quella del cloroplatinico, trova del resto una conferma continua nel comportamento generale di questi due acidi e dei loro sali relativi, sul quale crediamo opportuno soffermarci un poco.

Così non siamo riusciti a titolare l'acido clorostannico $SnCl^6H^2$ a mezzo degli alcali, adoperando come indicatore la fenolftaleina, mentre al contrario l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$, come è noto, funziona in tali condizioni da acido bibasico. Varî tentativi da noi eseguiti, sia operando in soluzioni acquose molto concentrate, sia acquoso-alcooliche, ci dimostrarono che non si riesce in alcun caso a fermare l'aggiunta dell'alcali in corrispondenza di due equivalenti e che la fenolftaleina non mostra il color rosso del suo sale se non quando si sono aggiunti sei equivalenti di idrato sodico, indicando che l'acido clorostannico va in tal caso soggetto a completa scissione molecolare ed idrolitica. Ed infatti dalle soluzioni acquose molto diluite (ad es.: N/32) di acido clorostannico comincia quasi subito anche a temperatura ordinaria a formarsi un abbondante precipitato di acido stannico.

Sebbene la fenolftaleina impiegata nel nostro caso sia, come è noto, un acido debolissimo, abbiamo voluto provare se si riusciva a titolare l'acido clorostannico in rapporto alla sua bibasicità, prescindendo dall'impiego degl'indicatori e ricorrendo al metodo di Kohlrausch, servendoci cioè della resistenza elettrica come indicatore, quantunque il parallelismo che sin qui si è sempre riscontrato fra le titolazioni di acidi eseguite da un lato con gli indicatori, dall'altro con la scorta delle variazioni della conducibilità elettrica, facessero ritenere vano il tentativo.

Adoperammo a tal uopo una soluzione notevolmente concentrata di acido clorostannico, contenente gr. 0,1405 di acido per ogni cmc. (il titolo fu stabilito con dosaggi di stagno), cioè poco più diluita di una soluzione normale, la quale dovrebbe contenere gr. 0,1666 di acido per ogni cmc. Nel quadro qui sotto riportiamo i risultati ottenuti in tali determinazioni. La prima colonna si riferisce al numero di cmc. di $NaOH\ ^N/_{10}$ aggiunti ogni singola volta ad un cmc. di soluzione dell'acido (con acqua si portava poi il volume a 25 cmc.); la colonna centrale contiene i valori delle conducibilità specifiche (temperatura del termostato $= 25°$ C); nella terza colonna trovansi infine tradotti in quantità molecolari i cmc. aggiunti di NaOH, sempre in relazione colla quantità fissa di acido clorostannico impiegata (gr. 0,1405).

Cmc. N/10 NaOH	Conducib. specifiche	Molec. NaOH pe 1 molec. $SnCl^6H^2$
0	34,22	0,000
1	32,83	0,237
2	31,61	0,474
3	30,32	0,711
4	28,92	0,948
5	27,50	1,185
6	26,31	1,422
7	24,91	1,659
8	23,92	1,896
9	22,43	2,133

Non fu possibile procedere oltre i nove cmc. nell'aggiunta dell'alcali, poichè la soluzione cominciava già a manifestare una notevole idrolisi per quanto si cercasse di eseguire le titolazioni con la massima rapidità possibile.

Per meglio porre in rilievo i numeri ora riportati crediamo opportuno darne una rappresentazione grafica (fig. 1).

Notiamo anzitutto che un cmc. della soluzione di acido clorostannico impiegata avrebbe dovuto richiedere per la neutralizzazione cmc. 8,43 (= 2 molec.) di soluzione $^{N}/_{10}$ di NaOH. La linea che rappresenta le variazioni di conducibilità in funzione dell'alcali aggiunto non manifesta, come vedesi, a questo punto, alcun cambiamento di direzione, ma essa procede oltre nella neutralizzazione di altri equivalenti di cloro dimostrando che, anche alla concentrazione relativamente forte cui fu operato, l'acido clorostannico si scinde molecolarmente ed idroliticamente (come lo indicano i valori straordinariamente elevati delle conducibilità specifiche), rendendosi con ciò impossibile la sua titolazione.

L'acido cloroplatinico al contrario mostra in soluzione acquosa un comportamento di forte acido bibasico come risulta dal processo, che a quanto sappiamo non era ancora stato studiato, della sua neutralizzazione eseguita da noi parimenti col metodo Kohlrausch. A 5 cmc. di una soluzione contenente gr. 0,01501 di acido cloroplatinico per ogni cmc., si aggiungevano quantità ogni volta crescenti di NaOH $^{N}/_{40}$, riportando il volume a 25 cmc.

Ecco i valori ottenuti:

Cmc. NaOH N/40	Conducib. specifiche	Molec. NaOH per 1 molec. $PtCl^6H^2$
0	3,92	0,000
1	3,69	0,135
2	3,50	0,270
4	3,07	0,540
6	2,71	0,810
7	2,49	0,945
8	2,26	1,080
10	1,85	1,350
12	1,42	1,620
13	1,28	1,755
14	1,18	1,890
15	1,16	2,025
16	1,26	2,160
18	1,45	2,430
20	1,66	2,700

Rappresentiamo graficamente i valori ottenuti (fig. 2). I 5 cmc. adoperati della soluzione platinica richiedevano per la neutralizzazione cmc. 14,73 di NaOH $^{N}/_{40}$ (= 2 molec.) In questo punto infatti in cui avviene la formazione del sale neutro la conducibilità cessa di diminuire e la linea che rappresenta l'andamento della con-

ducibilità mostra ivi, come vedesi, un cambiamento marcatissimo di direzione. Da

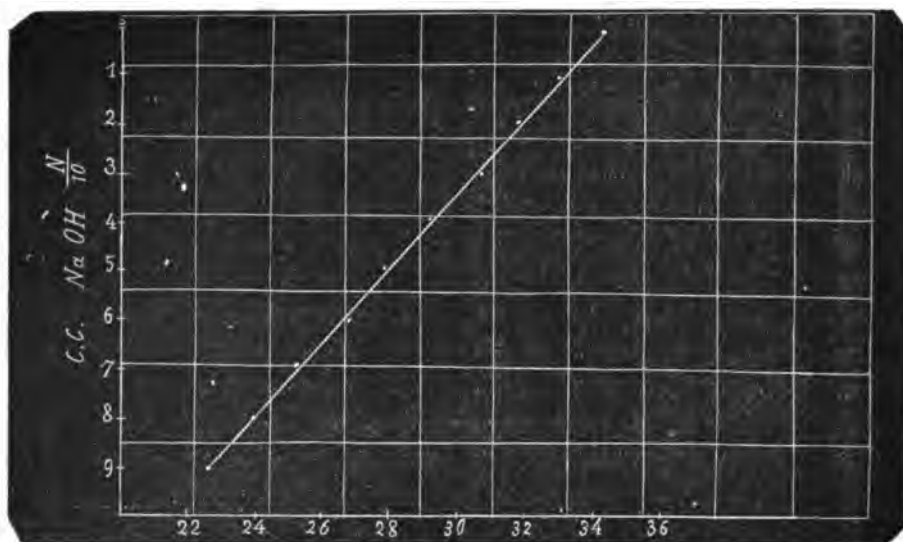



Fig. 1. Conducibilità specifiche.

ciò deducesi, come è noto, non solo che l'acido cloroplatinico $Pt Cl^6 H^2$ esiste in soluzione acquosa come forte acido bibasico, ma che i suoi due atomi di idrogeno sono

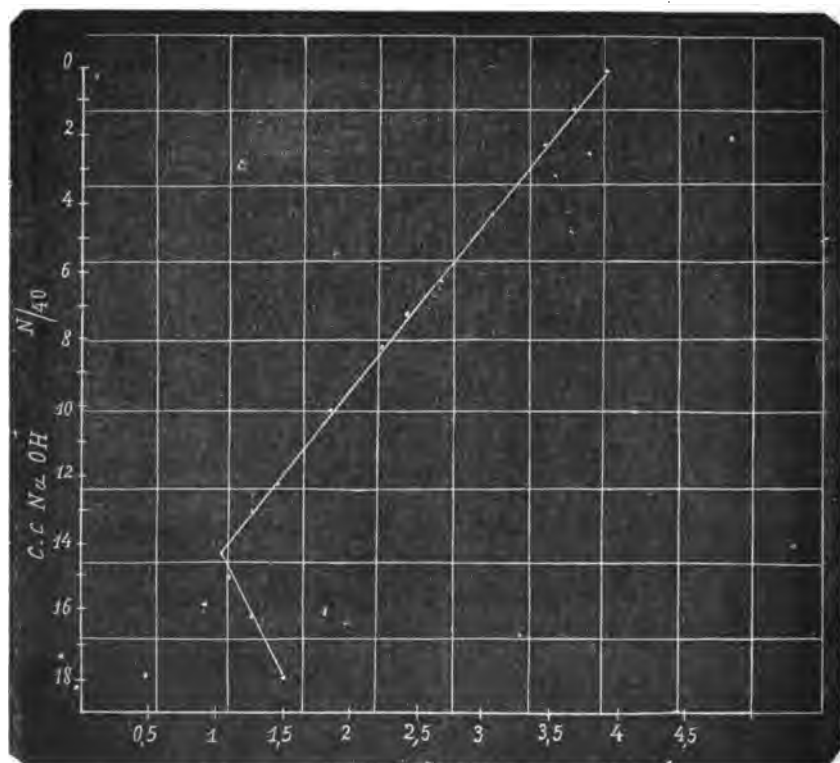



Fig. 2. Conducibilità specifiche.

entrambi egualmente dissociati a simiglianza di quello che è stato trovato per l'acido solforico [1] e per l'acido selenico [2], mostrando nel suo tipo complesso uno dei più alti gradi di stabilità.

Questo contrasto così rilevante nel grado di stabilità degli acidi clorostannico e cloroplatinico trova inoltre una grande conferma anche nel comportamento dei relativi sali. Così, a grande differenza del cloroplatinato di potassio $PtCl^6K^2$ che può essere bollito in soluzione acquosa senza che si alteri menomamente, il clorostannato di potassio $SnCl^6K^2$, anche alla temperatura ordinaria, specie se in soluzioni diluite, si idrolizza subito: le soluzioni di questo assumono tosto una forte reazione acida e dopo qualche tempo si ha un abbondante precipitato di acido stannico. Con questa dissociazione molecolare ed idrolitica del clorostannato di potassio concorda il fatto che non ci è stato possibile dalle soluzioni acquose anche molto concentrate di questo sale ottenere per doppio scambio, con soluzioni metalliche, clorostannati insolubili. Mentre ciò è possibile, come è noto, partendo dal cloroplatinato potassico, il quale esiste in soluzioni acquose anche molto diluite normalmente dissociato, come lo mostrano i valori di conducibilità equivalente trovati da WALDEN [3] per questo sale ($\Delta = 21,3$).

Volendo concludere devesi ammettere che sia l'acido clorostannico in confronto del cloroplatinico, sia i clorostannati in confronto dei cloroplatinati, malgrado la perfetta analogia che mostrano apparentemente nella loro costituzione, si presentano dal lato chimico nel loro comportamento generale con caratteri di stabilità così marcatamente diversi da dover ritenere debolissimo l'anione $(SnCl^6)''$. È appunto in causa di ciò che non si rendono possibili, come si è visto, per l'acido clorostannico le sostituzioni degli atomi di cloro con ossidrili che nel caso del platino formano invece quella serie così completa di acidi, da noi esposta in principio di questa Memoria.

III.

Piombati.

(In unione col dott. N. PARRAVANO).

Ricerche analoghe a quelle su esposte in riguardo ai platinati e stannati sono state da noi estese ai piombati del tipo del cosidetto metapiombato di potassio $PbO^3K^2, 3H^2O$.

A differenza degli stannati ed ancor più dei platinati si conoscono vari tipi di piombati. Noi prenderemo però in considerazione soltanto i piombati riferibili al tipo $PbO^3X'_2, 3H^2O$ e ci soffermeremo al sale di potassio che vedremo essere il più caratteristico e stabile.

(1) WHITNEY, Zeitschr. phys. Chemie, *20*, 45.
(2) MIOLATI e MASCETTI, Gazz. Chim. Ital., *31*, 111.
(3) Zeitschr. physik. Chemie, *2*, 78.

Anche in questo caso, in rapporto con quello che già si è dimostrato per gli stannati del tipo $SnO^3X'_2, 3H^2O$, le tre molecole di acqua potevano risultare non di cristallizzazione, ma come facenti parte integrante della costituzione del piombato. D'altra parte le notizie cristallografiche che finora si conoscevano in riguardo al piombato $PbO^3K^2, 3H^2O$ rendevano incerta questa nostra interpretazione. Non era infatti ancora nettamente definito il sistema cristallino al quale appartiene questo sale, poichè FRÉMY lo credette romboedrico, mentre SEIDEL lo descrisse cristallizzato in forme del sistema dimetrico. Questa incertezza, che avrebbe tolto valore alla dimostrazione della costituzione del piombato secondo la formola $[Pb(OH)^6]K^2$, ci ha indotti a far ripetere lo studio cristallografico di questo sale. Dopo lunghi tentativi siamo riusciti ad ottenere dell'ottimo materiale per studi cristallografici. Il dott. ZAMBONINI, cui abbiamo fornito questo materiale per lo studio cristallografico, ci ha cortesemente comunicati i risultati delle sue misure, in base alle quali risulta che anche il piombato di potassio cristallizza in forme del sistema romboedrico e presenta con il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$ e con lo stannato $[Sn(OH)^6]K^2$ strette relazioni di isomorfismo. Di tali misure cristallografiche, in base alle quali si stabilisce questo isomorfismo, ci occupiamo dettagliatamente più oltre.

Questo risultato presentava un certo interesse poichè grandemente avvalorava la nuova interpretazione secondo la formola $[Pb(OH)^6]X'_2$ che noi, in base alle prove chimiche, di cui ora passeremo ad occuparci, siamo indotti a dare ai piombati presi a trattare.

Parte storica.

Questo sale fu preparato per primo da FRÉMY (1) nel 1844, fondendo il biossido di piombo con eccesso di potassa, sciogliendo la massa fusa in poca acqua ed evaporando nel vuoto. FRÉMY gli assegnò la formola $PbO^3K^2, 3H^2O$.

SEIDEL (2) lo ripreparò poi nel 1879 con lo stesso metodo e confermò la formola di FRÉMY.

Parte sperimentale.

Seguendo le indicazioni piuttosto vaghe lasciateci da questi autori, non è possibile preparare facilmente questo sale. Ci sono occorsi numerosi tentativi per poter definire le condizioni nelle quali riesce agevole la preparazione del piombato potassico. Noi abbiamo precisamente operato così. A 100 gr. di idrato di potassio si aggiungevano in capsula di argento 20-30 gr. di acqua e si cominciava a scaldare: nel mentre progrediva la soluzione della potassa si aggiungevano alla massa, tenuta continuamente agitata, delle piccole porzioni di una poltiglia acquosa di biossido di piombo. Durante l'operazione il riscaldamento va fatto con un semplice becco BUNSEN, procurando che la temperatura non si elevi troppo. Man mano che si procede nell'aggiunta del PbO^2, il liquido fuso si satura di piombato di potassio che si depone al fondo della capsula come polvere micro-cristallina, di un bianco leggermente sporco. Si sospende l'aggiunta

(1) Ann. de chim. et phys., [3], *12*, 488.
(2) Journ. prakt. Chemie, *20*, 200.

del PbO^2 allorchè questo rifiuta di sciogliersi. La massa fusa si riprende con poca acqua, e si filtra: il filtrato si pone a cristallizzare nel vuoto su acido solforico dopo avervi seminato un cristallino di stannato o platinato di potassio. In capo a breve tempo si ha così un buon rendimento di piombato di potassio, ben cristallizzato. Qualora nella preparazione si ecceda con la temperatura, o non si osservino le concentrazioni dell'alcali suindicate, una porzione del PbO^2 si riduce a PbO, il quale si scioglie a sua volta nell'idrato potassico dando col piombato di potassio già formatosi piombato di piombo sotto forma di polvere amorfa, insolubile, di un giallo aranciato. La formazione di questo precipitato, data la fortissima concentrazione dell'alcali, non è immediata: onde è che anche da un filtrato limpido, qualora non si siano osservate le opportune condizioni di preparazione, invece di cristallizzare il piombato di potassio si ha talora formazione o esclusivamente di piombato di piombo o di questo frammisto al sale alcalino.

Il piombato di potassio così ottenuto in piccoli cristalli incolori, lucenti, veniva da noi raccolto, lavato qualche volta rapidamente con alcool assoluto e spremuto bene tra carta. Si conservava in essiccatore su potassa per impedirne più che fosse possibile la sua decomposizione a contatto dell'anidride carbonica atmosferica. Questo sale subisce in acqua un'immediata idrolisi: si separa in prima fase acido piombico, che in seguito torna a sciogliersi allo stato colloidale (1).

I. Sost. gr. 0,5432, gr. 0,4208 $PbSO^4$, gr. 0,2516 K^2SO^4.
II. Sost. gr. 0,5318, gr. 0,4138 $PbSO^4$, gr. 0,2449 K^2SO^4.

	Trovato I	Trovato II	Trovato da Frémy	Calcolato per $PbO^3K^2, 3H^2O$
Pb	52,91	53,15	52,57	53,43
K	20,80	20,68	20,67	20,22
H^2O	—	—	14,40	13,96

A lato delle nostre analisi sono riportate le percentuali trovate da Frémy, dalle quali risulta che a questi sarebbe riuscito di dosare esattamente l'acqua nel sale. Noi non possiamo invece dare nessun valore per le percentuali dell'acqua, per le ragioni che qui esponiamo.

Il piombato di potassio mantenuto a lungo alla temperatura di 100°, in ambiente di gas inerte, non perde quantità apprezzabili del proprio peso (sost. gr. 0,9423, gr. 0,0031 = 0,32 %). Elevando la temperatura esso comincia a perdere acqua, ma contemporaneamente la sua molecola si demolisce con separazione di potassa e di PbO^2, il quale passa poi a PbO. Arroventando il sale, sempre in ambiente di gas inerte, le perdite massime che siamo riusciti ad ottenere oscillano tra il 13,65-14,26 %. Come vedesi, questi numeri da noi trovati mostrerebbero una certa concordanza con la percentuale di acqua trovata da Fremy e con quella che si calcola per $3H^2O$. Il residuo però dell'arroventamento non è PbO^3K^2, come fa supporre il dato di

(1) Bellucci e Parravano, Chemik. Zeitung, 1904, pag. 1254.

FREMY. Infatti questo residuo ripreso con acido nitrico non palesa affatto la presenza di PbO^2, presenta il colore giallo del litargirio e comunica all'alcool la reazione alcalina dovuta all'idrato di potassio. Tale residuo non è adunque che un miscuglio di litargirio e di potassa, e la demolizione del piombato per azione del calore è completa secondo lo schema seguente:

$$[Pb(OH)^6]K^2 = PbO + 2KOH + O + 2H^2O.$$

Arroventando il piombato in ambiente inerte secondo la nostra equazione dovrebbesi avere dunque una perdita di peso corrispondente a $2H^2O + O$. Si calcola infatti in questo caso una perdita del 13,42 % abbastanza concordante, date le difficoltà dell'esperienza, con quelle trovate da noi (13,65-14,26 %).

Il comportamento del piombato di potassio sotto l'azione del calore è quindi perfettamente analogo a quello dello stannato $Sn(OH)^6K^2$ e del platinato $Pt(OH)^6K^2$. Giova anzi qui ricordare che FREMY nel caso dello stannato $Sn(OH)^6K^2$, per azione spinta del calore non riuscì ad ottenere una perdita di peso corrispondente a $3H^2O$, e di ciò noi abbiamo dato (loc. cit.) sufficienti spiegazioni. Nel caso del piombato $Pb(OH)^6K^2$ egli troverebbe invece dati concordanti con i calcolati per $3H^2O$, senza tenere conto però della demolizione che il sale subisce e quindi della perdita di ossigeno da parte del PbO^2, perdita di ossigeno che non si verifica nel caso del SnO^2 prodottosi nell'identica demolizione dello stannato. Il che spiega sufficientemente perchè FREMY abbia creduto di poter dosare per perdita di peso l'acqua nel piombato, e non nel caso dello stannato di potassio.

È appunto da questo comportamento del piombato di potassio sotto l'azione del calore che deduciamo una prima prova in favore della formola di costituzione $Pb(OH)^6K^2$ che noi assegniamo a questo sale.

Nel caso dei platinati e degli stannati ci siamo occupati anche del sale sodico. Adoperando lo stesso metodo di preparazione del piombato potassico, si giunge ad avere una soluzione di piombato sodico, la quale, abbandonata nel vuoto su acido solforico, solo in presenza di qualche cristallino di stannato potassico (i quali vi crescono dentro) mostra una debolissima tendenza a deporsi come polvere finemente cristallina, con rendimento però mai sufficiente da permetterci delle analisi. Le stesse difficoltà incontrò SEIDEL (loc. cit.) in analoghi tentativi (1).

(1) HÖHNEL (Archiv. für Pharm., *232*, 223) dice di avere preparato un piombato sodico $PbO^3Na^2, 4H^2O$, ossidando una poltiglia di PbO con perossido di sodio, ed esaurendo la massa con alcool a diverse concentrazioni. Noi abbiamo ripetuto la preparazione di HÖHNEL ed abbiamo potuto constatare che non si riesce a purificare completamente il sale senza andare incontro alla sua idrolisi. Riportiamo i dati analitici di HÖHNEL:

	Trovato		Calcolato per	
	I	II	$PbO^3Na^2, 4H^2O$	$PbO^3Na^2, 3H^2O$
Pb	55,43	54,20	55,50	58,27
Na	14,07	14,21	12,33	12,98

Come vedesi, se le percentuali trovate dall'HÖHNEL si accostano per il piombo alla formola

Altro criterio importante per la dimostrazione della formola $Pb(OH)^6K^2$ era quello della composizione dei sali metallici che da questo potevano derivarne. Data la profonda idrolisi che subisce il piombato di potassio in soluzione acquosa, era necessario mantenerlo in ambiente fortemente alcalino, ed erano possibili doppi scambi soltanto con le soluzioni degli ossidi metallici solubili nell'eccesso dell'idrato alcalino. Dei vari precipitati che possono ottenersi con le soluzioni metalliche in queste condizioni eccezionali, l'unico che abbiamo potuto sottoporre all'analisi è stato quello di Pb''.

Sale di piombo $[Pb(OH)^6]Pb$.

Fremy (loc. cit.) mescolando la soluzione alcalina del piombato potassico con una soluzione alcalina di PbO, ottenne un precipitato giallo che erroneamente interpretò come minio idrato, senza però dare di esso alcuna analisi nè formola. Seidel (loc. cit.) ripreparò nelle identiche condizioni tale composto e si accorse che si trattava di un idrato del Pb^2O^3 e non del Pb^3O^4. Gli assegnò perciò la formola Pb^2O^3, $3H^2O$, considerandolo come sale di piombo $PbO^3Pb, 3H^2O$ dell'acido metapiombico PbO^3H^2.

Noi abbiamo ripreparato questo composto. Ad una soluzione di piombato potassico preparata estemporaneamente ed alcalina per idrato di potassio, onde evitare l'idrolisi, si aggiunse una soluzione di PbO nella potassa, lasciando il tutto in riposo in recipiente chiuso. A seconda delle concentrazioni la precipitazione del piombato di piombo procede più o meno rapida: con soluzioni concentrate la precipitazione avviene col tempo, con le diluite immediatamente.

Il precipitato è amorfo, di un colore giallo aranciato. Raccolto e lavato fu seccato su acido solforico. Era esente da carbonati.

I. Sost. gr. 0,3821, gr. 0,3079 Pb.
II. » » 0,4789, » 0,2054 PbO, gr. 0,2831 $PbSO^4$.
III. » » 0,6265, cc. 14,8 di O (764,2 mm.; 17°,9).
IV. » » 0,5127, gr. 0,0514 H^2O.

	Trovato				Calcolato
	I	II	III	IV	per $Pb(OH)^6Pb$
Pb (totale)	80,59	—	—	—	80,22
Pb^{IV}	—	39,82	—	—	40,11
Pb''	—	40,38	—	—	40,11
O	—	—	3,18	—	3,1
H^2O	—	—	—	10,03	10,48

$PbO^3Na^2, 4H^2O$, ne sono ben lungi per il sodio, ciò che dimostra che il sale era ancora impuro di alcali, il quale ha naturalmente abbassato i trovati del piombo. Considerando ancora che l'acqua è stata dall'Höhnel *calcolata per differenza,* non può dirsi affatto sicura la formola $PbO^3Na^2, 4H^2O$ da esso stabilita. Tutto fa credere che qualora così si riuscisse ad avere un prodotto analizzabile, esso ricadrebbe nello stesso tipo di piombati da noi discusso.

Il sale di piombo corrisponde adunque alla formola $Pb(OH)^6Pb$. Sottoposto all'azione del calore questo sale a 170° perde soltanto il 3,62 % di H^2O e col progressivo elevarsi della temperatura si riesce ad allontanare tutte tre le molecole di acqua. Non è sicuro il dosare, come ha fatto Seidel (loc. cit.) l'acqua in questo sale per arroventamento all'aria, e quindi per sola perdita di peso, perchè, sebbene Seidel sostenga che il sale arroventato al rosso non sviluppa ossigeno, noi abbiamo invece potuto constatare che alla stessa temperatura alla quale vanno via le ultime porzioni di acqua, cominciano già ad allontanarsi piccole quantità di ossigeno, ed al rosso il sale trovasi completamente trasformato in PbO.

Altri piombati insolubili non ci è stato possibile ottenere dal sale potassico, in uno stato di purezza sufficientemente necessario per l'analisi. La soluzione alcalina del piombato di potassio trattata con soluzione di nitrato talloso dà un precipitato rosso-marrone, il quale però subisce idrolisi durante i lavaggi. Fu tuttavia raccolto e seccato su acido solforico. Varie preparazioni mostrarono che esso contiene sempre dell'acqua che non perde che in quantità minime a 100°, e per riscaldamento essa si allontana quando il tallio comincia abbondantemente a volatilizzare. Le analisi fatte su questo sale non mostrarono tra di loro sufficiente concordanza e dettero tutte un contenuto di piombo maggiore di quello che si calcola per la formula $Pb(OH)^6Tl^2$, evidentemente a causa dell'idrolisi sopradetta.

Trovansi descritti nella letteratura altri piombati insolubili PbO^3X'', xH^2O. Così i metapiombati, preparati da Grützner ed Höhnel ([1]), di zinco, manganese, argento e rame ottenuti facendo digerire per più ore una poltiglia di metapiombato di calcio con le soluzioni dei rispettivi acetati o nitrati metallici. Come è evidente, non toccava a noi di prendere in considerazione questi sali perchè non preparati in condizioni che ci permettessero di trarne delle conclusioni per lo scopo del nostro lavoro, quando anche, ciò che è quasi impossibile, con il metodo di preparazione su accennato, fossero potuti ottenersi in stato analizzabile. È opportuno ad ogni modo notare che quasi tutti questi sali, come trovansi descritti, contengono maggiori o minori quantità di acqua, la quale presenta in taluni di essi una resistenza al calore davvero straordinaria ([2]).

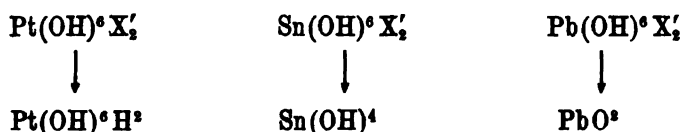
Se i piombati ora ricordati non potevano esser preparati per doppio scambio dal piombato di potassio, per le condizioni di alcalinità in cui bisogna agire, l'avere ad ogni modo potuto ottenere in tali condizioni un sale di piombo $Pb(OH)^6Pb$, dimostra che nelle soluzioni di piombato esiste l'anione $[Pb(OH)^6]''$.

Nel caso dei platinati $Pt(OH)^6X'_2$ è stato dimostrato che con un acido si può mettere in libertà il rispettivo acido $Pt(OH)^6H^2$, sufficientemente stabile all'aria; nel caso degli stannati $Sn(OH)^6X'_2$ si pone invece in libertà un acido stannico che anche nelle condizioni più blande di essiccamento non supera mai il grado di idratazione corrispondente ad $Sn(OH)^4$; nel caso infine dei piombati $Pb(OH)^6X'_2$, la molto minore stabilità di questi sali, in confronto dei precedenti, ci si palesa anche nella minore stabilità del grado di idratazione dell'acido piombico che può da essi separarsi.

([1]) Archiv. der Pharmacie, *233*, 512; *234*, 397.

([2]) Grützner ed Höhnel (Archiv. der Pharm., *233*, 514). — Kassner, id. id., *237*, 409.

Noi abbiamo aggiunto infatti ad una soluzione di piombato di potassio, ben raffreddata con ghiaccio, dell'acido acetico diluito e pure raffreddato, fino ad avere reazione neutra; si ottiene così dapprima un precipitato fioccoso di colore più chiaro dell' idrato ferrico, ma che poi va man mano imbrunendosi. Raccolto su filtro e seccato all'aria, assume il colorito marrone-scuro del biossido di piombo, e le analisi fatte su questo prodotto, seccato soltanto all'aria, ci hanno mostrato che col tempo esso raggiunge la forma anidra PbO^2. Evidentemente alla variazione del colore è logico ammettere corrisponda anche la diminuzione e scomparsa del grado di idratazione, collegata a cambiamenti di proprietà. Infatti nel mentre l'acido piombico appena precipitato nelle condizioni sopradette si scioglie con grande facilità nelle soluzioni di idrato alcalino, allorchè è stato raccolto ed il suo colore è diventato più scuro la resistenza all'alcali diventa sempre più notevole, finchè, giunti al PbO^2 anidro, bisogna ricorrere alla fusione. Abbiamo dunque questa diminuzione progressiva del grado di idratazione degli acidi in corrispondenza con la diminuzione di stabilità dei rispettivi ossisali:

$$Pt(OH)^6X'_2 \downarrow Pt(OH)^6H^2 \qquad Sn(OH)^6X'_2 \downarrow Sn(OH)^4 \qquad Pb(OH)^6X'_2 \downarrow PbO^2$$

La diminuzione di stabilità di questi ossisali corre del resto parallela a quella dei rispettivi clorosali. Mentre infatti l'acido cloroplatinico $PtCl^6H^2$ è stabile e dai suoi sali è possibile avere per doppio scambio dei cloroplatinati insolubili, l'acido clorostannico $SnCl^6H^2$, come noi abbiamo potuto dimostrare, si riduce anche all'aria ad $SnCl^4$, ed i clorostannati trovansi in soluzione acquosa scissi molecolarmente ed idroliticamente e nell' impossibilità quindi di fare doppi scambi; l'acido cloropiombico non è noto infine che sotto forma dei suoi sali, i cloropiombati, che a contatto dell'acqua subiscono un' immediata e totale decomposizione. È a notare però che anche nel caso del Pb^{IV}, come del Pt^{IV} e dello Sn^{IV}, risulta la maggiore stabilità dei complessi ossidrilati di fronte a quella dei complessi clorurati: quella cioè del $[Pb(OH)^6]''$, che pure ci ha permesso un doppio scambio, di fronte a quella labilissima del $[PbCl^6]''$.

Data la molto minore stabilità del complesso $[Pb(OH)^6]''$ in confronto del $[Sn(OH)^6]''$ e tanto più del $[Pt(OH)^6]''$, le prove sperimentali da noi raccolte non potevano avere tutta l'estensione che invece hanno avuta nel caso dei platinati e degli stannati. Tuttavia esse sono più che sufficienti per la nostra dimostrazione, data l'analogia così marcata che corre fra queste tre serie di sali.

Volendo riassumere queste prove si ha:

1°. L'azione del calore sul piombato potassico. In modo del tutto analogo al platinato ed allo stannato anche il piombato non perde quantità apprezzabili del proprio peso, mantenuto alla temp. di 100°. Elevando la temperatura il piombato comincia a perdere acqua, ma contemporaneamente la sua molecola si demolisce con separazione di potassa.

2°. La formazione del sale di piombo $[Pb(OH)^6]Pb$, amorfo, insolubile, ottenuto per precipitazione dal piombato $[Pb(OH)^6]K^2$.

3°. L'isomorfismo esistente tra platinato, stannato e piombato potassici.

IV.

Isomorfismo fra platinato, stannato e piombato potassici.

(In unione col dott. N. Parravano).

Nei precedenti capitoli nei quali ci siamo occupati della costituzione che compete alle tre serie di ossisali:

$$[Pt(OH)^6]X'_2 \quad , \quad [Sn(OH)^6]X'_2 \quad , \quad [Pb(OH)^6]X'_2$$

abbiamo spesso accennato all'esistenza di isomorfismo fra i sali di potassio delle tre serie. Tratteniamoci in questo capitolo ad esporre un po' dettagliatamente tali relazioni cristallografiche.

È noto come le numerose ricerche intraprese da che Mitscherlich ebbe formulata la sua legge sull'isomorfismo, abbiano dimostrato che dalla somiglianza delle forme cristalline non può sempre dedursi analogia di costituzione chimica, essendosi trovata somiglianza di costanti cristallografiche fra le sostanze più eterogenee. Questa ultima coincidenza casuale che si comprende sotto il nome di isogonismo, non va però confusa con il vero isomorfismo il quale stabilisce gli stretti rapporti che corrono tra forma cristallina e costituzione chimica. Ed è appunto nel nostro caso che si manifesta un vero isomorfismo, il quale concorre nel modo più valido a dimostrare per le tre serie di sali da noi studiate quell'analogia di costituzione che ci è risultata dalle prove chimiche.

Che trattisi realmente di isomorfismo lo dimostra anzitutto il fatto che i tre sali di potassio, i quali, come sotto si vedrà, cristallizzano nel sistema romboedrico, mostrano una coincidenza notevolissima nei valori angolari, coincidenza che supera di molto quella osservata nella serie dei carbonati romboedrici e che è dello stesso grado di quella strettissima che si riscontra per i solfati della serie magnesiaca. Riportiamo infatti i valori angolari riferibili ad alcuni carbonati e solfati, scelti fra i più concordanti, ponendo a lato quelli dei nostri ossisali:

$CaCO^3$	74°55	$MgSO^4, 7H^2O$	89°26	$Pt(OH)^6K^2$	74°48
$MnCO^3$	73°09	$ZnSO^4, 7H^2O$	89°22	$Sn(OH)^6K^2$	75°14
$FeCO^3$	73°00	$NiSO^4, 7H^2O$	88°56	$Pb(OH)^6K^2$	75°19

Ben si vede come la differenza tra i valori estremi delle singole serie qui riportate sia per i carbonati di 1°55′, per i solfati di 0°30′, e per i nostri ossisali di 0°31′. La differenza che corre tra i valori angolari della nostra serie è adunque ben minima, e ciò apparirà di tanto maggior momento ricordando, ad esempio, che nella serie dei carbonati romboedrici, di cui noi abbiamo riportato solo gli esempi più

concordanti, fra i termini estremi $CaCO^3$ e $ZnCO^3$ esiste una differenza angolare di 2°35′. Il che farebbe quasi escludere l'isomorfismo tra questi due ultimi carbonati, se esso non fosse appoggiato dall'esistenza di tutta la serie dei carbonati intermedii e non si conoscessero delle varietà di carbonati che contengono calcio e zinco in quantità variabili.

Inoltre è noto che vi sono dei composti senza dubbio isomorfi che presentano differenze ancora più forti nei loro valori angolari. Per non dilungarci ci limitiamo a citare il cromato ed il molibdato di magnesio, cristallizzati con cinque molecole di acqua, nei quali per la prima volta WYROUBOFF dimostrò direttamente l'isomorfismo dei cromati e molibdati, e che presentano differenze angolari considerevoli, come risulta dalle loro costanti:

$$MgCrO^4, 5H^2O$$
$$a:b:c = 0,5883:1:0,5348$$
$$\alpha = 76°9' \; ; \; \beta = 97°17' \; ; \; \gamma = 108°14'$$

$$MgMoO^4, 5H^2O$$
$$a:b:c = 0,5264:1:0,5732$$
$$\alpha = 80°43' \; ; \; \beta = 98°52' \; ; \; \gamma = 107°28'$$

Differenze più notevoli si osservano ancora ad esempio negli angoli principali del fluossitungstato e del fluossimolibdato potassico normali, studiati da E. SCACCHI, come risulta dalla tabella seguente:

	$K^2WO^2Fl^4, H^2O$	$K^2MoO^2Fl^4, H^2O$
(001):(100) =	81°13′	76°31′
(001):(10$\bar{1}$) =	129 6	128 18
(001):(110) =	83 46	80 23

Altro fatto che parla in favore dello stretto isomorfismo che esiste fra i nostri tre ossisali è che i cristalli di platinato, stannato e piombato potassico crescono vicendevolmente nelle soluzioni l'uno dell'altro e ne provocano la cristallizzazione. Ricordiamo così che il platinato ed in specie il piombato di potassio, che da soli cristallizzano tanto difficilménte, si possono agevolmente ottenere in bei cristalli seminando nelle loro soluzioni alcaline qualche cristallino di stannato potassico. Talora ci è occorso con soluzioni soprasature di piombato di potassio, che un cristallino di stannato o platinato aggiunto ad esse ne provocava immediatamente la cristallizzazione quasi come una vera precipitazione cristallina. È noto che questi sono fra i criteri più rigorosi per stabilire che trattasi di un vero isomorfismo, come anche recentemente è stato posto in luce da W. STORTENBECKER.

Esponiamo ora qui sotto le misure cristallografiche, eseguite per nostro invito su questi sali dal dott. F. ZAMBONINI, quali ci vengono da esso comunicate, riservandoci in ultimo di fare alcune altre considerazioni. Noi ci sentiamo in dovere di porgere al dott. ZAMBONINI i nostri migliori ringraziamenti per la cortesia con cui ha corrisposto al nostro invito.

Parte cristallografica.

Dei tre composti $Pb(OH)^6K^2$, $Sn(OH)^6K^2$, $Pt(OH)^6K^2$, sono stati studiati cristallograficamente finora soltanto i due primi. FREMY (1) che li scoprì ritenne che fossero ambedue romboedrici: MARIGNAC (2) confermò più tardi il sistema cristallino per lo stannato, del quale però non potè avere a propria disposizione che cristalli con facce un po' curve, cosicchè le misure non poterono essere che approssimative.

MARIGNAC osservò che i cristalli avevano spesso l'apparenza di prismi obliqui (come più tardi notò anche il RAMMELSBERG), per lo sviluppo anormale di due facce del romboedro: sono spesso geminati secondo una facciá del romboedro e presentano netta sfaldatura basale.

Per ciò che riguarda il piombato $Pb(OH)^6K^2$ REGNAULT osservò cristalli ottaedrici; SEIDEL (3) fece studiare quelli da lui ottenuti dal KLIEN, il quale ritenne che appartenessero al sistema dimetrico: essi sarebbero la combinazione di un ottaedro con spigoli terminali di 104° 30′ e laterali di 119° 52′, con l'ottaedro di secondo ordine, e presenterebbero inoltre i due prismi, di primo e secondo ordine, e la base. In seguito a questi risultati il SEIDEL concluse affermando che i due composti $PbO^3K^2, 3H^2O$ ed $SnO^3K^2, 3H^2O$ (come venivano allora indicati) non erano isomorfi.

Ecco ora i risultati delle ricerche:

Stannato potassico $Sn(OH)^6K^2$.

Sistema cristallino: romboedrico.

$$\alpha = 70^\circ 0' 44'' \qquad (a:c = 1:1,9588).$$

Forme osservate; $^r\}100\{$, $^s\}110\{$, $^c\}111\{$, $^p\}10\bar{1}\{$. Quest'ultima non è ricordata dal MARIGNAC ed è quindi nuova. Queste forme si riuniscono nelle seguenti combinazioni:

a) }100{
b) }100{ }110{
c) }100{ }111{
d) }100{ }110{ }111{
e) }100{ }110{ $\}10\bar{1}\{$
f) }100{ }110{ $\}10\bar{1}\{$ }111{.

(1) Annal. de chim. et phys. [3] *12*, 488, 1844.
(2) Oeuvres complètes, I, 645.
(3) Journ. prakt. Chemie, *20*, 200, 1879.

I cristalli di stannato studiati hanno sviluppo del tutto irregolare e variabilissimo. Frequenti sono quelli che presentano il romboedro }100{

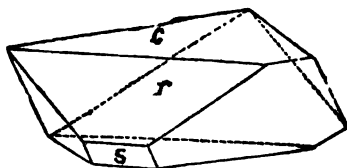



Fig 1.

isolato, quasi sempre con due facce parallele dominanti sulle altre: molto frequente è pure la combinazione c), ma anche in questa }100{ presenta di solito due facce parallele molto più sviluppate delle altre e la base invece poco estesa; }110{ è discretamente comune, non ha mai tutte le sue facce, spesso ne possiede una o due soltanto. Lo stesso accade per il prisma }10$\bar{1}${ che però è raro. Assai rari sono i cristalli tabulari secondo la base. La fig. 1 rappresenta uno dei tipi più frequenti.

Molto comuni sono i geminati aventi per asse di geminazione la normale ad una faccia di }100{ ed anche questi sono straordinariamente irregolari. Tutte le facce sono abbastanza piane e splendenti ed hanno permesso buone misure, ad eccezione della base che fornì soltanto pessime immagini, e di }10$\bar{1}${ che ne dette solo di mediocri.

Spigoli misurati	Limiti delle misure	N.	Media	Calc.
(100):(010)	74°57′ — 75°27′	26	75°14′30″	—
(100):(110)	52 11 — 52 28	8	52 23 30	52°22 3/4
(100):($\bar{1}$00)	29 13 — 29 42	6	29 31 30	29 31
(100):(10$\bar{1}$)	37 12 — 37 52		37 32	37 37 1/4

La sfaldatura secondo la base è netta e facile.

Doppia rifrazione abbastanza energica, positiva. Nessuna traccia di anomalie ottiche.

I cristalli di $Sn(OH)^6K^2$ sono incolori o leggermente giallognoli, trasparenti. Stando all'aria diventano rapidamente bianchi, opachi.

Piombato potassico $Pb(OH)^6K^2$.

Sistema cristallino: romboedrico.

$$\alpha = 70°10'26'' \qquad (a:c = 1:1,9518)$$

Forme osservate ^{r}}100{ ^{s}}110{ ^{c}}111{, le quali si riuniscono in due combinazioni }100{ }111{ e }100{ }110{ }111{, delle quali l'ultima è molto più frequente dell'altra, che è decisamente rara. I cristalli sono tutti più o meno tabulari secondo la base, e spesso si riducono a sottilissime laminette. La base è sovente sostituita da

facce curve poco discoste dalla sua posizione e solo di rado presenta facce ben misurabili. Dopo la base la forma più sviluppata è generalmente }100{; qualche volta }100{ e }110{ hanno all'incirca eguale grandezza; }110{ spesso ha solo una parte delle sue facce. Geminati secondo }100{ sono rari.

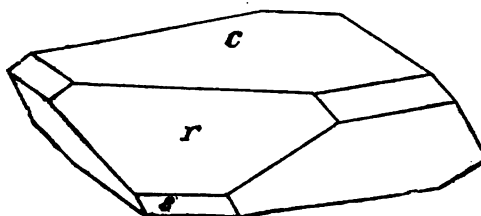



Fig. 2.

Le figure 2 e 3 rappresentano i due tipi più comuni.

Le facce di }100{ e }110{ sono molto piane e splendenti ed hanno fornito ottime misure.

Spigoli misurati	Limiti delle misure	N.	Media	Calcolato
(100):(0$\bar{1}$0)	75° 9′ — 75° 33′	12	75° 19′ 45″	—
(111):(100)	66 2 — 66 13	6	66 8	66° 4 1/2′
(100):(110)	52 10 — 52 32	7	52 19 30	52 20
(100):(0$\bar{1}\bar{1}$)	65 27 — 65 38	2	65 32 30	65 30 3/4
(100):($\bar{1}$00)	—	1	29 16	29 20 1/2

Sfaldatura abbastanza netta secondo la base.

Doppia rifrazione discretamente energica, positiva. Anche qui nessuna traccia, nelle sezioni basali, di anomalie ottiche.

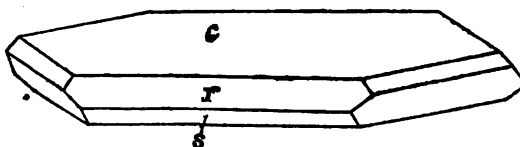



Fig. 3.

I cristalli di piombato potassico sono incolori, ma appena tolti dalla soluzione in cui si sono formati, ingialliscono rapidamente, poi più lentamente diventano bruno-rossigni, opachi, finchè perdono ogni splendore e diventano friabili e di colore marrone-scuro.

Come si è detto sopra, Regnault ha osservato degli « ottaedri », e secondo Klien i cristalli di piombato sarebbero dimetrici. È chiaro che un romboedro combinato con la base acquista l'aspetto di un ottaedro, se le otto faccie sono tutte all'incirca egualmente estese, come avviene anche in alcuni cristalli di $Sn(OH)^6 K^2$. I cristalli misurati da Klien sono identici ai miei, come dimostrano i suoi angoli.

Lo spigolo terminale del suo ottaedro (104° 32′) corrisponde benissimo all'angolo del romboedro }100{ da me osservato (104° 40′ 15″), mentre lo spigolo laterale di 119°52′ si avvicina molto all'angolo (100):(110). I cristalli quindi esaminati da Klien dovevano presentare delle irregolarità nello sviluppo, così da simulare l'*habitus* dimetrico, mentre quelli da me studiati sono sicuramente romboedrici, come è dimostrato nettamente e dall'*habitus* e dalle numerose misure eseguite in cristalli regolarmente formati.

D'altronde basterebbe il fatto, constatato da Bellucci e Parravano, che nelle soluzioni di piombato potassico la cristallizzazione è provocata dalla introduzione di un cristallino di stannato, per rendere più che probabile l'isomorfismo tra i due composti, che è messo del resto fuori di dubbio dalle misure.

Platinato potassico $Pt(OH)^6K^2$.

Sistema cristallino: romboedrico.

$$\alpha = 69° 11' 4'' \qquad (a:c = 1:1,9952).$$

Forma osservata }100{.

I cristalli di questo composto sono per lo più riuniti in gruppi, avendo una grande tendenza all'associazione più o meno perfettamente parallela ed anche irregolare. I cristalli di questi gruppi sono abbastanza grandi, ma hanno le faccie curve e spezzettate. Vi sono però anche dei cristallini piccolissimi (spesso inferiori a 1 mm.) che sono invece di una regolarità veramente ideale e forniscono delle misure esattissime.

Nei cristalli grandi generalmente due faccie parallele del romboedro dominano sulle altre, mentre nei piccoli e nei piccolissimi tutte le forme sono egualmente estese.

Spigoli misurati	Limiti delle misure	N.	Media
(100):(0$\bar{1}$0)	74° 32′ — 75° 5′	40	74° 48′

Sfaldatura netta secondo la base, difficile però ad ottenersi, essendo i cristalli fragilissimi. Doppia rifrazione positiva, meno forte, sembra, che nello stannato e nel piombato.

Il colore dei cristalli è giallo-oro.

Anche i cristalli di platinato potassico ora studiati furono ottenuti provocando la cristallizzazione della soluzione mediante l'introduzione in essa di due cristallini di stannato.

Dalle ricerche cristallografiche del dott. Zambonini, ora riportate, risulta adunque che i tre composti $Pt(OH)^6K^2$, $Sn(OH)^6K^2$ e $Pb(OH)^6K^2$ sono tra loro isomorfi. Vale a dire il platino, lo stagno ed il piombo, nelle forme tetravalenti, possono a vicenda sostituirsi in questo tipo di sali ossidrilati $Me(OH)^6X'_2$, senza portare note-

voli variazioni nelle costanti geometriche, costituendo realmente una nuova serie di sali isomorfi.

Relazioni cristallografiche tra Pt^{IV}, Sn^{IV} e Pb^{IV} erano state sin qui trovate unicamente nel caso dei clorosali del tipo $MeCl^6X'_2$, ma ciò, come è noto, non ha valore probante perchè tali clorosali cristallizzano nel sistema monometrico.

Nel caso nostro si viene perciò a dimostrare per la prima volta l'esistenza di composti isomorfi tra Pb^{IV} e Pt^{IV} e viene a riaffermarsi l'isomorfismo tra Pb^{IV} e Sn^{IV} che finora posava sopra pochissime osservazioni ed era stato negato dal Retgers (1), il quale parlando infatti dei composti $MeCl^6X'^2$ così si esprime: « . . . indem nicht bloss Elemente, wie Silicium, Zinn und Blei, welche durchaus nicht isomorph sind . . . », e più oltre: « . . . das Blei, welches mit Ca, Sr und Ba isomorph ist, stellt man in die Reihe des Kohlenstoff und Zinn, mit welchen es keine Isomorphie zeigt . . . ».

A quanto ci indica anche lo Zambonini, non si conoscono in proposito che le combinazioni tetrafeniliche di Pb, Sn e Si scoperte dal Polis (2) e studiate cristallograficamente dal Düsing e da Arzruni, ed il fluopiombato potassico 3KF, HF, PbF^4 scoperto da Brauner (3), per il quale Urba dimostrò l'isomorfismo col composto corrispondente di stagno, descritto da Marignac.

Lo stretto isomorfismo fra i tre ossisali da noi studiati conferma quindi in modo indubbio l'analogia di costituzione di essi e si viene ad aggiungere alle numerose prove chimiche, sulle quali noi finora l'avevamo poggiata.

V.

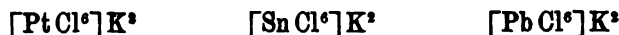
Considerazioni generali.

Come si è visto dalla parte sperimentale su esposta si presenta a noi l'esistenza di un nuovo tipo di sali complessi ossigenati (e per essi consideriamo i sali di potassio):

$$[Pt(OH)^6]K^2 \qquad [Sn(OH)^6]K^2 \qquad [Pb(OH)^6]K^2$$

con i quali si dimostra una facoltà finora sconosciuta dell'ossidrile, facoltà che potremmo chiamare *alogenica*, di formare cioè con gli atomi dei metalli degli anioni puri complessi, a simiglianza di quello che fanno i più svariati radicali acidi.

Questa nuova serie di sali isomorfi va notevolmente decrescendo in stabilità dai platinati agli stannati fino a giungere ai piombati, in perfetto accordo con la tendenza generica a formare sali complessi, grande per il platino, minore per lo stagno ed ancor più debole per il piombo. Limitandoci a considerare i sali complessi clorurati:

$$[PtCl^6]K^2 \qquad [SnCl^6]K^2 \qquad [PbCl^6]K^2$$

troviamo infatti una grande stabilità nel cloroplatinato il quale trovasi in soluzione

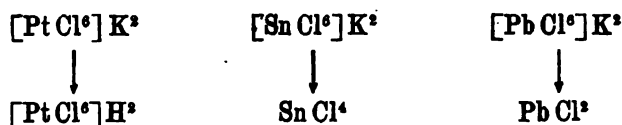
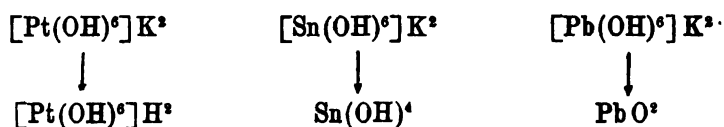
(1) Zeitschr. für anorg. Chemie, *12*, 105, 110, 1896.
(2) Berichte, *19*, 1016 (1886); *22*, 2918 (1889).
(3) Zeitschr. für anorg. Chemie, *7*, 1, 1894.

acquosa normalmente dissociato ($\Delta = 21,3$); una molto minore stabilità nel clorostannato, il quale in soluzione acquosa diluita trovasi in uno stato di profonda scissione sia molecolare che idrolitica, scissione che si manifesta poi anche in soluzione acquosa molto concentrata nel caso del cloroplatinato.

Per i sali ossigenati complessi di cui mi sono occupato in questa Memoria la decrescenza di stabilità dal platinato al piombato procede egualmente.

Il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$ esiste infatti in soluzione acquosa normalmente dissociato ($\Delta = 19,9$) ed offre con ciò, come il cloroplatinato, la possibilità di fare nettamente doppi scambi con le soluzioni metalliche; lo stannato $[Sn(OH)^6]K^2$ fornisce anche esso doppi scambi in soluzioni acquose concentrate, per quanto nelle soluzioni diluite risenta la dissociazione molecolare ed idrolitica; il piombato $[Pb(OH)^6]K^2$ viene infine subito e profondamente decomposto dall'acqua. Anche qui adunque si passa dalla stabilità notevole ed integra dell'anione $[Pt(OH)^6]''$ a quella più limitata del $[Sn(OH)^6]''$, fino a giungere a quella debolissima dell'anione $[Pb(OH)^6]''$.

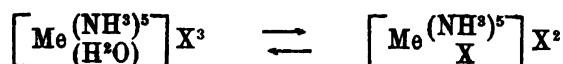
Un fatto molto notevole si è che questo tipo di sali ossidrilati puri presenta una stabilità maggiore di quella dei corrispondenti clorosali. Abbiamo visto e sappiamo infatti che se tanto il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$ che il cloroplatinato $[PtCl^6]K^2$ trovansi nell'acqua normalmente dissociati nel senso elettrolitico, il platinato di argento $[Pt(OH)^6]Ag^2$, che può dal primo derivarsi per doppio scambio, ci si presenta molto più resistente dal cloroplatinato di argento $[PtCl^6]Ag^2$, egualmente derivabile per doppio scambio, il quale ultimo risente per azione dell'acqua una dissociazione molecolare. Così abbiamo visto nella relativa parte sperimentale che mentre lo stannato $[Sn(OH)^6]K^2$ può dare doppi scambi, poichè il complesso $[Sn(OH)^6]''$ si decompone soltanto in soluzioni acquose molto diluite, il clorostannato $[SnCl^6]K^2$ anche in soluzioni concentrate trovasi invece scisso molecolarmente; si è infine osservato come il piombato potassico $[Pb(OH)^6]K^2$ mantenuto in ambiente fortemente alcalino abbia potuto darci un doppio scambio, mentre ognun sa quanto sia più irreparabile la decomposizione alla quale va incontro il cloropiombato $[PbCl^6]K^2$ in soluzione acquosa.

Il parallelismo nella stabilità di tre sali complessi clorurati di fronte a quelli ossidrilati ci si manifesta del resto vieppiù evidente considerando la stabilità degli acidi relativi che possono derivarsene. Nel caso infatti dei sali clorurati si ha:

vale a dire, nelle ordinarie condizioni di temperatura e di pressione, per il platino si mantiene stabile l'acido cloroplatinico $[PtCl^6]H^2$; per lo stagno l'acido clorostannico $[SnCl^6]H^2$ si riduce ad $SnCl^4$, mentre l'acido cloropiombico $[PbCl^6]H^2$ passa addirittura a $PbCl^2$. Orbene per i sali ossidrilati si ha:

vale a dire per il platino è stabile l'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$ come lo è il cloroplatinico; per lo stagno ci si ferma ad $Sn(OH)^4$, come ad $SnCl^4$; per il piombo si va direttamente alla forma anidra PbO^2, come si va al cloruro $PbCl^2$.

Se non è possibile adunque l'ottenere dallo stannato e dal piombato i relativi acidi $[Sn(OH)^6]H^2$ e $[Pb(OH)^6]H^2$, perchè questi ci si presentano instabili, così come lo sono gli acidi clorostannico e cloropiombico, possiamo come si è visto ottenere dal platinato l'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$ sufficientemente stabile nelle ordinarie condizioni. E questo acido platinico che può aversi precipitato, per azione limitata di un acido più energico, da qualsiasi dei platinati sopra descritti, solubile od insolubile, cristallizzato od amorfo, è senza dubbio una delle prove più evidenti che giustificano le formole da me assegnate a questi sali, e portano ad escludere per essi le formole equivalenti $MeO^3K^2, 3H^2O$. Ammettendo quest' ultime non si sarebbe avuto infatti che un acido MeO^3H^2, mentre nel caso dei platinati si precipita sempre l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$. Data la decrescenza di stabilità che si incontra dai platinati agli stannati ed ai piombati questa dimostrazione persiste ancora nel caso degli stannati (per i quali in luogo di SnO^3H^2 si ottiene $Sn(OH)^4$), ma viene naturalmente a mancare per i piombati, per quanto tutto faccia credere, data la grandissima somiglianza di questi tre sali, la quale si impernia nell' isomorfismo dei tre sali potassici, che allo stato umido anche gli acidi stannico e piombico posseggano il grado di idratazione corrispondente alle formole $[Sn(OH)^6]H^2$ e $[Pb(OH)^6]H^2$. Oltre a ciò abbiamo visto che tutti i sali potassici del tipo generico $[Me(OH)^6]K^2$ *alla temperatura minima* a cui cominciano a perdere acqua iniziano contemporaneamente la demolizione delle loro molecole con separazione di potassa; fatto egualmente di grande interesse e che ci dimostra come quest'acqua che si svolge sia effettivamente il prodotto della decomposizione dei sei ossidrili costituenti l'anione e che non si concilia con la formola $MeO^3K^2, 3H^2O$, per la quale sarebbe giuocoforza ammettere che col calore si potesse eliminare almeno in parte l'acqua ritenuta in tal caso di cristallizzazione, senza che avvenisse una contemporanea separazione di alcali.

Nè una possibile ipotesi secondo cui si potrebbero ammettere le tre molecole di acqua come tali a far parte della costituzione di questi sali ha nel caso nostro alcuna verosimiglianza. Secondo questa ipotesi dovremmo scrivere i sali suddetti secondo la formola $\left[Me{O^3 \atop (H^2O)^3}\right]K^2$. Per escludere ciò basta pensare all'esistenza della serie di acidi misti, clorurati ed ossilidrati, intermedi fra l'acido cloroplatinico $[PtCl^6]H^2$ e l'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$, serie che lega intimamente questi due termini estremi e per la quale non è possibile ammettere che siano le molecole di acqua in luogo di ossidrili a sostituire gli atomi di cloro. Ciò porterebbe ad ammettere per l'acido platinico la formola $[Pt(H^2O)^6]H^2$ $\left(\text{e non } \left[Pt{O^3 \atop (H^2O)^3}\right]H^2\right)$, formola che ci si presenta priva di ogni significato perchè contro tutte le conoscenze che si hanno sulla funzione che può esercitare l'acqua, come molecola satura, quando entra a far parte della costituzione dei sali inorganici, così come vi entrano l'NH^3, NO, CO, Py, C^2H^4 e tante altre molecole sature. Basta che perciò diamo di sfuggita uno sguardo

alla grande famiglia dei sali metallo-ammoniacali, ove, ad esempio, a lato della serie lutea $[Me'''(NH^3)^6]X^3$ troviamo la serie rosea $\left[Me\begin{matrix}(NH^3)^5\\(H^2O)\end{matrix}\right]X^3$, nella quale una molecola di ammoniaca sostituisce come è noto una molecola di acqua. Orbene dalla serie rosea si può passare alla serie purpurea $\left[Me\begin{matrix}(NH^3)^5\\X\end{matrix}\right]X^2$, nella quale un radicale acido monovalente X è andato a sostituire una molecola di acqua, cessando però dal suo carattere ionico:

$$\left[Me\begin{matrix}(NH^3)^5\\(H^2O)\end{matrix}\right]X^3 \rightleftarrows \left[Me\begin{matrix}(NH^3)^5\\X\end{matrix}\right]X^2$$

Sia sufficiente questo esempio per ricordare come l'acqua eserciti nei sali metallo-ammoniacali una funzione chimica del tutto analoga a quella dell'ammoniaca, e con la sua eliminazione provochi un'alterazione di funzione di uno dei radicali acidi monovalenti, così come la provocherebbe l'eliminazione di una molecola di ammoniaca, restituendo a quello, con la sua rientrata nel complesso, il carattere ionico, come lo dimostra l'esempio ora citato del possibile ritorno dalla serie purpurea alla rosea. Se apparentemente adunque la molecola dell'acqua può nei sali metallo-ammoniacali sostituire un radicale acido monovalente direttamente legato al metallo, tale sostituzione apporta con sè una modificazione nel valore negativo o positivo del radicale complesso. Così, per citare ancora qualche esempio, ricorderò fra i sali più noti contenenti molecole di acqua nella loro costituzione i seguenti:

$$\left[Os\begin{matrix}Cl^5\\H^2O\end{matrix}\right]K^2 \qquad \left[Rh\begin{matrix}Cl^5\\H^2O\end{matrix}\right](NH^4)^2$$

i quali non possono che essere riferiti ai sali puri $[OsCl^6]K^3$ ed $[RhCl^6](NH^4)^3$.

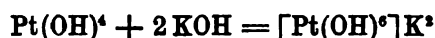
Ci appare allora come in tali sali una molecola di acqua sostituisca un atomo di cloro di questi ultimi, ma contemporaneamente il complesso sia passato da trivalente a bivalente, ovverosia in altre parole come la molecola di acqua tenga il luogo nell'un caso di una molecola di cloruro potassico, nell'altro di una di cloruro ammonico.

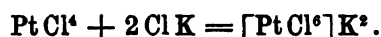
Tutte le conoscenze che si hanno in proposito confermano questo fatto generico del quale non troviamo il menomo indizio nel caso dei nostri ossisali, per i quali sarebbe possibile di passare dal sale $[PtCl^6]K^2$ al sale $[Pt(H^2O)^6]K^2$, sostituendo in un anione tutti i sei atomi di cloro con sei molecole di acqua, senza alterare affatto nè il valore, nè la funzione del complesso suddetto. Una lontana ipotesi adunque che nella costituzione dei platinati possano esistere delle molecole di acqua, in luogo dei sei ossidrili, è contro tutte le conoscenze attuali e non può nemmeno mettersi in campo per gli stannati ed i piombati da me considerati, data tutta l'intima analogia e chimica e cristallografica che presentano queste tre categorie di sali.

Molti fatti e molte considerazioni si presentano del resto a render sempre più giustificata l'esistenza dei gruppi ossidrilici nei sali da me considerati.

L'acido platinico $[Pt(OH)^6]H^2$ oltrechè derivarsi direttamente dall'acido cloroplatinico $[PtCl^6]H^2$ può prendere origine anche in altro modo sul quale è bene

soffermarci un poco. Mantenendo l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$ alla temperatura di 100°, per breve tempo, esso perde, come si è visto, due molecole di acqua e si riduce all'idrato platinico $Pt(OH)^4$. Questo idrato non si scioglie che con grande difficoltà, anche riscaldando, nella soluzione acquosa dell'idrato di potassio; si scioglie però facilmente nell'idrato di potassio fuso. Riprendendo con acqua il prodotto di questa fusione e neutralizzando la soluzione con acido acetico ne precipita l'acido $[Pt(OH)^6]H^2$, ovvero ponendo ad evaporare tale soluzione ne risulta cristallizzato il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$. L'idrato platinico $Pt(OH)^4$ sciogliendosi adunque nell'idrato potassico non dà tipi salini di sostituzione $(Pt(OX')^4, PtO^3X'_2)$ ma *si addiziona* a due molecole di idrato potassico per formare un platinato complesso:

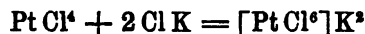
$$Pt(OH)^4 + 2\,KOH = [Pt(OH)^6]K^2$$

in modo perfettamente analogo a come il cloruro platinico $PtCl^4$ si addiziona a due molecole di cloruro potassico per dare un cloroplatinato complesso:

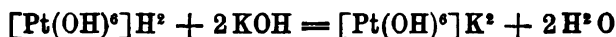
$$PtCl^4 + 2\,ClK = [PtCl^6]K^2.$$

Questa speciale tendenza a formare sali complessi puri ossidrilati, tendenza che non era mai stata finora considerata nel campo degli idrati metallici funzionanti da acidi, spiega perchè il platinato $[Pt(OH)^6]K^2$ possa derivarsi oltrechè dal cloroplatinato $[PtCl^6]K^2$, anche dal cloruro platinico con eccesso di idrato alcalino.

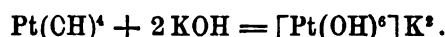
E come il cloroplatinato potassico può prendere origine sia per azione del cloruro potassico sull'acido cloroplatinico:

$$[PtCl^6]H^2 + 2\,ClK = [PtCl^6]K^2 + 2\,HCl$$

nel qual caso si ha un fenomeno di semplice sostituzione degli idrogeni acidi, sia per azione del cloruro potassico sul cloruro platinico $PtCl^4$:

$$PtCl^4 + 2\,ClK = [PtCl^6]K^2$$

nel qual caso si ha un fenomeno di addizione con relativa formazione di sale complesso, così il platinato potassico può prendere origine per azione dell'idrato potassico sull'acido platinico:

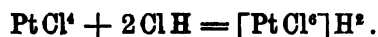
$$[Pt(OH)^6]H^2 + 2\,KOH = [Pt(OH)^6]K^2 + 2\,H^2O$$

come sull'idrato platinico:

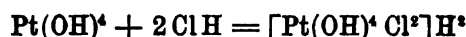
$$Pt(CH)^4 + 2\,KOH = [Pt(OH)^6]K^2.$$

I due processi decorrono, come vedesi, tanto nel caso dei composti ossidrilati che clorurati, completamente paralleli e del tutto identici e stanno a dimostrare la perfetta equivalenza, in rapporto alla funzione alogenica ed alla capacità a formare anioni complessi, che posseggono gli ossidrili a parità degli atomi di cloro.

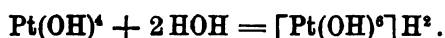
L'analogia procede oltre. Il cloruro platinico $PtCl^4$ come una vera cloroanidride combinandosi a due molecole di acqua, costituisce l'acido tetracloroplatinico:

$$PtCl^4 + 2\,HOH = [PtCl^4(OH)^2]H^2$$

e così combinandosi a due molecole di acido cloridrico forma il comune acido esacloroplatinico:

$$PtCl^4 + 2ClH = [PtCl^6]H^2.$$

In modo simile l'idrato platinico $Pt(OH)^4$ combinandosi a due molecole di acido cloridrico costituisce l'acido dicloro-platinico (1):

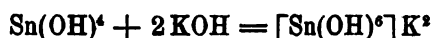
$$Pt(OH)^4 + 2ClH = [Pt(OH)^4 Cl^2]H^2$$

mentre combinandosi a due moledole di acqua forma l'acido esa-ossiplatinico:

$$Pt(OH)^4 + 2HOH = [Pt(OH)^6]H^2.$$

In linea generica noi possiamo dire che come i cloruri $PtCl^4$, $SnCl^4$, $PbCl^4$ si combinano con due molecole di cloruro di potassio per dare i sali complessi $[PtCl^6]K^2$, $[SnCl^6]K^2$, $[PbCl^6]K^2$, così gli idrati $Pt(OH)^4$, $Sn(OH)^4$, $Pb(OH)^4$ si combinano con due molecole di idrato potassico per dare i sali complessi $[Pt(OH)^6]K^2$, $[Sn(OH)^6]K^2$, $[Pb(OH)^6]K^2$.

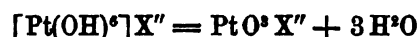
Quest'ultima facoltà degli idrati metallici di formare sali complessi trova in tale parallelismo coi rispettivi clorosali la più grande giustificazione ed offre d'altro lato la più grande analogia con le combinazioni che effettuano fra loro gli ossidi metallici:

$$SnO^2 + CaO = SnO^3Ca$$

combinazioni che è ben logico possano estendersi anche alla categoria degli idrati:

$$Sn(OH)^4 + 2KOH = [Sn(OH)^6]K^2$$

come infatti avviene data l'attitudine alogenica che abbiamo visto manifestare l'ossidrile.

Nel caso dei platinati il tipo $[Pt(OH)^6]X'_2$ può ben dirsi che sia fino ad oggi l'unico rappresentante di essi, senza escludere che possano anche ottenersi platinati di altro tipo, come ad es. PtO^3X''. Potranno questi ottenersi per via secca: così ad esempio Rousseau (loc. cit.) ha ottenuto per via secca, come si è visto, per l'appunto un platinato di bario della formola PtO^3Ba. Platinati di quest'ultimo tipo potranno ottenersi, sebbene non sia molto probabile, anche dai platinati $[Pt(OH)^6]X''$ per azione del calore:

$$[Pt(OH)^6]X'' = PtO^3X'' + 3H^2O$$

qualora i primi non si demoliscano più profondamente.

Nel caso degli stannati (tipo α) appaiono invece accanto al tipo $[Sn(OH)^6]X'_2$ soltanto alcuni stannati SnO^3X'' ottenuti per via secca, o direttamente per arroventamento dell'ossido SnO^2 mescolato con ossidi alcalino-terrosi, ovvero, come si è visto, dai sali $[Sn(OH)^6]X''$. Così lo stannato SnO^3Ca può ottenersi sia arroventando, se-

(1) Acido che è stato recentemente identificato e che, se non lo è stato finora sperimentalmente, può tuttavia teoricamente derivarsi sotto questo punto di vista.

condo DITTE, un miscuglio di SnO^2 e di CaO, sia indirettamente per azione del calore sul sale $[Sn(OH)^6]Ca$.

Per i piombati infine a lato del tipo $[Pb(OH)^6]X'_2$ compaiono due altri tipi fondamentali: $Pb(OX')^4$ e $PbO^3X'_2$.

Riassumendo genericamente si hanno per i tre metalli considerati Pt^{IV}, Sn^{IV}, Pb^{IV}) i tre tipi salini:

1) $[Me(OH)^6]X'_2$ 2) $Me(OX')^4$ 3) $MeO(OX')^2$

che si possono considerare derivati tutti o dall'ortoidrato $Me(OH)^4$ o dal metaidrato $MeO(OH)^2$:

1) $$Me(OH)^4 + 2XOH = [Me(OH)^6]X^2$$

2) $$Me(OH)^4 + 2XOH = Me(OX)^4 + 2H^2O$$

3) $$MeO(OH)^2 + 2XOH = MeO(OX)^2 + 2H^2O$$

nel 1° caso con fenomeno *di addizione* e formazione di sale complesso ossidrilato, nel 2° e 3° caso con fenomeno *di sostituzione* degli idrogeni ossidrilici.

In questa serie di tre tipi salini differenti, per quello che finora è noto, non si può passare dal tipo 1 al tipo 2, ma bensì lo si può in molti casi dal tipo 1 al tipo 3.

Le esperienze adunque riferite in questa Memoria oltre all'avere posto in luce l'esistenza di questo nuovo tipo di sali complessi ossigenati $[Me(OH)^6]X'_2$, mettendo in evidenza la nuova facoltà dei gruppi ossidrilici di costituire da soli degli anioni complessi puri, hanno dimostrato una proprietà finora sconosciuta degli idrati metallici. Gli idrati $Pt(OH)^4$, $Sn(OH)^4$, $Pb(OH)^4$, possono infatti addizionarsi a due molecole di idrato alcalino per costituire degli ossisali di tipo complesso, discostandosi in tal modo dal comportamento finora noto di tutti gli altri idrati metallici, dai quali si ammettevano sin qui derivati i soli tipi salini di sostituzione.

Sulla teoria dell' iterazione.
Memoria del prof. ONORATO NICCOLETTI

(Presentata dal Socio L. BIANCHI ed approvata dal Socio U. DINI)

INTRODUZIONE.

Sia dato un algoritmo, un procedimento di calcolo, mediante il quale da n quantità $x_1 x_2 \dots x_n$ si deducano, con legge determinata, altre n quantità $x'_1 x'_2 \dots x'_n$. Col nome di *iterazione* dell' algoritmo stesso intendiamo quel procedimento di calcolo che si ha operando dapprima, mediante l'algoritmo dato, su un gruppo di valori iniziali, ripetendo quindi l'algoritmo sui valori ottenuti, sui nuovi risultati ripetendo ancora l'algoritmo e così di seguito indefinitamente. L'algoritmo si dirà *convergente*, quando accada che le quantità, successivamente ottenute, tendano a limiti determinati e finiti.

Esempî classici di iterazione si hanno nel procedimento archimedeo per la rettificazione della circonferenza, nel metodo di NEWTON per la determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti reali, nelle ricerche postume di GAUSS sulla media aritmetico-geometrica, infine anche nel metodo d' integrazione delle equazioni differenziali e a derivate parziali, detto da PICARD delle approssimazioni successive. Mentre nei primi due di questi esempî si ha una quantità incognita, che l' iterazione permette di determinare con un' approssimazione grande a piacere, invece nella media aritmetico-geometrica di GAUSS il limite, cui l'algoritmo tende, non è più una costante, ma una funzione determinata (trascendente) delle variabili iniziali dell'algoritmo; le ricerche di GAUSS ci danno anzi un esempio notevolissimo di costruzione, mediante un algoritmo di iterazione algebrico, definito cioè da equazioni algebriche, di una funzione trascendente e della deduzione, dall'algoritmo stesso, delle principali proprietà della funzione stessa; nell' ultimo di questi esempî infine l'operazione che definisce l'algoritmo è anche essa trascendente, ed il limite cui l'algoritmo tende è una trascendente di ordine ben più elevato.

In un senso diverso l' iterazione è stata applicata allo studio e alla risoluzione di equazioni funzionali, di cui si ha un classico esempio nella nota equazione di ABEL e SCHRÖDER (¹).

(¹) Cfr. ABEL, *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable* (Oeuvres publiées par SYLOW et LIE. Tom. II, pag. 87).

Citare tutti i lavori che trattano di questioni di iterazione, o loro applicazioni, sarebbe qui troppo lungo e cadrei certamente in gravi omissioni; rimando per questo all'indice bibliografico che ho posto in fondo alla Memoria, quantunque esso non pretenda affatto ad esser completo, o quasi, chè anzi chiedo venia fin d'ora delle involontarie omissioni; avverto inoltre che mi sono, in generale, limitato a riportare i titoli di quei lavori che hanno una certa attinenza col mio.

Dirò piuttosto brevemente a quali concetti sia ispirata la Memoria che segue. Ho cercato in essa di dare un abbozzo della *teoria della convergenza dei processi di iterazione*: e mi sono limitato, almeno per ora, a studiare gli algoritmi, definiti da equazioni in termini finiti, escludendo, ad es., tutti gli algoritmi che possono definirsi mediante operazioni differenziali: ed ho escluso anche dalle mie considerazioni quegli algoritmi, per i quali le equazioni di definizione mutano ad ogni punto dell'iterazione (algoritmi *mutabili*, secondo una denominazione di Schapira). In queste ipotesi più ristrette, ho cercato di definire un algoritmo colla massima generalità possibile ed una tale generalità ho anche cercato di conservare durante tutta la ricerca.

Venendo a maggiori particolari, ho riunito nel § I le definizioni fondamentali ed alcune nozioni algebriche, ispirate alle idee del Kronecker, che mi sono sembrate indispensabili per uno studio generale sulla convergenza degli algoritmi. Il § II è dedicato alla ricerca di condizioni di convergenza di un determinato algoritmo, alla classificazione di queste condizioni, alla loro espressione mediante le equazioni che definiscono l'algoritmo; e, per quanto a me non sia riuscito quello che lo Schapira afferma (¹), di aver cioè determinato le condizioni *necessarie e sufficienti* per la convergenza di un algoritmo di iterazione, pure non credo di esser molto lontano dal vero, esprimendo l'opinione che i criterî di convergenza da me assegnati e dedotti per una via che mi sembra la più naturale, hanno un alto grado di generalità e servono, nella massima parte dei casi, a decidere della convergenza o meno di un determinato algoritmo, mediante calcoli molto semplici, anche per algoritmi piuttosto complessi. Aggiungo infine che, mentre l'iterazione di funzioni di una sola variabile è stata oggetto di molte e profonde ricerche, pochissimo, almeno in generale, è noto per gli algoritmi a più variabili; il che mi induce a sperare che i criterî di convergenza da me ottenuti, anche se non del tutto completi, possano avere un qualche interesse.

Nel § III infine ho cominciato lo studio delle proprietà generali del limite di un algoritmo convergente, quando esso si pensi come funzione delle variabili iniziali dell'algoritmo e dei parametri che eventualmente entrino nelle equazioni dell'algoritmo stesso e rispetto ai quali non si è iterato; e, considerando in modo speciale il caso in cui l'algoritmo è *reale*, ho assegnato delle condizioni (naturalmente soltanto sufficienti) sotto le quali si è sicuri che il limite è una funzione finita e continua, insieme colle successive derivate, rispetto a queste variabili, potendosi inoltre le derivate del limite ottenere derivando termine a termine le serie che definiscono

(¹) Cfr. Schapira, *Die Iteration als Fundamentalprocess mathematischer Operationen* (Jahresberichte der d. Math. Vereinigung, III Band, S. 91).

il limite stesso; quando poi l'algoritmo è complesso (analitico) e la sua convergenza è dovuta a particolari condizioni, ho dato un teorema, che mi sembra notevole, sugli sviluppi in serie delle funzioni limiti.

Mi sono limitato, in questa Memoria, allo sviluppo della teoria generale, senza farne delle applicazioni, tranne alcune osservazioni molto semplici ed elementari sulla media aritmetico-geometrica di GAUSS; questo ho fatto, sia per non aumentare ancora la mole della Memoria, che è già per sè notevole, sia perchè le applicazioni hanno una tale estensione ed importanza, che mi è sembrato molto più opportuno consacrare ad esse una trattazione a parte, che, spero, potrà quanto prima far seguito a questa mia prima Memoria.

§ I.

Definizioni fondamentali.

1. *Successione di punti di un S_n. Successioni convergenti.*

In uno spazio lineare S_n, reale o complesso, luogo di punti $x \equiv (x_1\, x_2 \dots x_n)$ consideriamo un campo continuo C; e siano

$$f_i(x_1\, x_2 \dots x_n) = f_i(x) \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

n funzioni finite, continue ed ad un sol valore dei punti del campo C, e tali inoltre che ove il punto x si assuma affatto arbitrariamente entro C, anche il punto x' definito dalle relazioni

$$x'_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

o brevemente il punto

$$x' = f(x)$$

cada ancora entro C. Sia allora $x^{(0)}$ un punto qualunque di C e poniamo successivamente

$$x^{(1)} = f(x^{(0)})\,;\; x^{(2)} = f(x^{(1)})\,;\dots;\; x^{(k)} = f(x^{(k-1)})\,;\dots \quad (k = 1, 2, 3 \dots);$$

otterremo una *successione di punti del campo* C

(A) $$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \dots;$$

diremo che la successione (A) è *convergente* e converge ad *un punto limite* $X \equiv (X_1\, X_2 \dots X_n)$, quando si abbia

$$X_i = \lim_{k=\infty} x_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

o, come scriveremo per brevità

$$X = \lim_{k=\infty} x^{(k)}.$$

In questa ipotesi, scelto un numero σ positivo e piccolo a piacere, da un certo indice k in poi si avrà, intendendo che il radicale abbia il valore aritmetico:

$$\delta_k = \sqrt{\sum_1^n {}_i |X_i - x_i^{(k)}|^2} < \sigma$$

e quindi *il punto limite* X *è interno o sul contorno del campo* C; ove infatti fosse esterno e quindi distante dai punti di C più di un numero $\delta > 0$, sarebbe sempre, per le nostre ipotesi, $\delta_k > \delta$, il che contraddice alla disuguaglianza precedente.

Quando la successione (A) converga al punto limite X, dalla continuità delle funzioni f_i segue passando al limite per $k = \infty$ nelle relazioni

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)})$$

che sarà

$$X = f(X),$$

cioè

$$X_i = f_i(X_1 X_2 \ldots X_n), \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Il punto limite X della successione (A) (convergente per ipotesi) è comune alle n ipersuperficie

$$x_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n).$$

Estenderemo senz'altro alla successione (A) le denominazioni usuali delle successioni semplici; in particolare diremo che essa è *uniformemente* convergente in un campo C′ interno a C, se comunque si scelga in C′ il punto iniziale $x^{(0)}$ della successione, da un certo indice k in poi si ha sempre $\delta_k < \sigma$, con σ piccolo a piacere. In questo caso le coordinate X_i del punto limite X, le quali sono evidentemente funzioni determinate (secondo la definizione di Dirichlet) delle coordinate $x^{(0)}$ del punto iniziale, sono anche funzioni *continue* di queste variabili; diremo brevemente che in questo caso *il punto limite* X *è una funzione continua del punto iniziale.*

2. *Divisori o moduli di un sistema di funzioni, secondo Kronecker.*

Le considerazioni che precedono possono presentarsi in una forma molto più generale.

Siano

$$(1) \qquad \varphi_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2 \ldots q)$$

$q \geq n$ funzioni finite, continue e ad un sol valore dei punti del campo C; e consideriamo il sistema delle q equazioni

$$(2) \qquad \varphi_i(x) = 0.$$

Nel caso, molto importante, che le funzioni $\varphi_i(x)$ siano razionali intere nei loro argomenti, seguendo i metodi di eliminazione di Kronecker, la costruzione di successive risultanti e la ricerca di successivi massimi comuni divisori permette di deter-

minare quali limitazioni impongano le equazioni (2) ai punti del campo C, e permette anche di scindere nelle sue diverse parti l'*insieme*, la *varietà totale comune* alle equazioni stesse (*das Gemeinsame, das Inhalt* secondo KRONECKER). Questa varietà totale consta di più varietà subordinate, di diversa dimensione, o, secondo le denominazioni di KRONECKER, di tanti *divisori* o *moduli* del sistema di equazioni (2) dei *ranghi* $1, 2 \dots n$; il divisore $M \equiv (g_1 g_2 \dots g_p)$ di rango ϱ (che può anche mancare per alcuni o per tutti i valori di ϱ) uguagliato a zero, definisce una varietà M di dimensione $n - \varrho$. Le equazioni di questa varietà sono dunque

$$(3) \qquad g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0,$$

e la caratteristica della matrice funzionale

$$\left|\frac{\partial g_r}{\partial x_s}\right| = \frac{d(g_1 g_2 \dots g_p)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} \quad (r = 1, 2 \dots p; s = 1, 2 \dots n)$$

sarà uguale a ϱ; inoltre sarà, coi simboli di KRONECKER [1]

$$(4) \qquad \varphi_i(x) \equiv 0 \pmod{M};$$

di più il metodo stesso di eliminazione porta alla determinazione di pq *moltiplicatori* h_{rs}, funzioni razionali intere delle $x_1 x_2 \dots x_n$, pei quali si ha identicamente

$$(4') \qquad \varphi_i(x) = \sum_1^p{}_\mu h_{i\mu} g_\mu(x) \qquad (i = 1, 2 \dots q).$$

Non volendo limitarci a considerare soltanto funzioni razionali intere, noi estenderemo i teoremi precedenti di KRONECKER, assumendoli come definizioni nel caso di funzioni $\varphi_i(x)$ qualunque, finite, continue ed ad un sol valore nei punti del campo C. E precisamente diremo che le funzioni $\varphi_i(x)$ hanno un divisore M di rango ϱ,

$$M \equiv (g_1 g_2 \dots g_p),$$

(1) Due funzioni $F(x_1 x_2 \dots x_n)$, $F'(x_1 x_2 \dots x_n)$, razionali intere nei loro argomenti, si dicono, secondo KRONECKER, *congrue* rispetto ad un modulo $M \equiv g_1 g_2 \dots g_p$), quando si abbia identicamente

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) - F'(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_1^p{}_r h_r(x) g_r(x)$$

colle $h_r(x)$ funzioni razionali intere dei loro argomenti, e si scrive allora anche

$$F \equiv F' (\text{mod } M)$$

od esplicitamente

$$F \equiv F' (\text{modd } g_1 g_2 \dots g_p).$$

Ci accadrà anche spesso nel seguito di considerare il modulo ottenuto *componendo* s volte un modulo M; lo indicheremo col simbolo M^s e scriveremo anche brevemente

$$M^s \equiv (\dots; g_{k1} g_{k2} \dots g_{ks}; \dots)$$

(Cfr. sui metodi algebrici del KRONECKER: KÖNIG, *Algebraischen Grössen* (Lipsia, Teubner, 1903, Cap. V) ed anche: KRONECKER (HENSEL), *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lipsia, Teubner, 1901, S. 229 e sgg.).

quando la matrice funzionale delle $g_1 g_2 \dots g_p$ abbia la caratteristica ϱ, le equazioni (3) ammettano soluzioni nel campo C e valgano insieme le (4′), sia cioè possibile determinare dei moltiplicatori $h_{i\mu}$, funzioni *finite*, continue ed ad un sol valore entro C, che soddisfino alle (4′) stesse; e anche in questo caso scriveremo le congruenze (4) ed useremo le relative denominazioni. E come nel caso di funzioni razionali intere, non escludiamo che le funzioni $\varphi_i(x)$ possano ammettere divisori di rango diverso; ma in tutto quello che segue, quando non si avverta esplicitamente il contrario, noi avremo riguardo ad uno solo tra i divisori del sistema stesso.

3. *Equazioni di definizione di un algoritmo.*

Si abbiano ora $q \geq n$ funzioni

$$\Phi_i(x_1 x_2 \dots x_n \,,\; x'_1 x'_2 \dots x'_n) = \Phi_i(x\,, x') \qquad (i = 1\,, 2 \dots q) \tag{5}$$

di due sistemi di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, $x'_1 x'_2 \dots x'_n$, che, quando le x, x' siano variabili complesse, siano funzioni *analitiche* di queste variabili; quando le x ed x' siano invece reali, siano loro funzioni reali, finite e continue nel campo che consideriamo con tutte quelle loro derivate che ci occorrerà considerare. Facendo nelle $\Phi_i(x\,, x')$ $x'_k = x_k$ $(k = 1\,, 2 \dots n)$, otteniamo q funzioni delle $x_1 x_2 \dots, x_n$

$$\varphi_i(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_i(x), \qquad (i = 1\,, 2 \dots q)$$

tali che sarà

$$\{\Phi_i(x\, x')\}_{x=x'} = \varphi_i(x), \qquad (i = 1\,, 2 \dots q) \tag{6}$$

od anche [1]

$$\Phi_i(x\, x') \equiv \varphi_i(x) \pmod{x'_k - x_k}, \qquad (i = 1\,, 2 \dots q\,,\; k = 1\,, 2 \dots n). \tag{6'}$$

Se allora $M \equiv (g_1 g_2 \dots g_p)$ è un divisore di rango ϱ del sistema delle funzioni $\varphi_i(x)$, avremo ancora

$$\Phi_i(x\, x') \equiv 0 \;(\text{modd}\; x'_k - x_k\,;\, g_1 g_2 \dots g_p), \quad (i = 1\,, 2 \dots q\,;\, k = 1\,, 2 \dots n). \tag{6''}$$

Noi ammettiamo che le q equazioni

$$\Phi_i(x\,, x') = 0 \tag{7}$$

siano compatibili nelle x' (non contraddittorie), o lasciando le x affatto arbitrarie nel campo C o, eventualmente, legandole con opportune relazioni; ammettiamo inoltre che la matrice funzionale

$$\frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_q)}{d(x'_1 x'_2 \dots x'_n)} = \left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x'_k}\right|, \qquad (i = 1\,, 2 \dots q\,;\, k = 1\,, 2 \dots n) \tag{8}$$

quando in essa si faccia $x'_k = x_k$, $g_\mu = 0$, abbia la caratteristica n.

[1] Giustificheremo più oltre (al n. 5) questa asserzione.

Dalle equazioni (7) potremo allora (se $q > n$) in un conveniente intorno della varietà M, eliminare le $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ e ne risulterà un certo gruppo di relazioni tra le $x_1 x_2 \dots x_n$, che scriveremo sotto la forma

$$H_1(x) = 0\,,\ H_2(x) = 0\,,\ \dots\ H_\sigma(x) = 0\,. \tag{9}$$

Le equazioni (7) potranno anche imporre alle sole x' delle limitazioni che scriveremo

$$K_1(x') = 0\,,\ K_2(x') = 0\,,\ \dots\ K_\tau(x') = 0\,. \tag{10}$$

Nel caso che le $\Phi_i(x, x')$ sono razionali intere nei loro argomenti, si ha

$$\begin{cases} a) & H_r(x) \equiv 0 \\ b) & K_s(x') \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{modd } \Phi_i(x, x'))\,; \tag{11}$$

è cioè possibile determinare dei moltiplicatori u, v razionali nelle x, x' pei quali si ha

$$\begin{cases} a) & H_r(x) \equiv \sum_1^q {}_s\, u_{rs}\, \Phi_s(x\, x') \qquad (r = 1, 2 \dots \sigma) \\ b) & K_l(x') = \sum_1^q {}_s\, v_{ls}\, \Phi_s(x\, x') \qquad (l = 1, 2 \dots \tau) \end{cases} \tag{11'}$$

e tali relazioni noi ammetteremo (salvo a verificare in ogni singolo caso) anche in generale, colle u, v funzioni continue delle x ed x' pei valori che dovremo considerare di queste variabili ([1]). Dalle (11') e (6'') segue allora

$$\begin{cases} H_r(x) \equiv 0 \\ K_l(x) \equiv 0 \end{cases} \quad (\text{modd } g_1\, g_2 \dots g_p) \quad \begin{matrix} (r = 1, 2 \dots \sigma) \\ (l = 1, 2 \dots \tau) \end{matrix} \tag{12}$$

e quindi la varietà definita dalle equazioni

$$H_r(x) = 0\,,\ K_l(x) = 0 \tag{12'}$$

contiene in sè la varietà M definita dalle (3). Per ottenere dei risultati che abbiano interesse, noi *ammetteremo* che esista un divisore V delle (12'), che abbia un rango minore del rango ϱ di M e che contenga in sè M, e tale inoltre che quando il punto x si assume affatto arbitrariamente entro V (in un conveniente intorno di M) le (7) definiscano le x' come funzioni continue ed ad un sol valore delle x (analitiche quando le x siano variabili complesse) (donde segue che entro V la matrice funzionale (8) avrà la caratteristica n) ed il punto x' cada ancora entro V. Questo in particolare accadrà quando anche le equazioni $H_r(x') = 0$ siano conseguenza algebrica delle $\Phi_i(x, x') = 0$, e più particolarmente ancora quando esse siano equivalenti alle (10), in guisa che *le equazioni* $H_r(x) = 0$ $(r = 1, 2 \dots \sigma)$ *formino un sistema*

([1]) Non è difficile dimostrare rigorosamente, mediante i teoremi fondamentali sulle funzioni implicite, l'esistenza delle relazioni (11') anche nel caso generale: solo per amore di brevità noi lo ammettiamo, o meglio, lo postuliamo.

invariante rispetto alle $\Phi_i(x, x') = 0$. Entro questa varietà V svolgeremo le nostre considerazioni.

Abbiamo fatto le ipotesi precedenti per trattare la questione nel modo più generale possibile, senza limitazioni estranee o superflue; ma nella maggior parte dei casi i dati saranno molto più semplici. Le equazioni (7) saranno in generale in numero di n e potranno, in un intorno conveniente della varietà M, risolversi sia rispetto alle x' che alle x; mancheranno allora le $H_r(x) = 0$, $K_l(x') = 0$ ed unica ipotesi da verificare sarà che, scelto x entro C in un conveniente intorno di M, le (7) definiscano uno ed un sol punto x' nel medesimo intorno.

4. *Algoritmi d'iterazione o di limite. Notazioni relative.*

Indichiamo ora con $x^{(0)}$ un punto qualunque della varietà V e consideriamo la successione infinita dei sistemi di equazioni:

$$\Phi(x^{(0)}, x^{(1)}) = 0 \; ; \; \Phi(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0 \; ; \ldots \Phi(x^{(k)}, x^{(k+1)}) = 0 \; ; \ldots$$

nelle ipotesi fatte, esse equazioni definiscono una *successione di punti della varietà* V

$$(13) \qquad x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots$$

ed ove questa successione sia convergente ad un punto limite X, diremo che le equazioni (7) definiscono un *algoritmo* K *d'iterazione* od un *algoritmo di limite*. A causa della continuità delle $\Phi_i(x, x')$ e per le (6), il punto limite X soddisferà alle equazioni

$$\varphi_i(X) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots q)$$

e apparterrà inoltre alla varietà V; quindi se entro V non è contenuto alcun altro divisore delle equazioni (2), oltre quello M definito dalle (3), il punto limite X apparterrà alla varietà M; diremo allora che l'algoritmo K *appartiene* alla varietà stessa M od al sistema di equazioni (3) che la definisce. Valgono evidentemente in questo caso più generale tutte le considerazioni svolte al n. 1.

Introduciamo insieme le notazioni seguenti:

L'algoritmo si dirà dato *esplicitamente* o in forma *esplicita*, quando le equazioni (7) che lo definiscono siano già risolute rispetto alle x'; altrimenti si dirà dato *implicitamente* o sotto forma *implicita*.

Diremo *dimensione* dell'algoritmo il numero n delle variabili (indipendenti) su cui esso opera (la dimensione del campo C o della varietà V), suo *rango* il rango del divisore cui l'algoritmo appartiene.

Quando le $\Phi(x, x')$ siano razionali intere nei loro argomenti, l'algoritmo si dirà *algebrico*; *razionale* quando le x' si possano esprimere in funzione razionale delle x; *omogeneo*, quando le $\Phi_i(x, x')$ siano omogenee in *tutti* i loro argomenti (o equivalenti ad un tal sistema omogeneo); *simmetrico*, quando permutando nelle (3) e nelle (5) le $x_1 x_2 \ldots x_n$ in un modo qualunque si ottengono due sistemi di funzioni rispettivamente equivalenti ai primitivi.

Da un algoritmo omogeneo le x' vengono definite in funzioni omogenee di primo grado nelle x, da un algoritmo simmetrico come funzioni simmetriche delle x stesse. La dimostrazione di queste asserzioni è immediata.

§ II.

Condizioni di convergenza.

5. *Le serie fondamentali. Prime condizioni di convergenza.*

Perchè la successione (13) sia convergente, è evidentemente necessario e sufficiente che convergano le n serie

$$x_i^{(0)} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} (x_i^{(\rho)} - x_i^{(\rho-1)}) \qquad (i = 1, 2 \dots n); \tag{14}$$

la questione della convergenza, o meno, dell'algoritmo definito dalle equazioni (7) è così ricondotta a determinare dei criterî di convergenza per queste serie.

Ammettiamo perciò che per le funzioni $\Phi_i(x, x')$ e per tutte le altre che considereremo sian soddisfatte tutte le condizioni di continuità e derivabilità che ci occorreranno. Allora dalle equazioni (7), pel teorema *degli accrescimenti finiti* (¹) e ricordando le (6), avremo:

$$\Phi_i(x, x') = \varphi_i(x) + \sum_{1}^{n} (x'_k - x_k)\, \overline{\Phi}_{ik} = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots q) \text{ (²)} \tag{15}$$

dove

$$\overline{\Phi}_{ik} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_k} \Phi_i(x, \overline{x}') \right\}_{\overline{x}'_k = x_k + \theta_i(x'_k - x_k)}, \quad 0 < |\theta_i| < 1 \tag{16}$$

$$(i = 1, 2 \dots q \ , \ k = 1, 2 \dots n).$$

Ora le (15) si riguardino come q equazioni lineari nelle n differenze $x'_k - x_k$, queste, per le ipotesi fatte, quando si limiti in un conveniente intorno di M la variabilità del punto x, non possono essere nè incompatibili, nè indeterminate. Non sono incompatibili in quanto, avendo ammesso che nell'intorno di M le equazioni (7) definiscono le x' in funzione delle x, esse hanno una soluzione almeno; per veder poi che non sono indeterminate, osserviamo che ove il punto x sia preso su M, le $\Phi_i = 0$ hanno la soluzione $x' = x$ ed essa sola, poichè la matrice (8) per $x'_k = x_k$, $g_\mu = 0$ ha la caratteristica n; ove dunque il punto x si prenda in un intorno sufficientemente piccolo di M, il punto x' e quindi anche i punti $x + \theta_i(x' - x)$ cadranno in un intorno piccolo a piacere della varietà M stessa. Ne segue che anche la matrice formata colle (16), i cui elementi sono prossimi tanto quanto si vuole agli elementi della (8) avrà la caratteristica n.

(¹) Il teorema degli accrescimenti finiti vale anche per funzioni *analitiche* di variabili complesse, nella stessa forma che per funzioni di variabile reale (cfr. Pompeiu, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XIX, anno 1905, pp. 309-313).

(²) È così giustificata, affatto in generale, un'asserzione fatta al n. 3.

Le (15) possono allora risolversi ed in modo unico rispetto alle $x'_k - x_k$; avremo così le formule

$$(17) \qquad x'_k - x_k = \sum_1^q {}_t\, \alpha_{kt}\, \varphi_t(x) \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

dove le α_{kt} sono funzioni *determinate* delle x e delle x' e quindi, mediante le $\Phi(x, x') = 0$, possono riguardarsi anche come funzioni determinate delle sole x. Tenendo conto delle (4'), le (17) si scrivono anche:

$$(18) \qquad x'_k - x_k = \sum_1^p {}_\mu\, \beta_{k\mu}\, g_\mu(x) \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

con

$$(19) \qquad \beta_{k\mu} = \sum_1^q {}_t\, \alpha_{kt}\, h_{t\mu} \qquad (k = 1, 2 \dots n\,;\ \mu = 1, 2 \dots p)$$

ed anche le $\beta_{k\mu}$ potranno riguardarsi (entro V) come funzioni finite e continue delle sole $x_1\, x_2 \dots x_n$.

Applicando inoltre alle $g_\mu(x)$ il teorema degli accrescimenti finiti, abbiamo:

$$g_\mu(x') = g_\mu(x) + \sum_1^n {}_k\, \bar{g}_{\mu k}(x'_k - x_k)$$

con

$$\bar{g}_{\mu k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \big\} g_\mu(\bar{x}) \big\{_{\bar{x} = x + \theta_\mu (x' - x)}, \quad 0 < |\theta_\mu| < 1$$

e per le (18), anche:

$$(20) \qquad g_\mu(x') = \sum_1^p {}_\nu\, \gamma_{\mu\nu}(x) \cdot g_\nu(x)$$

dove

$$(21) \qquad \gamma_{\mu\nu}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n {}_k\, \beta_{k\nu}\, \bar{g}_{\mu k}$$

ed $\varepsilon_{\mu\nu}$ è uguale ad 1 o a zero, secondochè μ e ν sono uguali o diversi [1].

[1] Non è inutile osservare che in qualunque modo si pervenga, invece che col teorema degli accrescimenti finiti, a relazioni come le (20), colle $\gamma_{\mu\nu}$ funzioni finite e continue delle x ed x' in un intorno di M (e quando l'algoritmo sia algebrico, si perverrà a relazioni simili anche per via algebrica) valgono per queste relazioni tutte le conclusioni ulteriori.

Ed osserviamo anche che quando sia $p = \varrho$ (come accadrà in generale), in qualunque modo si pervenga a relazioni come le (20), le $\gamma_{\mu\nu}$ relative avranno, *sulla varietà* M, gli stessi valori. Infatti da una relazione omogenea

$$\sum_1^p {}_\mu\, a_\mu\, g_\mu = 0$$

derivando rispetto ad una qualunque x_k e facendo poi le $g = 0$ si ottiene

$$\Sigma \big\} a_\mu \cdot g_{\mu k} \big\{_M = 0$$

e poichè la matrice $\dfrac{d(g_1 \dots g_p)}{d(x_1 \dots x_n)}$ ha la caratteristica p, anche identicamente $(a_\mu)_M = 0$, il che dimostra la nostra asserzione.

Se dunque, indicando con a un numero positivo e *minore dell'unità*, sarà in un conveniente intorno della varietà M:

$$\Gamma_\mu = \sum_1^p {}_\nu \left| \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n {}_k \bar{g}_{\mu k} \beta_{k\nu} \right| = \sum_1^p {}_\nu |\gamma_{\mu\nu}| \leq a, \tag{22}$$

chiamando con G il massimo modulo delle $g_i(x)$ in questo intorno, sarà per qualunque μ

$$|g_\mu(x')| \leq a\mathrm{G};$$

e quindi posto

$$\mathrm{G}' = a\mathrm{G},$$

anche

$$|g_\mu(x')| \leq \mathrm{G}'.$$

Il punto x' e con esso tutti i successivi $x^{(r)}$ cadono quindi nello stesso intorno di M e le p serie

$$\sum_0^\infty {}_\rho\, g_\mu(x^{(\rho)}) = \sum_0^\infty {}_\rho\, g_\mu^{(\rho)} \qquad (\mu = 1, 2 \dots p) \tag{23}$$

sono *confrontabili* (i moduli dei loro termini sono cioè minori dei termini corrispondenti, moltiplicati per un numero finito) colla progressione geometrica decrescente

$$\sum_0^\infty {}_\rho\, a^\rho$$

e quindi sono assolutamente ed uniformemente convergenti nel campo considerato; ed insieme con esse converge assolutamente ed uniformemente qualunque serie della forma

$$\sum_0^\infty {}_\rho\, \mathrm{F}(g_1^{(\rho)}, g_2^{(\rho)} \dots g_p^{(\rho)}) = \sum_0^\infty {}_\rho\, \mathrm{F}(g^{(\rho)}),$$

dove, come nel seguito, il simbolo $\mathrm{F}(g)$ indica una funzione finita e continua delle variabili x e g, che si annulla per $g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0$, che rimane finita con tutte le sue derivate rispetto alle g per tutti i possibili valori delle x (entro la varietà V) e soddisfa, rispetto alle g, al teorema degli accrescimenti finiti. In queste ipotesi infatti si ha, indicando con A un numero *finito*

$$|\mathrm{F}(g_1^{(\rho)}, g_2^{(\rho)} \dots g_p^{(\rho)})| < \mathrm{A} \sum_1^p {}_\mu |g_\mu^{(\rho)}|,$$

il che prova quanto abbiamo asserito.

In particolare, per le (18), convergeranno assolutamente ed uniformemente le serie (14); *la successione* (13) *sarà perciò convergente, ed in modo uniforme.*

6. *Trasformazione delle condizioni di convergenza.*

Conviene ora cercar di trasformare le condizioni (22) di convergenza in altre di più facile verifica.

Indichiamo per questo con ξ un punto *qualunque* della varietà M (pel quale dunque sarà $g_1(\xi) = g_2(\xi) = \cdots = g_p(\xi) = 0$) e se $\psi(x_1\, x_2 \dots x_n)$ è una funzione

qualunque delle $x_1 x_2 \dots x_n$, poniamo per brevità ora e nel seguito

$$\psi(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = \psi_M = (\psi)_M ;$$

porremo quindi in particolare

$$(22)_M \qquad (\Gamma_\mu)_M = \sum_1^\rho {}_\nu |\gamma_{\mu\nu}|_M = \sum_1^\rho {}_\nu \left| \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n {}_k\, g_{\mu k}\, \beta_{k\nu} \right|_M \qquad (\mu = 1, 2 \dots p).$$

Ammettiamo ora che sia possibile determinare un numero positivo a_0, minore dell'unità, tale che per $\mu = 1, 2 \dots p$ si abbia

$$(24) \qquad (\Gamma_\mu)_M \leq a_0 ;$$

diciamo allora che *anche le* (22) *saranno soddisfatte, purchè il punto iniziale $x^{(0)}$ si prenda* (*entro* V) *in un intorno convenientemente piccolo di* M.

Infatti, poichè la varietà M ha il rango ρ, dalle relazioni identiche

$$g_\mu = g_\mu(x) - g_\mu(\xi) \qquad (\mu = 1, 2 \dots p),$$

mediante la teoria delle funzioni implicite potremo, in un intorno conveniente di M, esprimere ρ delle x, ad es. le $x_1 x_2 \dots x_\rho$, in funzione delle altre x e delle g_μ al modo seguente

$$x_i - \xi_i = \mathrm{F}_i(g_\mu, x_k - \xi_k) \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2 \dots \rho ;\ k = \rho + 1 \dots n \\ \mu = 1, 2 \dots p \end{Bmatrix};$$

dove F_i indica, al solito, una funzione (finita e continua etc.) delle g e delle $x_k - \xi_k$, che è nulla per $g_\mu = 0$, $x_k - \xi_k = 0$.

Sia ora x un punto determinato di questo intorno e consideriamo quel punto ξ od uno di quei punti ξ di M, definito dalle relazioni [1]

$$\xi_k = x_k \qquad (k = \rho + 1, \dots n);$$

per i due punti x, ξ, avremo allora

$$x_i - \xi_i = \mathrm{F}_i(g) \ ; \ x_k - \xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots \rho ;\ k = \rho + 1, \dots n).$$

D'altra parte, *ammettendo che per le $\Gamma_\mu(x)$ valga il teorema degli accrescimenti finiti*, si ha

$$\Gamma_\mu(x) = \Gamma_\mu(\xi) + \sum_1^n {}_s\, \lambda_{\mu s}(x_s - \xi_s)$$

colle $\lambda_{\mu s}$ funzioni finite e continue delle x e delle ξ; sarà dunque anche per le relazioni superiori

$$(25) \qquad \Gamma_\mu(x) = (\Gamma_\mu)_M + \mathrm{F}_\mu(g) \qquad (\mu = 1, 2 \dots p)$$

dove la F_μ è ancora una funzione (finita, continua ecc.) delle x, ξ e delle g, che

[1] Si noti che le ipotesi fatte portano che le equazioni $g_\mu(\xi) = 0$ possono risolversi rispetto alle $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_\rho$: quindi un punto di M riesce individuato dai valori delle $\xi_{\rho+1}, \xi_{\rho+2} \dots \xi_n$ che possono assumersi, entro certi limiti, affatto arbitrariamente.

si annulla per $g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0$ e per la quale, nell'intorno di M, si possono determinare un numero A finito ed un numero s positivo (in generale ≥ 1) in guisa che si abbia

$$(25)^* \qquad |F_\mu(g)| = |\Gamma_\mu(x) - \Gamma_\mu(\xi)| < AG^s,$$

dove G è il massimo modulo delle $g_\mu(x)$ nell'intorno considerato ([1]). Dalle (25) si ha allora, nell'intorno stesso di M

$$\Gamma_\mu(x) < (\Gamma_\mu)_M + AG^s$$

e, per le $(22)_M$,

$$\Gamma_\mu(x) < a_0 + AG^s.$$

Sia ora a un numero compreso tra a_0 ed 1, e limitiamoci a considerare quell'intorno di M, nel quale è ancora soddisfatta la disuguaglianza

$$(26) \qquad G < \left(\frac{a - a_0}{A}\right)^{\frac{1}{s}} = \theta$$

il che è evidentemente possibile, per la continuità delle g_μ. Allora, se il punto x è preso *comunque* in questo intorno, sarà

$$\Gamma_\mu(x) < a \qquad (\mu = 1, 2 \ldots p);$$

cioè le (22) saranno soddisfatte ed insieme posto

$$G' = aG < a\theta < \theta,$$

(poichè $a < 1$) sarà

$$|g_\mu(x')| < G' < \theta,$$

cioè anche il punto x' cade nel medesimo intorno di M.

Se dunque le (24) sono soddisfatte ed il punto iniziale $x^{(0)}$ della successione (13) è preso in quell'intorno di M in cui vale la disuguaglianza (26), le (22) e la (26) saranno soddisfatte per ogni punto della successione; le serie (23) e (14) convergeranno in modo assoluto ed uniforme e quindi la successione stessa convergerà (in modo uniforme) ad un punto limite X (della varietà M). Cioè:

L'algoritmo K definito dalle equazioni (7) sarà certamente convergente, ed apparterrà al divisore $M \equiv (g_1, g_2 \ldots g_p)$, quando sulla varietà M stessa valgano le disuguaglianze (24) e il punto iniziale $x^{(0)}$ si assuma in un intorno convenientemente piccolo di M, entro il quale valga la disuguaglianza (26).

([1]) Dal teorema degli accrescimenti finiti, che abbiamo ammesso per le $\Gamma_\mu(x)$, si ha veramente che può sempre farsi $s = 1$ e quindi in ogni caso $s \geq 1$; ma alle (25) si può pervenire anche senza questo teorema (ad es. per via algebrica se l'algoritmo è algebrico) ed allora non può più affermarsi che è *sempre* $s \geq 1$.

7. *Convergenza lineare (o di primo grado) e di grado superiore.*

Abbiamo così sostituito alle disuguaglianze (22) l'insieme delle (24) e (26), molto più facili a verificare. Quando esse siano soddisfatte, la successione (13) converge ad un punto limite X, ed evidentemente la *rapidità* con cui il punto $x^{(\rho)}$ tende ad X (o come diremo il *grado di convergenza dell'algoritmo* K) dipende dal modo di convergere delle serie (23) e (14). Di questo grado di convergenza vogliamo ora occuparci.

Dobbiamo per questo distinguere due casi. Può accadere che le $(\Gamma_\mu)_M$, pure essendo minori di un numero $a_0 < 1$, non sian tutte nulle, in *ogni* punto di M; in questo caso indicando con a_0 il limite superiore dei valori delle $(\Gamma_\mu)_M$ su tutta la varietà M e con a un qualunque numero positivo, compreso tra a_0 ed 1, in un conveniente intorno di M, determinato dalla disuguaglianza (26), le serie (23) e quindi anche le (14) sono confrontabili colla progressione geometrica $\sum_0^\infty{}_\rho a^\rho$, ma non si può affermare ugualmente di una progressione analoga $\sum_0^\infty{}_\rho a'^\rho$, per la quale sia invece $0 < a' < a_0$. Diremo che in questo caso l'*algoritmo* K *definito dalle equazioni* (7) *ha convergenza lineare o di primo grado, e la convergenza si dirà misurata dalla costante* a_0; è chiaro infatti che quanto minore sarà a_0, tanto più rapida sarà, nell'intorno di M, la convergenza delle nostre serie.

Ma può anche accadere che *le* $\Gamma_\mu(x)$ *sian tutte nulle sulla varietà* M (sia cioè $(\Gamma_\mu)_M = 0$) (¹); in questo caso, se a è un *qualunque* numero positivo minore dell'unità, esiste sempre (per le (26)) un intorno di M, nel quale la convergenza delle nostre serie supera quella della corrispondente progressione geometrica Σa^ρ; diremo in questo caso che *il grado di convergenza dell'algoritmo* K *è superiore al primo,* o che *la convergenza è più che lineare.* In questo caso le (25) diventano:

$$\Gamma_\mu(x) = F_\mu(g);$$

e se ε è il limite superiore di quei numeri positivi, per i quali vale la disuguaglianza (25*), diremo che il grado di convergenza dell'algoritmo *è uguale ad* $1 + \varepsilon$. Posto $\eta = 1 + \varepsilon$, sarà allora per le (20) e (25*)

$$G' < AG^\eta$$

(indicando ancora con G e G' i massimi moduli delle $g_\mu(x)$, $g_\mu(x')$, quando x è nell'intorno considerato di M) e quindi anche

$$AG'^{\eta-1} < (AG^{\eta-1})^\eta;$$

se dunque il punto iniziale $x^{(0)}$ della successione (13) è preso in un intorno di M nel quale si abbia

$$AG^{\eta-1} < \theta, \tag{27}$$

(¹) O su tutta la varietà M o su una parte M_1 di M. In questo ultimo caso limiteremo le nostre considerazioni ad un intorno di M_1, anzichè di M.

dove θ è un numero fisso *minore di uno*, le serie (23) e quindi anche le (14) sono confrontabili colla serie

$$1 + \sum_1^\infty{}_\rho\, \theta^{n^\rho} \tag{28}$$

che per $\theta < 1$ ha una convergenza estremamente rapida.

Nei casi che più comunemente si offrono nelle applicazioni, il numero ε è intero; e l'algoritmo avrà convergenza *quadratica* per $\varepsilon = 1$, *cubica* per $\varepsilon = 2, \ldots$, *di grado* s per $\varepsilon = s - 1$. In quest' ultimo caso, nell' intorno della varietà M, le $\Gamma_\mu(x)$ si possono pensare espresse in funzione razionale intera omogenea di grado $s-1$ nelle $g_\mu(x)$, con coefficienti funzioni delle x finite e *non tutte nulle* sulla varietà M; e quindi per le (20) le $g(x')$ si possono esprimere in funzione razionale intera omogenea di grado s nelle g, con coefficienti funzioni finite delle x, non tutte nulle su M; si hanno cioè delle relazioni della forma:

$$g_\mu(x') = \sum_1^p{}_{k_1 k_2 \ldots k_s}\, \gamma_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s}(x) \cdot g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \ldots g_{k_s}(x) \qquad (\mu = 1, 2 \ldots p) \tag{29}$$

dove le $\gamma_{\mu, k_1 \ldots k_s}(x)$ rimangono, sulla varietà M, inferiori in modulo ad un numero finito e non sono tutte nulle.

Inversamente, quando dalle equazioni (7) che definiscono l'algoritmo, si possano avere, in un conveniente intorno di M, delle relazioni come le (29), colle $\gamma_{\mu, k_1 \ldots k_s}$ finite e *non tutte nulle* sulla varietà M ma *del resto affatto arbitrarie*, dal ragionamento che precede segue che in un intorno di M determinato dalle (27) e (29) l'algoritmo K converge e la sua convergenza ha il grado s.

Quando inoltre sia $p = \varrho$, come accade in generale, le p relazioni (29) potranno prendersi come p delle equazioni $\Phi(x, x') = 0$ che definiscono l'algoritmo K; ne segue che l'algoritmo *più generale* che abbia convergenza di grado non minore di s e che appartenga al divisore $\mathrm{M} \equiv (g_1 g_2 \ldots g_p)$ è dato in un conveniente intorno di M stesso, dal sistema

$$\begin{cases} g_\mu(x') \equiv 0 \pmod{\mathrm{M}^s} & (\mu = 1, 2 \ldots p) \\ \Phi_t(x, x') \equiv 0 \pmod{\mathrm{M}, x'_k - x_k} & (t = p+1, \ldots n;\ k = 1, 2 \ldots n) \end{cases} \tag{30}$$

o altrimenti

$$\begin{cases} g_\mu(x') = \sum_1^p{}_{k_1 k_2 \ldots k_s}\, \gamma_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s}(x)\, g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \ldots g_{k_p}(x) & (\mu = 1, 2 \ldots p) \\ \Phi_t(x, x') = \sum_1^p{}_\nu\, h_{t\nu}\, g_\nu + \sum_1^n{}_k\, (x'_k - x_k)\, \varphi_{tk}(x, x') = 0 & t = p+1, \ldots n), \end{cases} \tag{30*}$$

dove le γ sono funzioni delle x, le h, φ delle x, x'; finite, ma del resto del tutto arbitrarie dei loro argomenti, coll' unica condizione che il determinante funzionale

$$\frac{d(g'_1\, g'_2 \ldots g'_p\, \Phi_{p+1} \ldots \Phi_n)}{d(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)} \qquad (g'_\mu = g_\mu(x'))$$

non si annulli su **M**, sia cioè

$$\frac{d(g_1' g_2' \dots g_p', \Phi_{p+1} \dots \Phi_n)}{d(x_1' x_2' \dots x_n')} \not\equiv 0 \qquad (\text{modd } \mathbf{M}, x_k' - x_k).$$

8. *Convergenza di ordine superiore al primo.*

Quando in un intorno della varietà M sono soddisfatte le disuguaglianze (22), o nel caso dalla convergenza più che lineare le (29) e la (27), l'algoritmo K definito dalle equazioni (7) converge ad un punto limite X (della varietà M) con una rapidità misurata dal grado s (e per $s = 1$ dalla costante a_0) di convergenza. Ma se, per contrario, le (22) non sono soddisfatte, non è lecito per questo affermare che l'algoritmo non converge. Di questo caso vogliamo ora occuparci.

Per questo, senza preoccuparci *a priori* se valgano o no le disuguaglianze (22), nelle formule (20) del n. 5 cambiamo successivamente x in $x', x'', x''' \dots x^{(r)}$; avremo così le formule

$$g_\mu(x^{(\tau+1)}) = \sum_1^p {}_\nu \, \gamma_{\mu\nu}(x^{(\tau)}) \cdot g_\nu(x^{(\tau)}) \qquad (\tau = 0, 1, 2, \dots r-1),$$

donde, eliminando le $g(x^{(\tau)})$ per $\tau = 1, 2 \dots r-1$, abbiamo

$$g_\mu(x^{(r)}) = \sum_1^p {}_\nu \, \gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x) \cdot g_\nu(x) \tag{31}$$

dove abbiamo posto:

$$\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x) = \sum_1^p {}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{r-1}} \gamma_{\mu\nu_1}(x^{(r-1)}) \cdot \gamma_{\nu_1\nu_2}(x^{(r-2)}) \dots \gamma_{\nu_{r-2}\nu_{r-1}}(x') \, \gamma_{\nu_{r-1}\nu}(x), \tag{32}$$

di guisa che le $\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x)$ possono, mediante le equazioni che definiscono l'algoritmo, riguardarsi come funzioni *note* delle x.

Ciò posto, se indicando con a una costante positiva minore di uno, in un conveniente intorno di M si hanno le disuguaglianze:

$$\Gamma_\mu^{(r)} = \sum_1^p {}_\nu \, |\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x)| < a \qquad (\mu = 1, 2 \dots p), \tag{33}$$

ed il punto $x^{(0)}$ sia stato preso così prossimo ad M, che i punti $x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(r-1)}$ cadano anche essi in questo intorno di M, nello stesso intorno convergeranno assolutamente ed uniformemente le serie

$$\sum_0^\infty {}_\rho \, g_\mu^{(r\rho+k)} \qquad (\mu = 1, 2 \dots p;\ k = 0, 1, 2 \dots r-1)$$

(dove brevemente $g_\mu^{(\tau)} = g_\mu(x^{(\tau)})$; e perciò anche, e nello stesso modo, le serie (23) del n. 5, le quali si possono evidentemente riguardare come somma di r tra le precedenti; donde, come al n. 5, segue ancora che l'algoritmo K converge, ed in modo uniforme, ad un punto limite X (della varietà M).

Diremo in questo caso che l'algoritmo K ha *convergenza di ordine r*; ed il *minimo* ordine di convergenza che l'algoritmo possiede, si dirà semplicemente *l'ordine*

dell'algoritmo: per un algoritmo di ordine t le (33) saranno dunque soddisfatte per $r = t$, ma non pei valori minori di r.

Le condizioni di convergenza già trovate ai nn. 5-7 riguardano evidentemente la convergenza del 1° ordine.

Come per la convergenza del 1° ordine, così in generale per quella di ordine r distingueremo la convergenza *lineare* e quella *di grado superiore al primo*. La convergenza sarà *lineare* e misurata dalla costante $a_0 (< 1)$, quando le $(\Gamma_\mu^{(r)})_M$ non sono tutte nulle ed è in ogni punto di M

$$(\Gamma_\mu^{(r)})_M \leq a_0,$$

ma questo non vale per un valore a minore di a_0; le serie (23) e le (14) sono paragonabili in questo caso alla serie convergente per $a < 1$

$$\sum_0^\infty {}_\rho \, a^{\left[\frac{\rho}{r}\right]}$$

$\left(\text{dove } \left[\frac{\varrho}{r}\right] \text{ indica il massimo intero contenuto in } \frac{\varrho}{r}\right)$. Se invece le $\Gamma_\mu^{(r)}$ sono nulle su tutta la varietà M, allora nell'intorno di M, le $g_\mu^{(r)}$ si esprimeranno come forme nelle g di grado maggiore del primo: diremo allora che la convergenza ha il grado s (con $s \geq 2$) quando in un intorno conveniente di M si abbia:

$$g_\mu^{(r)} = g_\mu(x^{(r)}) = \sum_0^p {}_{k_1, k_2 \dots k_s} \, \gamma_{\mu, k_1 k_2 \dots k_s}^{(r)}(x) \cdot g_{k_1}(x) \, g_{k_2}(x) \dots g_{k_s}(x), \tag{34}$$
$$(\mu, k_1, k_2 \dots k_s = 1, 2 \dots p)$$

dove le $\gamma_{\mu, k_1 \dots k_s}(x)$ sono funzioni *finite* e determinate delle x, che *non si annullano tutte sulla varietà* M; ed in questo caso le serie (23) e (14), sono nell'intorno di M, paragonabili con una serie della forma

$$\sum_0^\infty {}_\rho \, \theta^{s^{\left[\frac{\rho}{r}\right]}} \qquad 0 < \theta < 1,$$

la quale è ancora rapidissimamente convergente.

Osserviamo infine che per $p = 1$, non è il caso di occuparci della convergenza di ordine superiore al primo; se $p = 1$, si ha infatti

$$\gamma^{(r)}(x) = \gamma(x) \cdot \gamma(x') \cdot \gamma(x'') \dots \gamma(x^{(r-1)})$$

e quindi

$$(\gamma_p^{(r)})_M = (\gamma_M)^r;$$

la γ_M e $\gamma_M^{(r)}$ sono dunque insieme nulle o diverse da zero ed in questo caso minori, oppur no, di una costante positiva minore di uno, il che dimostra la nostra asserzione. Non altrettanto può evidentemente dirsi per $p > 1$.

9. *Diversi ordini di convergenza. Osservazioni relative.*

Sia $p > 1$ e l'algoritmo K definito dalle equazioni (7) abbia l'ordine r di convergenza. È utile guardare anche alla convergenza di ordine maggiore di r; non è escluso infatti che l'algoritmo possa anche avere convergenza di un ordine t maggiore di r e che il grado della convergenza di ordine t sia superiore al grado della convergenza di ordine r, il che porta a riconoscere una maggiore rapidità nel convergere al limite della successione (13). Nulla può evidentemente dirsi in generale; ci limiteremo a fare alcune osservazioni particolari.

L'algoritmo K abbia convergenza di ordine r e grado s; e sia dapprima s intero e maggiore od uguale a 2; *a) l'algoritmo* K *avrà allora, in convenienti intorni di* M, *convergenza di qualunque ordine r' maggiore di r e di grado non minore di s.*

Sia infatti ϱ un intero positivo arbitrario; e posto, come nelle (31)

$$(31)_\rho \qquad g_\mu(x^{(\rho)}) = \sum_1^p{}_\nu\, \gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x)\, g_\nu(x),$$

cambiando x in $x^{(r)}$ e tenendo conto delle (34), si avrà:

$$(34)_\rho \qquad g_\mu(x^{(r+\rho)}) = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_s} \gamma_{\mu, k_1 \cdots k_s}^{(r+\rho)}(x)\, g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \dots g_{k_s}(x)$$
$$(\mu, k_1 k_2 \dots k_s = 1, 2 \dots p)$$

con

$$\gamma_{\mu; k_1 k_2 \cdots k_s}^{(r+\rho)} = \sum_1^p{}_\nu\, \gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x^{(r)}) \cdot \gamma_{\nu, k_1 k_2 \cdots k_s}^{(r)}(x),$$

il che dimostra la nostra asserzione.

b) Se l'ordine r' che si considera è multiplo di r, $r' = rt$, il grado di convergenza non è minore di s^t.

Per $t = 1$ il teorema è evidente; ammettiamolo allora fino ad un certo valore di t e dimostriamolo per il valore $t + 1$. Per questo cambiamo nelle (34) x in $x^{(rt)}$; avremo le formule

$$g_\mu(x^{[r(t+1)]}) = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_s} \gamma_{\mu, k_1 \cdots k_s}^{(r)}(x^{(rt)})\, g_{k_1}(x^{(rt)}) \cdot g_{k_2}(x^{(rt)}) \dots g_{k_s}(x^{(rt)})$$
$$(\mu, k_1 k_2 \dots k_s = 1, 2 \dots p)$$

donde, poichè ogni $g(x^{(rt)})$ è, per ipotesi, una forma di grado s^t nelle $g(x)$, con coefficienti *finiti*, si ha subito che ogni $g_\mu(x^{[r(t+1)]})$ è una forma di grado s^{t+1} delle g stesse, con coefficienti funzioni finite e determinate delle x, il che dimostra la nostra asserzione.

c) Più generalmente: *se l'algoritmo* K *ha convergenza di ordine r e grado s, di ordine r' e grado s', ha anche convergenza dell'ordine $r + r'$, e di grado non minore di ss'.*

Si ha infatti in questa ipotesi:

$$g_\mu(x^{(r)}) = \sum_{k_1 k_2 \dots k_s} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 \dots k_s}(x)\, g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \dots g_{k_s}(x),$$

ed insieme

$$g_\mu(x^{(r+r')}) = \sum_{k'_1 k'_2 \dots k'_{s'}} \gamma^{(r')}_{\mu, k'_1 \dots k'_{s'}}(x^{(r)}) \cdot g_{k'_1}(x^{(r)})\, g_{k'_2}(x^{(r)}) \dots g_{k'_{s'}}(x^{(r)}),$$

$$(\mu, k_1 \dots k_s, k'_1 k'_2 \dots k'_{s'} = 1, 2 \dots p)$$

donde, sostituendo, segue l'asserto.

d) Meno semplice è il caso della convergenza lineare. Se l'algoritmo K ha convergenza lineare di ordine r (misurata dalla costante a), non possiamo affatto affermare che l'algoritmo ha anche convergenza di qualunque ordine maggiore di r; vale però ancora l'ultimo teorema dimostrato avanti: *se l'algoritmo* K *ha convergenza lineare degli ordini* r *ed* r', *misurate rispettivamente dalle costanti* a, a', *ha ancora convergenza* (almeno) *lineare dell'ordine* $r + r'$, *misurata da una costante non maggiore di* $a a'$.

In queste ipotesi si ha infatti

$$g_\mu(x^{(r)}) = \sum_{1}^{p}{}_\nu \gamma^{(r)}_{\mu\nu}(x) \cdot g_\nu(x)$$

$$g_\mu(x^{(r')}) = \sum_{1}^{p}{}_\nu \gamma^{(r')}_{\mu\nu}(x) \cdot g_\nu(x)$$

ed insieme

$$(\Gamma^{(r)}_\mu)_M = \sum_{1}^{p}{}_\nu |\gamma^{(r)}_{\mu\nu}|_M \leq a \quad , \quad (\Gamma^{(r')}_\mu)_M = \sum_{1}^{p}{}_\nu |\gamma^{(r')}_{\mu\nu}|_M \leq a';$$

sarà quindi anche

$$g_\mu(x^{(r+r')}) = \sum_{1}^{p}{}_\nu \gamma^{(r+r')}_{\mu\nu}(x) \cdot g_\nu(x)$$

con

$$\gamma^{(r+r')}_{\mu\nu}(x) = \sum_{1}^{n}{}_\lambda \gamma^{(r)}_{\mu\lambda}(x^{(r)})\, \gamma^{(r')}_{\lambda\nu}(x).$$

Ne segue immediatamente:

$$(\Gamma^{(r+r')}_\mu)_M = \sum_{1}^{p}{}_\nu |\gamma^{(r+r')}_{\mu\nu}|_M \leq \sum_{1}^{p}{}_{\lambda\nu} |\gamma^{(r)}_{\mu\lambda}|_M \cdot |\gamma^{(r')}_{\lambda\nu}|_M = \sum_{1}^{p}{}_\lambda |\gamma^{(r)}_{\mu\lambda}|_M \sum_{1}^{p}{}_\nu |\gamma^{(r')}_{\lambda\nu}|_M =$$

$$= \sum_{1}^{p}{}_\lambda (\Gamma^{(r')}_\lambda)_M |\gamma^{(r)}_{\mu\lambda}|_M < a' \sum_{1}^{p}{}_\lambda |\gamma^{(r)}_{\mu\lambda}|_M \leq a a',$$

il che dimostra quanto avevamo asserito. In particolare, se l'algoritmo ha convergenza di ordine r, misurata dalla costante a, *avrà anche convergenza* (*almeno*) *lineare di ogni ordine* rt *multiplo di* r, *misurata da una costante non maggiore di* a^t.

10. *Algoritmo potenza di un algoritmo determinato.*

Alla nozione di convergenza di ordine superiore al primo siamo condotti ancora dalle considerazioni seguenti.

Consideriamo gli r sistemi di equazioni

$$\Phi(x, x') = 0, \Phi(x', x'') = 0, \Phi(x'', x''') = 0, \ldots, \Phi(x^{(r-1)}, x^{(r)}) = 0;$$

eliminando da queste le $x', x'', x''' \ldots x^{(r-1)}$ perverremo ad un sistema di equazioni

$$\Phi^{(r)}(x, x^{(r)}) = 0, \tag{35}$$

le quali entro la varietà V definiscono un algoritmo che diremo *la potenza* r^{ma} dell'algoritmo dato K ed indicheremo col simbolo K^r. Per l'algoritmo K^r, alle relazioni (20) del n. 5 corrispondono le (31) del n. 8, alle condizioni (22) e (29) di convergenza lineare e di grado superiore al primo rispettivamente le (33) e (34).

È evidente dalla definizione (e risulta subito anche da quel che abbiamo visto al numero precedente) che quando l'algoritmo primitivo K è convergente, converge ancora qualunque sua potenza K^r ed appartiene allo stesso divisore M cui appartiene l'algoritmo primitivo; le considerazioni precedenti dimostrano che inversamente quando una determinata potenza K^r dell'algoritmo primitivo K converge (e la sua convergenza è dovuta all'essere soddisfatte le (33) o le (34)) ed appartiene ad un divisore M delle equazioni $\varphi_i = 0$, dedotte dalle equazioni dell'algoritmo primitivo K, converge anche l'algoritmo K e quindi qualunque altra sua potenza.

È molto facile del resto dimostrare direttamente che: la convergenza dell'algoritmo K (in qualunque modo si possa verificare) ad un divisore delle equazioni $\varphi_i = 0$ relative all'algoritmo primitivo K [1] porta con sè anche la convergenza dell'algoritmo primitivo K.

Infatti se l'algoritmo K^r converge (ed in modo uniforme) ad un punto limite X, che appartenga alla varietà M, scelto un numero ε positivo e piccolo a piacere, potremo determinare un indice ϱ_0, tale che, quando sia $\varrho \geq \varrho_0$, si abbia

$$|X_k - x_k^{(r\varrho)}| < \varepsilon; \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

per gli stessi valori di ϱ si avrà anche

$$g_\mu(x^{(r\varrho)}) = g_\mu(x^{(r\varrho)}) - g_\mu(X) = \sum_1^n {}_k \bar{g}_{\mu k}^{(r\varrho)} (x_k^{(r\varrho)} - X_k),$$

[1] Non è escluso infatti, e può effettivamente accadere che l'algoritmo K^r converga, ma appartenga ad un divisore $M^{(r)}$ delle equazioni ad esso relative $\varphi^{(r)} = 0$ (analoghe alle (6) del n. 3), il quale non sia un divisore delle equazioni $\varphi_i = 0$ dell'algoritmo primitivo K. In questo caso le conclusioni superiori non sono più valide (cfr. nel caso di una sola variabile Kœnigs, *Recherches sùr les substitutions uniformes*, Bulletin de Sciences Mathématiques de Darboux (2). tomo VII, pag. 347, 1883).

donde, indicando con A una costante positiva finita, si trae

$$|g_\mu(x^{(r\rho)})| < A\varepsilon \;;\; (\mu = 1, 2 \dots p \;;\; \rho \geq \rho_0).$$

Sia ora σ uno qualunque dei numeri $1, 2 \dots r-1$; il punto $x^{(r\rho+\sigma)}$ può ritenersi definito dal punto $x^{(r\rho)}$ mediante un sistema di equazioni

$$\Phi^{(\sigma)}(x^{(r\rho)}, x^{(r\rho+\sigma)}) = 0,$$

ottenuto in guisa affatto analoga al sistema (35); quindi, come al n. 5, avremo delle relazioni, analoghe alle (18)

$$x_k^{(r\rho+\sigma)} - x_k^{(r\rho)} = \sum_1^p{}_\mu \, \beta_{k\mu}^{(\sigma)}(x^{(r\rho)})\, g_\mu(x^{(r\rho)})$$

dove le $\beta_{k\mu}^{(\sigma)}$ sono funzioni *finite* dei loro argomenti. Indicando perciò con B un numero finito, si avrà ancora

$$|x_k^{(r\rho+\sigma)} - x_k^{(r\rho)}| < B \sum_1^p{}_\mu |g_\mu(x^{(r\rho)})|, \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

e in fine per ciò che precede

$$|X_k - x_k^{(r\rho+\sigma)}| \leq |X_k - x_k^{(r\rho)}| + |x_k^{(r\rho+\sigma)} - x_k^{(r\rho)}| < (pAB + 1)\,\varepsilon = \Omega\varepsilon$$
$$(k = 1, 2 \dots n \;;\; \rho \geq \rho_0, \sigma = 0, 1, 2 \dots r-1)$$

dove Ω è ancora un numero finito; cioè l'algoritmo K è anche esso (uniformemente) convergente ed il suo limite è il punto X [1].

[1] La opportunità d'introdurre la nozione di convergenza di ordine superiore al primo risulterà nel modo più evidente dalla considerazione degli algoritmi *ricorrenti*; ma già fin d'ora è facile dare degli esempî di algoritmi la cui convergenza è di ordine superiore al primo. Consideriamo, ad es., un algoritmo K in due variabili, definito dalle congruenze:

$$\begin{cases} x_1' \equiv ax_1 + bx_2 \\ x_2' \equiv -\dfrac{a^2}{b}x_1 - ax_2 \end{cases} \qquad (\text{modd } x_1^2, x_1x_2, x_2^2);$$

con a e b *costanti arbitrarie e b diverso da zero,* lasciando del resto affatto arbitrarî i moltiplicatori (purchè finiti) nelle rispettive congruenze. L'algoritmo K appartiene al divisore $x_1 = x_2 = 0$; per la sua seconda potenza si ha, poichè $x_1'^2 \equiv x'_1 x'_2 \equiv x_2'^2 \equiv 0$ (modd. x_1^2, x_1x_2, x_2^2)

$$\begin{cases} x_1'' \equiv a(ax_1 + bx_2) + b\left(-\dfrac{a^2}{b}x_1 - ax_2\right) \equiv 0 \\ x_2'' = -\dfrac{a^2}{b}(ax_1 + bx_2) - a\left(-\dfrac{a^2}{b}x_1 - ax_2\right) \equiv 0 \end{cases} \qquad (\text{modd } x_1^2\, x_1x_2, x_2^2);$$

cioè in un conveniente intorno di $x_1 = x_2 = 0$ l'algoritmo K^2 ha convergenza quadratica; e quindi l'algoritmo K ha convergenza di ordine e grado uguali a 2; mentre, se ad es. una delle due costanti a, b ha un modulo maggiore di uno, l'algoritmo K non ha convergenza, neppure lineare, del primo ordine.

11. *Condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di ordine r e grado s.*

Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'algoritmo K definito dalle equazioni (7) abbia convergenza di ordine r e grado s?

Consideriamo dapprima il caso della convergenza di grado superiore al primo ($s \geq 2$), nel quale i risultati hanno una determinatezza molto maggiore. È allora necessario e sufficiente che si abbiano, in un intorno di M, le (34). Ora, quando queste siano soddisfatte, derivandole fino ad un ordine qualsiasi ϱ minore di s, avremo identicamente

$$(36) \qquad \Gamma^{(r)}_{\mu, t_1 t_2 \dots t_\varrho} = \frac{\partial^\varrho g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_{t_1} \partial x_{t_2} \dots \partial x_{t_\varrho}} \equiv 0 \pmod{M}, \; \begin{pmatrix} \varrho < s \; ; \; \mu = 1, 2 \dots p \\ t_1, t_2 \dots t_\varrho = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

Viceversa, quando si abbiano le (36), varranno, in un intorno di M, anche le (34), e quindi l'algoritmo K avrà convergenza di ordine r e grado s.

Per dimostrarlo, osserviamo che, con un procedimento affatto identico a quello tenuto al n. 6, qualunque funzione $F(x_1 x_2 \dots x_n)$, che soddisfi alle solite condizioni di continuità e derivabilità e che sia finita nel campo C, si può porre sotto la forma

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = F_M + \sum_1^p {}_\mu \, h_\mu g_\mu,$$

colle h_μ funzioni determinate delle x, finite sulla varietà M; se quindi è $F_M = 0$, sarà anche

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv 0 \pmod{M}.$$

Facciamo ora nelle (36) $\varrho = 1$; consideriamo cioè le relazioni

$$\frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_t} \equiv 0 \pmod{M}, \qquad (t = 1, 2 \dots n);$$

avendosi per le (31) del n. 8

$$\frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_t} = \sum_1^p {}_\nu \, \gamma^{(r)}_{\mu\nu} g_{\nu t} + \sum_1^p {}_\nu \frac{\partial \gamma^{(r)}_{\mu\nu}}{\partial x_t} g_\nu,$$

sarà ancora

$$\sum_1^p {}_\nu \, \gamma^{(r)}_{\mu\nu} g_{\nu t} \equiv 0 \pmod{M};$$

donde, poichè la matrice $\dfrac{d(g_1 g_2 \dots g_p)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} = |g_{\nu t}|$ ha (mod. M) la caratteristica p, si ha immediatamente

$$\gamma^{(r)}_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{M},$$

cioè

$$\gamma^{(r)}_{\mu\nu} = \sum_1^{p}{}_{\nu_1} \gamma^{(r)}_{\mu,\nu\nu_1} g_{\nu_1},$$

essendo le $\gamma^{(r)}_{\mu,\nu\nu_1}$ funzioni delle x *finite* sulla varietà M; sostituendo nelle (31), queste assumono la forma:

$$g_\mu(x^{(r)}) = \sum_1^{p}{}_{\nu_1\nu_2} \gamma^{(r)}_{\mu,\nu_1\nu_2} g_{\nu_1} g_{\nu_2},$$

caratteristica della convergenza di grado ≥ 2.

Procediamo ora per induzione ed ammettiamo che dalle (36) seguano le (34) per $\varrho = 1, 2 \ldots s-1$; dimostriamolo ancora per $\varrho = s$. Avremo dunque insieme colle (36) le altre relazioni:

$$\frac{\partial^s g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_{t_1} \partial x_{t_2} \ldots \partial x_{t_s}} \equiv 0 \text{ (mod M)}, \quad (\mu = 1, 2 \ldots p;\ t_1, t_2 \ldots t_s = 1, 2 \ldots n);$$

eseguendo sulle (34) queste derivazioni, otteniamo, a meno del fattore $s!$:

$$\sum_1^{p}{}_{k_1 k_2 \ldots k_s} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s} g_{k_1 t_1} g_{k_2 t_2} \ldots g_{k_s t_s} \equiv 0 \text{ (mod M)}$$

$$(\mu, k_1 \ldots k_s = 1, 2 \ldots p;\ t_1, t_2 \ldots t_s = 1, 2 \ldots n).$$

Sia ora, per maggiore semplicità, $p = \varrho$; poichè la matrice funzionale $\frac{d(g_1 \ldots g_p)}{d(x_1 \ldots x_n)}$ ha (mod. M) la caratteristica p, avremo successivamente, sempre rispetto al modulo M:

$$\sum{}_{k_1 k_2 \ldots k_{s-1}} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s} g_{k_1 t_1} g_{k_2 t_2} \ldots g_{k_{s-1} t_{s-1}} \equiv 0$$
$$\sum{}_{k_1 k_2 \ldots k_{s-2}} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s} g_{k_1 t_1} g_{k_2 t_2} \ldots g_{k_{s-2} t_{s-2}} \equiv 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum{}_{k_1} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s} g_{k_1 t_1} \equiv 0$$

ed infine

$$\gamma^{(r)}_{\mu, k_1, k_2 \ldots k_s} \equiv 0 \qquad (p, k_1 k_2 \ldots k_s = 1, 2 \ldots p)$$

od anche

$$\gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s} = \sum_1^{p}{}_{k_{s+1}} \gamma^{(r)}_{\mu, k_1 k_2 \ldots k_s k_{s+1}} g_{k_{s+1}};$$

sostituendo nelle (34) si ottengono le formule stesse, cambiato s in $s+1$, il che dimostra la nostra asserzione.

Le congruenze (36) *assegnano quindi le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'algoritmo* K *abbia convergenza di ordine r e di grado non maggiore di s.* Il numero di quelle tra esse, veramente distinte, si ha subito dalle considerazioni seguenti. Pensiamo come nuove variabili indipendenti le $g_1 g_2 \ldots g_p$ (si ricordi che supponiamo $p = \varrho$) ed altre $n-p$ variabili $u_{p+1}, u_{p+2} \ldots u_n$, il che è possibile in un

intorno di M; i punti della varietà M si hanno allora facendo $g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0$ e facendo variare arbitrariamente (entro certi limiti) le $u_{p+1}, u_{p+2} \dots u_n$ [1]. Ne segue che insieme con una derivata di una $g(x^{(r)})$ che sia nulla su M, sono nulle *identicamente* le derivate di questa rispetto alle variabili u, non lo sono invece (identicamente) quelle derivate, in cui come variabili di derivazioni si hanno le g. Allora, poichè per $\varrho = 0$, le (36) sono identicamente soddisfatte, in forza delle (31), condizioni indipendenti si hanno da tutte e sole quelle derivate, nelle quali come variabili di derivazione figurano soltanto le g; il loro numero è dunque uguale

$$p \sum_{1}^{s-1}{}_{\varrho} \binom{p+\varrho-1}{\varrho} = p \left\{ \binom{p+s-1}{p} - 1 \right\}.$$

Quando esse siano soddisfatte, l'algoritmo ha un grado di convergenza non minore di s; perchè il grado sia proprio uguale ad s, è chiaro che le (36) stesse debbono valere per $\varrho \leq s-1$, ma *non* per il valore $\varrho = s$; l'algoritmo K avrà dunque convergenza di grado *uguale* ad s, quando *insieme alle* (36) *si abbia anche la disuguaglianza*:

$$\sum_{1}^{p}{}_{\mu} \sum_{1}^{n}{}_{i_1 i_2 \dots i_s} \left| \frac{\partial^s g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_s}} \right| \neq 0 \pmod{M}.$$

12. *Forma esplicita delle condizioni di convergenza.*

Volendo scrivere le (36) in modo esplicito, è necessario pensare una qualunque $g_\mu(x^{(r)})$ come funzione composta delle x mediante le $x^{(r)}$, e queste a loro volta come funzioni composte delle x, mediante le $x, x', x'' \dots x^{(r-1)}$, tratte dalle equazioni:

$$\Phi_i(x^{(\lambda)}, x^{(\lambda+1)}) = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots q \; ; \; \lambda = 0, 1, 2 \dots r-1).$$

I teoremi fondamentali sulle funzioni implicite servono allora ad esprimere le successive derivate delle $x^{(\lambda+1)}$ rispetto alle $x^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1 \dots r-1)$ in funzione delle $x^{(\lambda)}$ e delle $x^{(\lambda+1)}$ stesse: dopo eseguite tutte le derivazioni successive, dovremo fare $g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0$, e quindi anche insieme $x^{(\lambda)} = x$ (per $\lambda = 1, 2 \dots r$). Si hanno così delle formule che, quando s è maggiore di 2, assumono, nel caso generale, un aspetto molto complicato, e che perciò non scriveremo: ci limitiamo soltanto a notare che, come segue dai teoremi ricordati, *ogni* $\Gamma_{\mu, i_1 \dots i_\varrho}$ (a meno di un denominatore che su M è diverso da zero e finito) *si può esprimere come una funzione razionale intiera delle derivate delle* $g_\mu(x)$ *e delle* $\Phi_i(x, x')$ *rispetto ai loro argomenti di ordine non maggiore di* ϱ *e nella quale figurano in modo essenziale le derivate della* g_μ *e delle* Φ_i *di ordine* ϱ; di guisa che *è possibile, operando sulle* g *e sulle* Φ *con sole operazioni razionali e di derivazione, riconoscere se l'algoritmo definito dalle* (7) *ha convergenza di un determinato ordine e grado.*

[1] Si noti che qui supponiamo implicitamente $q = n$. Il caso di $q > n$ sarà trattato più oltre (n. 18).

Per $s=2$, è invece facile eseguire i calcoli indicati e siamo condotti a formule concise ed eleganti. In tale ipotesi infatti le (36) si riducono alle np congruenze (in numero di p^2 indipendenti)

$$\frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_k} \equiv 0 \pmod{M} \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \; ; \; k = 1, 2 \dots n).$$

Ora, per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_k} = \sum_1^n {}_t \frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_t^{(r)}} \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k} ;$$

$$\frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k} = \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_{k_1}^{(r-1)}} \cdot \frac{\partial x_{k_1}^{(r-1)}}{\partial x_{k_2}^{(r-2)}} \cdots \frac{\partial x'_{k_{r-1}}}{\partial x_k} ;$$

ma, derivando le equazioni [1]

$$\Phi_i^{(\lambda)} = \Phi_i(x^{(\lambda)}, x^{(\lambda+1)}) = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

si ottiene

$$\frac{\partial \Phi_t^{(\lambda)}}{\partial x_k^{(\lambda)}} + \sum_1^n {}_u \frac{\partial \Phi_t^{(\lambda)}}{\partial x_u^{(\lambda+1)}} \frac{\partial x_u^{(\lambda+1)}}{\partial x_k^{(\lambda)}} = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots n);$$

se quindi si pone

$$(37) \quad \begin{cases} D(x^{(\lambda)}) = \dfrac{d(\Phi_1^{(\lambda)} \Phi_2^{(\lambda)} \dots \Phi_n^{(\lambda)})}{d(x_1^{(\lambda+1)} x_2^{(\lambda+1)} \dots x_n^{(\lambda+1)})} \\ D_{tk}(x^{(\lambda)}) = \dfrac{d(\Phi_1^{(\lambda)} \Phi_2^{(\lambda)} \dots \Phi_n^{(\lambda)})}{d(x_1^{(\lambda+1)} \dots x_{t-1}^{(\lambda+1)} x_k^{(\lambda)} x_{t+1}^{(\lambda+1)} \dots x_n^{(\lambda+1)})} \end{cases} \qquad (t, k = 1, 2 \dots n)$$

sarà ancora

$$-D(x^{(\lambda)}) \frac{\partial x_t^{(\lambda+1)}}{\partial x_k^{(\lambda)}} = D_{tk}(x^{(\lambda)});$$

ponendo dunque ancora

$$(38) \quad \begin{cases} D^{(r)}(x) = (-1)^r D(x^{(r-1)}) D(x^{(r-2)}) \dots D(x') D(x) \\ D_{tk}^{(r)}(x) = \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} D_{tk_1}(x^{(r-1)}) D_{k_1 k_2}(x^{(r-2)}) \dots D_{k_{r-2} k_{r-1}}(x') D_{k_{r-1} k}(x), \end{cases}$$

sarà infine

$$(39) \qquad D^{(r)}(x) \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k} = D_{tk}^{(r)}(x).$$

Ora, quando si faccia $g_1 = g_2 = \dots = g_p = 0$ è anche $x = x' = x'' = \dots x^{(r-1)} = x^{(r)}$ cioè

$$x_k^{(\lambda)} \equiv x_k \pmod{M} \qquad (\lambda = 1, 2 \dots r);$$

[1] Supponiamo, per semplicità, sia $q = n$, cioè che la varietà V sia tutto il campo C, in un conveniente intorno di M.

posto quindi

(40) $$\frac{\partial g_\mu(x)}{\partial x_i} \equiv g_{\mu i}\ ,\ D(x) \equiv \Delta\ ,\ D_{ik}(x) \equiv \Delta_{ik}\ (\text{mod } M),$$

sarà $\Delta \not\equiv 0$; ed inoltre, sempre rispetto al modulo M

(40') $$\begin{cases} D(x^{(\lambda)}) \equiv \Delta\ ;\ D_{ik}(x^{(\lambda)}) \equiv \Delta_{ik}\ , \\ D^{(r)}(x) \equiv (-1)^r \Delta^r\ ,\ D_{ik}^{(r)}(x) \equiv \Sigma_{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} \Delta_{ik_1} \Delta_{k_1 k_2} \dots \Delta_{k_{r-1} k} \equiv \Delta_{ik}^{(r)}; \end{cases}$$

donde, per la (39), si ottiene

(41) $$\frac{\partial x_i^{(r)}}{\partial x_k} \equiv (-1)^r \frac{\Delta_{ik}^{(r)}}{\Delta^r}\ (\text{mod } M).$$

Si avranno quindi come condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza quadratica e di ordine r le np congruenze (in numero di p^2 indipendenti)

(42)$_r$ $$A_{\mu k}^{(r)} = \sum_1^n{}_i\, g_{\mu i} \Delta_{ik}^{(r)} \equiv 0\ (\text{mod } M)$$
$$(M = (g_1, g_2 \dots g_p)\ ;\ \mu = 1, 2 \dots p\ ;\ k = 1, 2 \dots n).$$

In particolare, per $r = 1$, si hanno come condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza quadratica e del 1° ordine le congruenze

(42)$_1$ $$A_{\mu k} = \sum_1^n{}_i\, g_{\mu i} \frac{d(\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x_1' x_2' \dots x_{i-1}' x_k x_{i+1}' \dots x_n')} \equiv 0\ (\text{mod } M)$$
$$(M = (g_1 g_2 \dots g_p)\ ;\ \mu = 1, 2 \dots p\ ;\ k = 1, 2 \dots n).$$

Consideriamo il caso che l'algoritmo sia dato sotto forma esplicita e quindi si abbia

(7') $$\Phi_i = x_i' - f_i(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad (i = 1, 2 \dots n);$$

è allora

(37)' $$D(x) = 1\ ,\ D_{ik}(x) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = -f_{ik}$$

e quindi anche

(40') $$\Delta = 1\ ;\ \Delta_{ik} = -f_{ik}\ ,\ \Delta_{ik}^{(r)} = (-1)^r f_{ik}^{(r)}$$

con

(38') $$f_{ik}^{(r)} = \Sigma_{k_1 k_2 \dots k_{r-1}} f_{ik_1} f_{k_1 k_2} \dots f_{k_{r-1} k}\ ;$$

e le (42)$_r$ diventano

(42)$'_r$ $$\sum_1^n{}_i\, g_{\mu i} f_{ik}^{(r)} \equiv 0\ (\text{mod } M), \qquad (\mu = 1, 2 \dots, p\ ;\ k = 1, 2 \dots n)$$

e per $r = 1$

(42)$'_1$ $$\sum_1^n{}_i\, g_{\mu i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \equiv 0\ (\text{mod } M), \qquad (\mu = 1, 2 \dots p\ ;\ k = 1, 2 \dots n).$$

Se, ancora più particolarmente, l'algoritmo K ha la forma

$$(7'') \qquad x'_t = x_t + \sum_1^p h_{t\nu}\, g_\nu \qquad (t = 1, 2 \dots n)$$

(che pone in evidenza il divisore cui l'algoritmo appartiene) si ha

$$\frac{\partial f_t}{\partial x_k} \equiv \varepsilon_{tk} + \sum_1^p{}_\nu\, h_{t\nu}\, g_{\nu k} \pmod{M}$$

e le $(42)'_1$ diventano

$$\sum_1^p{}_\nu\, g_{\nu k} \left\{ \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n{}_t\, h_{t\nu}\, g_{\mu t} \right\}' \equiv 0 \pmod{M},$$

e poichè la matrice $|g_{\nu k}|$ ha (mod M) la caratteristica p, si hanno le p^2 relazioni (indipendenti)

$$(42)''_1 \qquad \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n{}_t\, g_{\mu t}\, h_{t\nu} \equiv 0 \pmod{M}, \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots p).$$

13. *Osservazioni. Condizioni per la convergenza lineare.*

a) Al n° precedente abbiamo supposto $q = n$; sia ora invece $q > n$, o più generalmente il punto x non si assuma affatto arbitrariamente in C (in un intorno conveniente della varietà M), ma, insieme con tutti i punti $x^{(r)}$, appartenga ad una varietà V di rango k (con $0 < k < p$) che contiene in sè la varietà M (cfr. n. 3). Ancora in questo caso le (36) assegnano le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'algoritmo K abbia convergenza di ordine r e grado s; il ragionamento che ha portato alle (36) è infatti indipendente dalla ipotesi particolare che ora facciamo; e poichè le formule $(42)_r$ ed analoghe si hanno semplicemente scrivendo le (36) (per $s = 2$) in forma esplicita, esse varranno immutate, intendendo, quando sia $q > n$, che le $\Phi_1\, \Phi_2 \dots \Phi_n$ siano n tra le q equazioni dell'algoritmo, per le quali il determinante funzionale

$$\frac{d(\Phi_1\, \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)}$$

è diverso da zero sulla varietà M. È da osservare poi che in questo caso *diminuisce il numero di quelle tra esse che sono indipendenti*. Riprendendo infatti le considerazioni fatte in fine del n. 11, pensiamo i punti della varietà V determinati mediante $n - k$ variabili indipendenti $u_{k+1}, u_{k+2} \dots u_n$, in guisa che facendo $u_{k+1} = u_{k+2} \dots = u_p = 0$, e facendo variare arbitrariamente (entro certi limiti) le $u_{p+1} \dots u_n$ si ottengano i punti della varietà M; allora, poichè il punto $x^{(r)}$ è sempre di V, è chiaro che condizioni indipendenti sono portate da tutte e sole quelle derivate delle $g(x^{(r)})$, nelle quali come variabili di derivazione figurano soltanto le $u_{k+1}, u_{k+2} \dots u_p$; il numero di quelle indipendenti è dunque, per s qualunque, uguale a

$$(p-k)\left\{\binom{p-k+s-1}{p-k} - 1\right\} \text{ e per } s = 2, \text{ uguale a } (p-k)^2.$$

b) È chiaro dal n. 8 che le congruenze $(42)_r$ debbono formare un sistema equivalente al sistema

$$\gamma_{\mu\nu}^{(r)} \equiv 0 \pmod{M};$$

è facile darne una conferma analitica.

Dalle formule (18) e $(31)_\rho$ si ha infatti:

$$(18)_r \qquad x_t^{(r)} - x_t = \sum_1^r{}_\rho \{x_t^{(\rho)} - x_t^{(\rho-1)}\} = \sum_1^p{}_\mu \beta_{t\mu}^{(r)}(x)\, g_\mu(x),$$

con

$$\beta_{t\mu}^{(r)}(x) = \beta_{t\mu}(x) + \sum_1^{r-1}{}_\rho \sum_1^p{}_\nu \beta_{t\nu}(x^{(\rho)})\, \gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x);$$

e di qui come nelle (21) segue

$$\gamma_{\mu\nu}^{(r)} \equiv \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^p{}_k \beta_{k\nu}^{(r)}\, g_{\mu k} \pmod{M}.$$

Ora, derivando le $(18)_r$ abbiamo

$$(44) \qquad \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k} \equiv \varepsilon_{tk} + \sum_1^p{}_\nu \beta_{t\nu}^{(r)}\, g_{\nu k} \pmod{M}$$

e quindi

$$\frac{(-1)^r}{\Delta^r} A_{\mu k}^{(r)} \equiv \sum_1^n{}_t g_{\mu t} \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k} \equiv g_{\mu k} + \sum_1^n{}_t \sum_1^p{}_\nu \beta_{t\nu}^{(r)}\, g_{\mu t}\, g_{\nu k} \equiv \sum_1^p{}_\nu g_{\nu k} \left\{\varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n{}_t g_{\mu t}\, \beta_{t\nu}^{(r)}\right\}$$

cioè

$$(43) \qquad \frac{(-1)^r}{\Delta^r} A_{\mu k}^{(r)} \equiv \sum_1^p{}_\nu g_{\nu k} \cdot \gamma_{\mu\nu}^{(r)} \pmod{M};$$

donde, poichè la matrice $|g_{\nu k}|$ ha (mod M) la caratteristica p, segue di nuovo l'equivalenza affermata.

c) Le congruenze (43) servono ancora a *dare le condizioni per la convergenza lineare di ordine* r. Scriviamole infatti sotto la forma equivalente

$$(43)_M \qquad \sum_1^n{}_t (g_{\mu t})_M \cdot \left\{\frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_k}\right\}_M = \sum_1^p{}_\nu (g_{\nu k})_M \cdot (\gamma_{\mu\nu}^{(r)})_M; \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2 \dots p \\ k = 1, 2 \dots n\end{pmatrix}$$

poichè la matrice $|g_{\nu k}|_M$ $(\nu = 1, 2 \dots p;\ k = 1, 2 \dots n)$ ha la caratteristica p, vi sarà in'essa un minore di ordine p diverso da zero; sia, ad es. il minore

$$G = \left\{\frac{d(g_1\, g_2 \dots g_p)}{d(x_1\, x_2 \dots x_p)}\right\}_M;$$

poniamo allora

$$G_{ij} = \left\{\frac{\partial \log G}{\partial g_{ij}}\right\}_M \qquad (i, j = 1, 2 \dots p);$$

facendo nelle $(43)_M$ $k=1, 2 \dots p$, risolviamo le p equazioni ottenute rispetto alle $(\gamma_{\mu\nu}^{(r)})_M$; otteniamo le formule

$$(\gamma_{\mu\nu}^{(r)})_M = \sum_1^p {}_\lambda \, G_{\nu\lambda} \left\{ \sum_1^n {}_t \, g_{\mu t} \frac{\partial x_t^{(r)}}{\partial x_\lambda} \right\}_M ;$$

per le (41) avremo quindi come *condizioni della convergenza lineare di ordine r (misurata dalla costante a)* per l'algoritmo dato le p disuguaglianze:

$$(45)_r \qquad \sum_1^p {}_\nu \left| \sum_1^p {}_\lambda \sum_1^n {}_t \, G_{\nu\lambda} \, \Delta_{t\lambda}^{(r)} \, g_{\mu t} \right|_M < a \, |\Delta^{r}|_M \qquad (0 < a < 1);$$

e nel caso particolare che l'algoritmo sia dato sotto la forma esplicita (7'):

$$(45)'_r \qquad \sum_1^p {}_\nu \left| \sum_1^p {}_\lambda \sum_1^n {}_t \, G_{\nu\lambda} \, f_{t\lambda}^{(r)} \, g_{\mu t} \right|_M < a \, .$$

Per $r = 1$ si ottengono *le condizioni per la convergenza lineare e del 1° ordine*, espresse rispettivamente dalle disuguaglianze:

$$(45)_1 \qquad \sum_1^p {}_\nu \left| \sum_1^p {}_\lambda \sum_1^n {}_t \, G_{\nu\lambda} \, g_{\mu t} \frac{d(\Phi_1 \, \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1 \dots x'_{t-1} \, x_\lambda \, x'_{t+1} \dots x'_n)} \right|_M < a \left| \frac{d(\Phi_1 \, \Phi_2 \dots \Phi_n)}{d(x'_1 \, x'_2 \dots x'_n)} \right|_M ,$$

$$(\mu = 1, 2 \dots p \ , \ 0 < a < 1),$$

$$(45)'_1 \qquad \sum_1^p {}_\nu \left| \sum_1^p {}_\lambda \sum_1^n {}_t \, G_{\nu\lambda} \, g_{\mu t} \frac{\partial f_t}{\partial x_\lambda} \right|_M < a ; \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \ , \ 0 < a < 1)$$

e nel caso che l'algoritmo abbia la forma (7''), semplicemente (cfr. le 22_M del n. 5)

$$\sum_1^p {}_\nu \left| \varepsilon_{\mu\nu} + \sum_1^n {}_t \, h_{t\nu} \, g_{\mu t} \right|_M < a , \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \ , \ 0 < a < 1) .$$

d) Consideriamo infine il caso particolare $p = n$, quando dunque si tratti di approssimare una determinata radice *semplice* [1] del sistema di n equazioni in n incognite $x_1, x_2 \dots x_n$

$$g_1 = g_2 = \dots = g_n = 0$$

e l'algoritmo abbia la forma (7''). Dalle $(42)''_1$ si ha allora immediatamente

$$h_{ts} \equiv - G_{st} \ (\text{mod M}) ;$$

e sostituendo nelle (7'') queste diventano

$$(46) \qquad x'_t \equiv x_t - \sum_1^n {}_s \, G_{ts} \, g_s \ (\text{mod M}^2)$$

od anche

$$(46)^* \qquad x'_t = x_t - \sum_1^n {}_s \, G_{ts} \, g_s + \sum_1^n {}_{\mu\nu} \, H_{t,\mu\nu} \, g_\mu \, g_\nu$$

[1] In quanto è $\left\{ \frac{d(g_1 \, g_2 \dots g_n)}{d(x_1 \, x_2 \dots x_n)} \right\}_M \neq 0$.

colle $H_{t,\mu\nu}$ funzioni arbitrarie delle $x_1, x_2 \dots x_n$. Quando queste si facciano tutte nulle, si ottiene

$$(46)^{*\prime} \qquad x'_t = x_t - \sum_1^n{}_s G_{ts}\, g_s,$$

si hanno cioè *le formule dell'algoritmo di Newton, generalizzato ad un sistema di n equazioni in n incognite.* Un tale algoritmo ha dunque convergenza quadratica per ogni radice *semplice* del sistema di equazioni considerato; di più, qualunque algoritmo che abbia la forma (7″) e convergenza quadratica di 1° ordine ad una radice del sistema stesso, differisce dall'algoritmo di Newton per termini che hanno nelle g un grado superiore al primo, ma sono del resto affatto arbitrarî.

14. *Algoritmi inversi. Osservazioni relative.*

Supponiamo che non solo la matrice funzionale (8) del n. 3, ma anche l'altra

$$\frac{d(\Phi_1\, \Phi_2 \dots \Phi_q)}{d(x_1\, x_2 \dots x_n)}$$

abbia la caratteristica n. Allora, sotto condizioni del tutto analoghe a quelle del n. 3, le equazioni (7) potranno risolversi anche rispetto alle $x_1 \dots x_n$; definiscono quindi un altro algoritmo che diremo *inverso* del primitivo K ed indicheremo anche col simbolo K^{-1}. Riprendendo le considerazioni del n. 3, è facile vedere che se si vuole considerare insieme entro la varietà V i due algoritmi K, K^{-1} (inversi l'uno dell'altro) è necessario e sufficiente ammettere, e noi lo ammetteremo, che preso arbitrariamente il punto x' entro V, le (7) definiscano un punto x che sia ancora di V.

Le relazioni che passano tra i due algoritmi K, K^{-1} sono tutt'altro che semplici; essi possono essere ambedue convergenti, o non esserlo nessuno dei due, oppure uno convergere e l'altro no; nè una discussione del caso generale sembra esser facile. Ci limiteremo a fare alcune semplici osservazioni.

Sia dapprima $p = 1$; basta allora occuparsi soltanto della convergenza del 1° ordine; e si abbia per l'algoritmo K

$$g(x') = \gamma \cdot g(x);$$

per l'inverso K^{-1} sarà

$$g(x) = \frac{1}{\gamma} \cdot g(x').$$

Consideriamo ora le due equazioni $g(x) = 0$, $|\gamma(x)| = 1$. Quando la seconda di queste non è una conseguenza della prima (e noi escludiamo questo caso dalle nostre considerazioni) esse definiscono una varietà M_1 ad $n-2$ dimensioni che (per $n \geq 2$) divide la varietà M in due parti M', M'', nell'una delle quali, ad es. in M', è $|\gamma(x)| < 1$, nell'altra invece $|\gamma(x)| > 1$; nè è escluso che una di queste due parti possa affatto mancare. Quando ambedue esistono, è chiaro che in un conveniente intorno di M' converge l'algoritmo K, in un conveniente intorno di M'' converge

invece l'inverso K^{-1}. Inoltre l'algoritmo K non può convergere mai ad un punto di M fuori di M′, in quanto nella serie $\sum_0^\infty{}_\rho\, g^{(\rho)}$, quando sia $|\gamma| \geq 1$, i termini rimangono in modulo superiori ad un numero finito; il punto $x^{(\rho)}$ non può quindi tendere ad un punto di M, nel quale è $g = 0$; analogamente l'algoritmo K^{-1} non può convergere ad un punto di M, che non sia di M″; adunque, fatta eccezione della varietà M_1 ad $n - 2$ dimensioni, su tutta la varietà M (in un suo conveniente intorno) converge uno ed uno solo dei due algoritmi K, K^{-1}; sulla varietà M_1 non possiamo invece affermare nulla. Se in particolare $n = 1$ e le equazioni $g(x) = 0$, $|\gamma(x)| = 1$ non hanno radici a comune, in un intorno conveniente di una qualunque radice della equazione $g = 0$ o converge l'algoritmo K o l'inverso K^{-1}.

Sia ora $p > 1$; e supponiamo che l'algoritmo K, che si ha risolvendo le (7) rispetto alle x', converga nell'intorno del divisore M definito dalle equazioni (3) (o nell'intorno di una parte M′ di M) e la sua convergenza, di qualsiasi ordine e grado, sia dovuta al fatto che per esso sian soddisfatte le condizioni relative di convergenza, date ai nn. 12 e 13. Poichè la matrice (8′) ha anche essa la caratteristica n, le $g_\mu(x)$ potranno esprimersi per le $g_\mu(x^{(r)})$ con delle formule analoghe alle (31) del n. 8

$$g_\mu(x) = \sum_1^p{}_\nu\, \overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(r)})\, g_\nu(x^{(r)});$$

di qui per le (31) stesse otteniamo

$$g_\mu(x) = \sum_1^p{}_{\nu\lambda}\, \overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(r)}) \cdot \gamma_{\nu\lambda}^{(r)}(x) \cdot g_\lambda(x).$$

od anche

$$\sum_1^p{}_\lambda \left\{ \sum_1^p{}_\nu\, \overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(r)})\, \gamma_{\nu\lambda}^{(r)}(x) - \varepsilon_{\mu\lambda} \right\} g_\lambda(x) = 0;$$

e derivando rispetto ad una qualunque x_k

$$\sum_1^p{}_\lambda \left\{ \sum_1^p{}_\nu\, \overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(r)})\, \gamma_{\nu\lambda}^{(r)}(x) - \varepsilon_{\mu\lambda} \right\} g_{\lambda k} \equiv 0 \pmod{M},$$

donde, poichè la matrice $|g_{\lambda k}|$ ha (mod M) la caratteristica p, si trae

$$\sum_1^p{}_\nu\, \overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(x) \cdot \gamma_{\nu\lambda}^{(r)}(x) \equiv \varepsilon_{\mu\lambda} \pmod{M}.$$

In particolare per $\mu = \lambda$ si ottiene sulla varietà M

$$\sum_1^p{}_\nu \left\}\overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}\right\{_M \left\}\gamma_{\nu\mu}^{(r)}\right\{_M = 1$$

ed a fortiori

$$\sum_1^p{}_\nu \left|\overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}\right|_M \left|\gamma_{\nu\mu}^{(r)}\right|_M \geq 1.$$

Ora, per la convergenza dell'algoritmo K, in un conveniente intorno di M ogni $|\gamma_{\nu\mu}^{(r)}|_M$ è minore di un numero a, positivo e minore di uno, (con a piccolo a piacere quando la convergenza sia più che lineare); sarà dunque anche

$$\sum_{1}^{p}{}_{\nu} |\overline{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}|_M \geq \frac{1}{a} > 1\,, \qquad\qquad (\mu = 1\,, 2 \ldots p)$$

cioè: *l'algoritmo inverso* K^{-1} *non può avere convergenza (lineare o di grado superiore) dello stesso ordine dell'algoritmo* K; o in altra forma: *i due algoritmi* K, K^{-1} *non possono avere convergenza del medesimo ordine. Ma i due algoritmi non possono neppure avere ambedue convergenza di ordini diversi*: infatti sia che questa convergenza sia lineare, oppure di grado superiore, dai teoremi dimostrati al n. 9 seguirebbe sempre che i due algoritmi avrebbero ancora convergenza di uno stesso ordine, sufficientemente elevato.

Tutto questo non dimostra però a tutto rigore (come nel caso $p = 1$) che l'algoritmo K^{-1} non può convergere nell'intorno di M; possiamo soltanto affermare che esso non soddisfa, nell'intorno di M, alle condizioni da noi trovate di convergenza (il che però rende molto improbabile e, nella maggior parte dei casi, impossibile la sua convergenza). È da osservare inoltre che in tutto il ragionamento che precede ci siamo sempre riferiti allo stesso divisore M delle equazioni $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_q = 0$ del n. 3; può benissimo quindi accadere che l'algoritmo K^{-1} converga anche esso, ma in questo caso *apparterrà ad un divisore del sistema* $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_q = 0$, *distinto da* M.

15. *La media aritmetico-geometrica di* Lagrange *e* Gauss.

Quest'algoritmo è definito da Gauss al modo seguente [1]:

1.

« Sint $\begin{Bmatrix} a\, a'\, a''\, a''' \ldots \\ b\, b'\, b''\, b''' \ldots \end{Bmatrix}$ duae progressiones quantitatum ea lege formatae, ut qui-
« libet ipsarum termini corrispondentes sint *media* inter terminos antecedentes, et
« quidem termini progressionis superioris media aritmetica, progressionis inferioris
« geometrica, puta

$$a' = \tfrac{1}{2}(a + b)\,, b' = \sqrt{ab}\,, a'' = \tfrac{1}{2}(a' + b')\,, b'' = \sqrt{a'b'}\,, a''' = \tfrac{1}{2}(a'' + b''),$$
$$b''' = \sqrt{a''b''} \text{ etc.}$$

« Supponemus autem, ipsos a, b esse reales positivos, et pro radicibus quadraticis
« ubique accipi valores positivos, quo pacto progressiones quousque libuerit produci

(1) Gauss, *De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm.-geometricorum* (Ges. Werke, Bd III, S. 361 und ff.).

« poterunt, omnes ipsarum termini erunt plene determinati valoresque positivos reales « nanciscentur. Porro prima hic se fronte offerunt observationes sequentes:

« I. Si $a = b$, omnes utriusque seriei termini erunt $= a = b$.

« II. Si vero a, b sunt inaequales, erit $(a' - b')(a' + b') = \frac{1}{4}(a - b)^2$, unde « concluditur $b' < a'$, et perinde erit $b'' < a''$, $b''' < a'''$ etc., i. e. quivis terminus « seriei inferioris minor erit quam correspondens superioris. Quocirca in hoc casu « supponemus, esse etiam $b < a$.

« III. Eadem suppositione erit $a' < a$, $b' > b$; $a'' < a'$, $b'' > b'$ etc.; progressio « itaque superior continuo decrescit, inferior continuo crescit: hinc manifestum est, « utramque habere limitem; hi limites commode exprimuntur per a^∞, b^∞.

« IV. Denique ex $\frac{a' - b'}{a - b} = \frac{a - b}{4(a' + b')} = \frac{a - b}{2(a + b) + 4b'}$ sequitur $a' - b' <$ « $< \frac{1}{8}(a - b)$, eodemque modo erit $a'' - b'' < \frac{1}{8}(a' - b')$ etc. Hinc concluditur, « $a - b$, $a' - b'$, $a'' - b''$, $a''' - b'''$ etc. constituere progressionem continuo decre- « scentem atque ipsius limitem esse $= 0$. Hinc $a^\infty = b^\infty$, i. e. progressio superior « et inferior eundem limitem habebunt, quo illa semper manet maior, haec minor.

« Hunc limitem vocamus *numerum medium arithmetico-geometricum inter a* « *et b* et per $M(ab)$ designamus.

2.

« Radices aequationis $xx - 2ax + bb = 0$ erunt reales positivae, siquidem « $a \geq b$; medium aritmeticum inter has radices erit a, geometricum b; designata « itaque una radice (et quidem maiore, si sunt inaequales) per $'a$, altera per $'b$, « poterit $'a$ spectari tamquam terminus progressionis superioris terminum a prece- « dens, eodemque modo $'b$ tamquam terminus progressionis inferioris ante b. Similiter « designando

« aequationis $xx - 2\,'ax + 'b\,'b = 0$ radicem maiorem per $''a$, minorem per $''b$
$xx - 2\,''ax + ''b\,''b = 0$ $\quad '''a \quad '''b$
$xx - 2\,'''ax + '''b\,'''b = 0$ $\quad ''''a \quad ''''b$

« poterunt $'a$, $''a$, $'''a$ etc. spectari tamquam continuatio progressionis superioris versus « laevam, atque $'b$, $''b$, $'''b$ etc. tamquam continuatio progressionis inferioris, ita ut « iam habeantur duae progressiones utrimque in infinitum continuabiles

(I) $\quad \ldots ''''a, '''a, ''a, 'a, a, a', a'', a''', a'''', \ldots$

(II) $\quad \ldots ''''b, '''b, ''b, 'b, b, b', b'', b''', b'''', \ldots$

« Quivis itaque terminus progressionis (I) erit maior quam correspondens seriei (II); « series illa a laeva ad dextram continuo decrescit, a dextra ad laevam crescit; haec « a laeva ad dextram continuo crescit sensuque contrario decrescit. Versus dextram « utraque series eundem limitem habet; versus laevam autem (I) super omnes limites « crescit, II habet limitem 0 (nisi omnes utriusque progressionis termini sunt ae- « quales). Nam $'a = a + \sqrt{aa - bb}$; $'b = a - \sqrt{aa - bb}$; hinc $'a\,'a - 'b\,'b =$

« $= 4a\sqrt{aa - bb} > 4(aa - bb)$, similiterque $''a''a - ''b''b > 4('a'a - 'b'b)$ etc.;
« unde patet, seriem $aa - bb$, $'a'a - 'b'b$, $''a''a - ''b''b$ etc. et proin etiam hanc
« $'a, ''a, '''a$ etc. quemvis limitem superare posse; $\frac{'b}{b} = \frac{b}{'a} < \frac{b}{a}$ similiterque $\frac{''b}{'b} < \frac{'b}{'a}$ etc.
« i. e. $\frac{{}^{n+1}b}{{}^{n}b}$ infer quemvis limitem deprimi potest augendo ipsum n, adeoque limes
« seriei $b, 'b, ''b$ etc. $= 0$.

« Ex definitione numeri medii arithmetico-geometrici tam manifestum est, ut
« explicatione ampliore iam non opus sit, sequens

« T e o r e m a: *Numerus medius inter terminos quoscunque correspondentes pro-*
« *gressionum I, II idem est atque inter a et b.*

3.

« Quo clarius perspiciatur, quanta rapiditate series (I) et (II) ad dextram versus
« limitem suum approximent, et quomodo versus laevam illa crescat, haec decrescat,
« exempla quaedam hic sistimus:

Exemplum 1. $a = 1$, $b = 0,2$

$''''a$	$= 15,83795\ 47919\ 02$	$''''b$	$= 0,00000\ 00000\ 00000\ 00005\ 7$
$'''a$	$= 7,91897\ 73959\ 512$	$'''b$	$= 0,00000\ 00013\ 481$
$''a$	$= 3,95948\ 86986\ 4971$	$''b$	$= 0,00010\ 30955\ 7682$
$'a$	$= 1,97979\ 58971\ 13271\ 23927\ 9$	$'b$	$= 0,02020\ 41028\ 86728\ 76072\ 1$
a	$= 1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b	$= 0,20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a'	$= 0,60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b'	$= 0,44721\ 35954\ 99957\ 93928\ 2$
a''	$= 0,52360\ 67977\ 49978\ 96964\ 1$	b''	$= 0,51800\ 40128\ 22268\ 36005\ 0$
a'''	$= 0,52080\ 54052\ 86123\ 66484\ 5$	b'''	$= 0,52079\ 78709\ 39876\ 24344\ 0$
a''''	$= 0,52080\ 16381\ 12999\ 95414\ 3$	b''''	$= 0,52080\ 16380\ 99375$
a^{v}	$= 0,52080\ 16381\ 06187$	b^{v}	$= 0,52080\ 16381\ 06187$

« Hinc a^{v}, b^{v} in 23ª. demum figura discrepant, ${}^{v}b$ est minor quam $\left(\frac{1}{10}\right)^{40}$,
« $''''a, {}^{v}a, {}^{vi}a$ etc. sensibiliter formant progressionem geometricam, cuius exponens $= 2$.

Exemplum 2. $a = 1$, $b = 0,6$

$''''a$	$= 14,35538\ 2913$	$''''b$	$= 0,00000\ 00000$
$'''a$	$= 7,17769\ 14569\ 307$	$'''b$	$= 0,00001\ 73070$
$''a$	$= 3,58885\ 43819\ 99831\ 75712\ 7$	$''b$	$= 0,01114\ 56180\ 00168\ 24827\ 3$
$'a$	$= 1,80000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	$'b$	$= 0,20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a	$= 1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b	$= 0,60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a'	$= 0,80000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b'	$= 0,77459\ 66692\ 41483\ 37703\ 6$
a''	$= 0,78729\ 83346\ 20741\ 68851\ 8$	b''	$= 0,78719\ 58685\ 06172\ 16741\ 6$
a'''	$= 0,78724\ 71015\ 63456\ 92796\ 7$	b'''	$= 0,78724\ 70999$
a''''	$= 0,78724\ 71007\ 8$	b''''	$= 0,78724\ 71007\ 8$

Exemplum 3. $a = 1\ ,\ b = 0{,}8$

${}^{\mathrm{v}}a$	$= 25{,}19190\ 722$	${}^{\mathrm{v}}b$	$= 0{,}00000\ 00000\ 0$
${}''''a$	$= 12{,}59595\ 36116\ 78$	${}''''b$	$= 0{,}00000\ 00133\ 367$
${}'''a$	$= 6{,}29797\ 68125\ 07655\ 42373\ 4$	${}'''b$	$= 0{,}00040\ 98644\ 58278\ 08440\ 9$
${}''a$	$= 3{,}14919\ 33384\ 82966\ 75407\ 2$	${}''b$	$= 0{,}05080\ 66615\ 17033\ 24592\ 8$
${}'a$	$= 1{,}60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	${}'b$	$= 0{,}40000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a	$= 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b	$= 0{,}80000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a'	$= 0{,}90000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	b'	$= 0{,}89442\ 71909\ 99915\ 87856\ 4$
a''	$= 0{,}89721\ 35954\ 99957\ 93928\ 2$	b''	$= 0{,}89720\ 92687\ 32734$
a'''	$= 0{,}89721\ 14321\ 16346$	b'''	$= 0{,}89721\ 14321\ 13738$
a''''	$= 0{,}89721\ 14321\ 15042$	b''''	$= 0{,}89721\ 14321\ 15042$

Exemplum 4. $a = \sqrt{2}\ ,\ b = 1.$

${}''''a$	$= 19{,}17024\ 37557\ 69475\ 31905\ 0$	${}''''b$	$= 0{,}00000\ 00009\ 32560\ 02627\ 6$
${}'''a$	$= 9{,}58512\ 18783\ 51017\ 67266\ 3$	${}'''b$	$= 0{,}00013\ 37064\ 06056\ 69181\ 0$
${}''a$	$= 4{,}79262\ 77923\ 78537\ 18223\ 7$	${}''b$	$= 0{,}03579\ 93323\ 67652\ 95745\ 7$
${}'a$	$= 2{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$	${}'b$	$= 0{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$
a	$= 1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$	b	$= 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
a'	$= 1{,}20710\ 67811\ 86547\ 52440\ 1$	b'	$= 1{,}18920\ 71150\ 02721\ 06671\ 7$
a''	$= 1{,}19815\ 69480\ 94634\ 29555\ 9$	b''	$= 1{,}19812\ 35214\ 93120\ 12260\ 7$
a'''	$= 1{,}19814\ 02347\ 93877\ 20908\ 3$	b'''	$= 1{,}19814\ 02346\ 77307\ 20579\ 8$
a''''	$= 1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20744\ 1$	b''''	$= 1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20743\ 9$

Dalle formule di GAUSS segue anche

$$a' - b' = \frac{1}{4(a'+b')}(a-b)^2 < \frac{(a-b)^2}{8b}$$

e poichè $b' \geq b$,

$$(a) \qquad \frac{a'-b'}{8b'} < \left(\frac{a-b}{8b}\right)^2 ; \ldots ; \frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8b^{(k)}} < \left(\frac{a-b}{8b}\right)^{2^k}$$

ed insieme

$$\frac{a'-b'}{8b'} < \frac{1}{2}\,\frac{a-b}{8b} ; \ldots ; \frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8b^{(k)}} < \frac{1}{2^k}\,\frac{a-b}{8b} ;$$

se quindi poniamo

$$(b) \qquad \theta = \frac{a-b}{8b}\ ,\ \theta^{(k)} = \frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8b^{(k)}}\ ,\ \text{donde}\ \theta^{(k)} < \frac{1}{2^k}\,\theta\ ,$$

quando sia $\theta < 1$, dalle (a) e dalla (27) del n. 7 segue che l'algoritmo ha convergenza quadratica e del 1° ordine: quando poi sia $\theta \geq 1$, si potrà, per le (b), determinare un indice k tale che sia $\theta_k < 1$; la serie

$$\sum_0^\infty {}_n (a_{n+k} - b_{n+k})$$

è allora confrontabile colla

$$1 + \sum_{1}^{\infty} {}_n \theta_k^{2^n};$$

l'algoritmo ha quindi in ogni caso convergenza quadratica.

Supponiamo sia già $\theta = \frac{a-b}{8b} < 1$ (il che, per quanto ora abbiamo visto, non limita la generalità); è chiaro che l'algoritmo convergerà tanto più rapidamente quanto minore sarà il valore di θ. Se ne ha la conferma negli esempi di GAUSS: si ha in essi rispettivamente

Esempio 1°) $\theta = \frac{a-b}{8b} = \frac{1}{2}$ e a'''', b'''' differiscono per meno di un'unità del 10° ordine decimale,

» 2°) » $= \frac{1}{6}$ e a'''', b'''' differiscono per meno di un'unità del 11° ordine decimale,

» 3°) » $= \frac{1}{32}$ e a'''', b'''' differiscono per meno di un'unità del 15° ordine decimale,

» 4°) » $= \frac{\sqrt{2}-1}{8} = 0{,}5177...$ differiscono per meno di un'unità del 20° ordine decimale.

16. È interessante osservare, insieme col LOHNSTEIN (¹), che l'algoritmo di GAUSS converge ancora quando le quantità a, b non si suppongano più reali e positive, ma siano invece numeri complessi affatto arbitrarî, ed insieme i successivi radicali b', b'', b''' ... $b^{(n)}$ ... si scelgano in modo che si abbia

$$b^{(n+1)} = a^{(n)} \sqrt{\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}}, \quad (\text{con } a^{(n)} \neq 0)$$

dove pel radicale $\sqrt{\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}}$ si intenda presa quella determinazione, *la cui parte reale è positiva (o nulla)*. In particolare, quando a, b siano reali e positive, si è in tal guisa ricondotti alle ipotesi di GAUSS.

Anche in questo caso più generale l'algoritmo di GAUSS ha convergenza quadratica e del 1° ordine; e nella dimostrazione di questa asserzione abbiamo anzi un'applicazione interessante delle nostre formule generali.

Le equazioni che definiscono l'algoritmo possono infatti scriversi

$$\Phi_1 = 2a' - (a+b) = 0 \quad ; \quad \Phi_2 = b'^2 - ab = 0;$$

facendo in esse, conforme al n. 3, $a' = a$, $b' = b$, otteniamo il sistema

$$\varphi_1 = a - b \quad , \quad \varphi_2 = b(a-b);$$

(¹) Cfr. TH. LOHNSTEIN, *Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittel.* (Schlömilch Zeitschrift, XXXIII Jahrgang, 1888, S. 129 und ff.).

e si ha identicamente, coi simboli di Kronecker:

$$(\varphi_1, \varphi_2) \sim (a-b)\,(b, 1),$$

cioè il sistema (φ_1, φ_2) ha il divisore $g = a - b$ di rango uno.

Dal n. 12 poi abbiamo

$$\Delta = \frac{d(\Phi_1\,\Phi_2)}{d(a'\,b')} = 4b';$$

$$\Delta_{11} = \frac{d(\Phi_1\,\Phi_2)}{d(a\,b')} = -2b' \quad ; \quad \Delta_{12} = \frac{d(\Phi_1\,\Phi_2)}{d(b\,b')} = -2b;$$

$$\Delta_{21} = \frac{d(\Phi_1\,\Phi_2)}{d(a'\,a)} = -2b \quad ; \quad \Delta_{22} = \frac{d(\Phi_1\,\Phi_2)}{d(a'\,b)} = -2a;$$

donde

$$\begin{matrix} \Delta \equiv 4a \\ \Delta_{11} \equiv \Delta_{12} \equiv \Delta_{21} \equiv \Delta_{22} \equiv -2a \end{matrix} \qquad (\mathrm{modd}\ a-b\,,\, a'-a\,,\, b'-b);$$

e le $(42)_1$ diventano semplicemente

$$\mathrm{A}_{11} = \Delta_{11} - \Delta_{21} \equiv 0 \quad ; \quad \mathrm{A}_{12} = \Delta_{12} - \Delta_{22} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ g),$$

il che dimostra che in un conveniente intorno dell' S_1 $a - b = 0$, l'algoritmo ha ancora convergenza quadratica. Dalla formula di Gauss

$$a' - b' = \frac{1}{4(a'+b')}(a-b)^2 = \frac{1}{8a''}(a-b)^2$$

segue poi che: *questo intorno è costituito da tutti i rispettivi piani complessi delle variabili* a, b.

Per dimostrare la nostra asserzione, ci serviremo della rappresentazione geometrica dei numeri complessi sul piano di Gauss. Supponiamo dapprima che il rapporto $\frac{a}{b}$ *non sia* un numero reale; allora l'origine O e gli indici A_n, B_n dei punti $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ determinano un triangolo $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$, tale che il punto A_{n+1} è il punto medio del lato $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, il punto B_{n+1} è, per l'ipotesi fatta sul radicale $\sqrt{\frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}}$, sulla bisettrice *interna* dell'angolo O di questo triangolo, ad una distanza da O che è media proporzionale tra i due lati OA_n, OB_n e quindi, per teoremi noti di geometria elementare, maggiore della bisettrice dell'angolo in O dello stesso triangolo e minore del maggiore tra i due lati OA_n, OB_n. Diciamo allora s_n l'arco di cerchio che ha il centro in O, per raggio il maggiore dei due lati OA_n, OB_n e sottende all'angolo al centro $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$: questo arco s_n, il segmento $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ ed il prolungamento del minore dei due lati OA_n, OB_n fino ad incontrare s_n, limitano un triangolo curvilineo Ω_n, entro e sul contorno del quale cadono i punti A_{n+1}, B_{n+1}. E poichè il triangolo Ω_{n+1} è interno al triangolo Ω_n ed ha con esso un solo punto del contorno a comune, indicata con δ_k l'altezza del triangolo $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k$ relativa al vertice O, sarà, per tutti i valori di $n \geq k$

$$|a_n|, |b_n| > \delta_k.$$

In particolare per $k=0$, si avrà, se δ è l'altezza, relativa ad O, del triangolo OAB, per qualunque n

$$|a_n|, |b_n| > \delta .$$

Dalla formula di Gauss si ha allora

$$\left|\frac{a'-b'}{8\delta}\right| < \left|\frac{a-b}{8\delta}\right|^2$$

ed in generale, per $n > k$

$$(c) \qquad \left|\frac{a^{(n)}-b^{(n)}}{8\delta}\right| < \left|\frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8\delta}\right|^{2^{n-k}} < \left|\frac{a-b}{8\delta}\right|^{2^n}.$$

D'altra parte è ancora, per le ipotesi fatte

$$a'-b' = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = \frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{\frac{b}{a}}}{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}(a-b);$$

ed essendo $\mathrm{R}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \geq 0$, si ha pure

$$\left|1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right| \leq \left|1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right|$$

e quindi

$$|a'-b'| \leq \frac{1}{2}|a-b|;$$

donde in generale si trae

$$\left|\frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8\delta}\right| \leq \frac{1}{2^k}\left|\frac{a-b}{8\delta}\right|.$$

Se dunque poniamo anche qui

$$\theta = \left|\frac{a-b}{8\delta}\right| \quad , \quad \theta_k = \left|\frac{a^{(k)}-b^{(k)}}{8\delta}\right| ,$$

sarà $\theta_k \leq \frac{\theta}{2^k}$, e quindi se non è già $\theta < 1$, si potrà sempre determinare k in guisa che si abbia $\theta_k < 1$; dopodichè, per le (c), le considerazioni del caso reale e positivo si trasportano tutte immutate al caso complesso.

Abbiamo supposto in ciò che precede che il rapporto $\frac{b}{a}$ $\left(\text{e ciascuno dei successivi } \frac{b^{(n)}}{a^{(n)}}\right)$ non sia reale. Ma se il rapporto $\frac{b}{a}$ è reale e positivo, non si ha nulla di veramente diverso dal caso in cui $a, b, a^{(n)}, b^{(n)}$ sian tutte reali e positive, in quanto tutte le $a^{(n)}, b^{(n)}$ differiscono da numeri reali e positivi per uno stesso fattore; quando poi il rapporto $\frac{b}{a}$ sia reale e negativo, il rapporto successivo $\frac{b'}{a'}$ è

per $a' \neq 0$ un immaginario puro (qualunque determinazione si prenda per b') e basta quindi partire, anzichè da a e b, da a' e b'; quando poi sia $a' = 0$, cioè $a + b = 0$, ricadiamo ancora nel caso reale e positivo (ed il limite è in questo caso uguale allo zero) [1].

La nostra asserzione è così dimostrata affatto in generale.

17. L'algoritmo della media aritmetico-geometrica ci dà anche un esempio di due algoritmi, inversi l'uno dell'altro, *ambedue convergenti*, ma a due divisori distinti dello stesso sistema di equazioni.

Dal n. 2 della Memoria di Gauss, sopra riportato, si ha già infatti, nel caso reale e positivo, che quando si consideri anche l'algoritmo inverso di quello della media, le ${}^{(n)}a$, ${}^{(n)}b$ tendono, l'una continuamente crescendo, l'altra continuamente diminuendo, rispettivamente all'infinito positivo e allo zero: è chiaro allora che, almeno in questo caso, un semplice cambiamento di variabili dà l'esempio a cui abbiamo accennato.

Ma il risultato si estende ancora al caso complesso. Cambiamo infatti nell'algoritmo di Gauss $a^{(n)}$ in $\dfrac{1}{a^{(n)}}$; nelle nuove variabili le equazioni dell'algoritmo saranno

$$(\mathrm{K}) \qquad \Phi_1 = 2a - a'(1 + ab) = 0 \quad \Phi_2 = ab'^2 - b = 0;$$

donde si trae il sistema di funzioni

$$\psi_1 = a(1 - ab) \quad , \quad \psi_2 = b(ab - 1),$$

pel quale è

$$(\psi_1 \, \psi_2) \sim (ab - 1)\,(a\,,b)$$

e che ha quindi i due divisori

$$1 - ab \quad ; \quad (a\,,b)$$

dei ranghi 1 e 2 rispettivamente; e, per quanto sopra abbiamo visto, l'algoritmo K ha sempre convergenza quadratica ed appartiene al divisore $1 - ab$. *L'algoritmo* K^{-1} *inverso di* K *appartiene invece al divisore* $(a\,,b)$ *ed ha convergenza lineare del 1° ordine misurata dalla costante* $\frac{1}{2}$.

Quando a e b sian reali e positivi ed insieme $ab < 1$, non è questo che un modo diverso di enunciare l'osservazione di Gauss (si confronti quel che Gauss dice dopo l'esempio 1°); ma è facile dimostrarlo anche nel caso complesso.

Le equazioni dell'algoritmo K^{-1} sono infatti

$$(\mathrm{K}^{-1}) \qquad \overline{\Phi}_1 = 2'a - a(1 + 'a\,'b) = 0 \quad , \quad \overline{\Phi}_2 = b^2\,'a - 'b = 0$$

donde (conformemente alle posizioni di Gauss) deduciamo

$$'a = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2 b^2}}{ab^2} \quad ; \quad 'b = \frac{1 - \sqrt{1 - a^2 b^2}}{a}$$

[1] Quando a o $b = 0$, l'algoritmo di Gauss tende al limite $a^\infty = b^\infty = 0$, ma non ha più convergenza quadratica, bensì lineare, misurata dalla costante $\frac{1}{2}$.

dove il radicale $\sqrt{1-a^2b^2}$ ha quella determinazione, *la cui parte reale è positiva o nulla.*

Dal n. 12 si ha allora rispetto al modulo $M \equiv (a, b)$

$$\Delta = \frac{d(\overline{\Phi}_1 \overline{\Phi}_2)}{d('a'b)} \equiv 2,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{11} = \dfrac{d(\overline{\Phi}_1 \overline{\Phi}_2)}{d(a'b)} \equiv -1 \quad , \quad \Delta_{12} = \dfrac{d(\overline{\Phi}_1 \overline{\Phi}_2)}{d(b'b)} \equiv 0, \\ \Delta_{21} \equiv \dfrac{d(\overline{\Phi}_1 \overline{\Phi}_2)}{d('aa)} \equiv \quad 0 \quad , \quad \Delta_{22} = \dfrac{d(\overline{\Phi}_1 \overline{\Phi}_2)}{d('a\,b)} \equiv 0, \end{array}\right\} \text{(modd } a, b, 'a, 'b);$$

dalle $(42)_r$ si ha quindi

$$\Delta_{11}^{(r)} \equiv (-1)^r \quad ; \quad \Delta_{12}^{(r)} \equiv \Delta_{21}^{(r)} \equiv \Delta_{22}^{(r)} \equiv 0 \text{ (modd } a, b, 'a, 'b);$$

e (45) danno poi subito, posto $g_1 = a, g_2 = b$,

$$G = \frac{d(g_1 g_2)}{d(ab)} = 1 \quad ; \quad G_{11} = G_{22} = 1 \quad ; \quad G_{12} = G_{21} = 0,$$

e quindi

$$\gamma_{11}^{(r)} \equiv \frac{1}{2^r} \quad , \quad \gamma_{21}^{(r)} \equiv \gamma_{12}^{(r)} \equiv \gamma_{22}^{(r)} \equiv 0 \text{ (modd } a, b);$$

in particolare per $r = 1$, si ha

$$\gamma_{11} \equiv \frac{1}{2} \quad , \quad \gamma_{12} \equiv \gamma_{21} \equiv \gamma_{22} \equiv 0 \text{ (modd } a, b).$$

Risulta di qui la nostra asserzione; si ha insieme di più che l'algoritmo K^{-1} non ha mai convergenza di grado superiore al primo (di ordine maggiore di uno).

Per vedere anche qui quale è l'intorno (complesso) del punto $a = b = 0$, entro il quale siamo sicuri che l'algoritmo converge, osserviamo che se $ab = 1$, si ha $'a = a$, $'b = b$, il che non ha alcun interesse; se poi è $ab \neq 1$, ed a, b diversi da zero, si ottiene subito

$$\frac{'a}{a} = \frac{1}{1+\sqrt{1-a^2b^2}} \quad ; \quad \frac{'b}{b} = 'ab = \frac{'a}{a} \cdot ab;$$

avendosi ora

$$R(\sqrt{1-a^2b^2}) \geq 0$$

è anche

$$|1+\sqrt{1-a^2b^2}| > 1$$

e quindi

$$\left|\frac{'a}{a}\right| < 1 \quad , \quad \left|\frac{'b}{b}\right| < |ab|$$

e moltiplicando

$$|'a'b| < |ab|^2.$$

Ne segue in generale

$$|{}^{(n)}a\,{}^{(n)}b| < |ab|^{2^n}.$$

Se quindi è $|ab| < 1$, si ha

$$\lim_{n=\infty} {}^{(n)}a\,{}^{(n)}b = 0.$$

Se è poi $|ab| \geq 1$, si osservi che è identicamente

$$'a\,'b = \frac{1-\sqrt{1-a^2b^2}}{1+\sqrt{1-a^2b^2}}$$

se quindi è

$$\mathrm{R}(\sqrt{1-a^2b^2}) > 0$$

cioè *se* a^2b^2-1 *non è un numero reale e positivo* (*o nullo*) è

$$|1-\sqrt{1-a^2b^2}| < |1+\sqrt{1-a^2b^2}|$$

e quindi già

$$|'a\,'b| < 1;$$

quando poi sia $\mathrm{R}(\sqrt{1-a^2b^2}) = 0$, ma *non sia* $a^2b^2 = 1$, è $|'a\,'b| = 1$, ma insieme $\mathrm{R}(\sqrt{1-'a^2\,'b^2}) > 0$ e quindi $|''a\,''b| < 1$; quando infine sia $a^2\,b^2 = 1$ e quindi $ab = \pm 1$, è allora insieme (concordemente)

$$'a = a \quad , \quad 'b = \pm\, b$$

e quindi $'a\,'b = 1$, ed allora è in generale

$${}^{(n)}a = 'a \quad , \quad {}^{(n)}b = 'b.$$

Se dunque non è $a^2b^2 = 1$, si ha

$$\lim_{n=\infty} {}^{(n)}a\,{}^{(n)}b = 0,$$

anzi di più

$$\lim_{n=\infty} \frac{{}^{(n+1)}a\,{}^{(n+1)}b}{{}^{(n)}a\,{}^{(n)}b} = 0;$$

dalle espressioni di $'a$ e $'b$, segue allora

$$\lim_{n=\infty} \frac{{}^{(n+1)}a}{{}^{(n)}a} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{n=\infty} \frac{{}^{(n+1)}b}{{}^{(n)}b} = 0.$$

L'algoritmo K^{-1} converge dunque *sempre* al divisore $(a\,,\,b)$, *quando non sia inizialmente* $a^2\,b^2 = 1$.

Quando sia $a^2\,b^2 = 1$, se $ab = 1$, i due algoritmi $\mathrm{K}\,,\mathrm{K}^{-1}$ coincidono coll'algoritmo identico; se $ab = -1$, l'algoritmo K^{-1} converge al divisore $1 - ab$, in quanto è già $'a\,'b = 1$ e ${}^{(n)}a = 'a\,,\,{}^{(n)}b = 'b$ per qualunque n; l'algoritmo K non può invece considerarsi, poichè per esso non sono soddisfatte le condizioni che abbiamo poste al n. 3.

Colle notazioni di GAUSS, quando sia $a^2 = b^2$, se $a = b$ l'algoritmo K e l'inverso K^{-1} coincidono coll'algoritmo identico; se $a = -b$, per l'algoritmo diretto K si ha $\lim_{n=\infty} a^{(n)} = \lim_{n=\infty} b^{(n)} = 0$, l'algoritmo inverso K^{-1} converge al divisore $a - b$, in quanto è per esso $'a = 'b = a$ (1).

18. *Cenni su altri criteri di convergenza. Sui valori iniziali.*

Chiudiamo questo capitolo con due osservazioni.

I criterî, che abbiamo sopra assegnati per la convergenza di un determinato algoritmo sono stati ottenuti paragonando le serie (23) del n. 5 con una progressione geometrica decrescente $\sum a^n$ nel caso della convergenza lineare, nel caso della convergenza di grado superiore al primo con una serie della forma

$$\sum \theta^{\eta^n} \qquad (\eta > 1\,,\, 0 < \theta < 1);$$

dalla convergenza (assoluta ed uniforme) delle serie (23) abbiamo dedotto un risultato identico per le (14) e quindi la convergenza (uniforme) dell'algoritmo K. Ma è chiaro che, per dimostrare la convergenza dell'algoritmo K, non è necessario ricorrere alle serie (23); ma si può ancora cercare, ed in alcuni casi è effettivamente possibile, di dimostrare *direttamente* la convergenza delle serie (14) e quindi anche dell'algoritmo. Si ottengono in tal guisa, per algoritmi particolari ed anche per intiere classi di algoritmi, altre condizioni di convergenza, che possono essere anche molto semplici ed utili. Quando, ad es. si rimanga nel caso reale, potrà accadere che ogni successione $x_k^{(\rho)}$, $(k = 1\,, 2\,, \ldots, n\,;\, \rho = 1\,, 2\,, \ldots)$ sia, o finisca per essere monotona, e insieme tutte le $x_k^{(\rho)}$ si mantengano, in valore assoluto, inferiori ad un numero finito (come accade ad es. per la media aritmetico-geometrica di GAUSS); od anche potrà accadere che una determinata $x_k^{(\rho)}$ sia, per ogni valore di ρ, sempre compresa tra due $x_i^{(\rho)}, x_j^{(\rho)}$, le quali tendano, per $\rho = \infty$, ad uno stesso limite; potrà accadere ancora, ad es. che le serie (14) abbiano i loro termini di segno alternato, i quali tendano a zero coll'aumentare indefinito dell'indice etc. etc. Ed infine potrà ancora accadere, che pur deducendo la convergenza dell'algoritmo K da quella (assoluta ed uniforme) delle serie (23), questa si possa, in casi particolari, dimostrare direttamente, confrontando le (23) stesse con delle serie a termini positivi, diverse da quelle da noi sopra considerate (cfr. la nota in fine alla Memoria).

Un'altra osservazione vogliamo fare circa la scelta dei *valori iniziali* per un algoritmo convergente.

Quando sono soddisfatte le condizioni di convergenza date dalla (26) del n. 6. o dalle congruenze (36) del n. 11, siamo sicuri che l'algoritmo dato converge, quando i valori iniziali $x^{(0)}$ siano scelti in guisa da soddisfare alle disuguaglianze (26) e (27) dei nn. 6 e 7. Conviene dunque discutere, in ogni singolo caso, queste disugua-

(1) Questo risultato sembra contraddica a quanto abbiamo visto al n. 14, ma si osservi che i valori $a = -b$, o $\frac{a}{b} = -1$ sono *singolari* per l'algoritmo K^{-1}, a causa della *polidromia* delle formule che definiscono $'a\,, 'b$ per a e b.

glianze, il che porta a difficoltà e restrizioni, in generale, notevoli. È però bene ricordare che le disuguaglianze stesse danno soltanto condizioni *sufficienti*, ma *non necessarie* per la convergenza dell'algoritmo, il quale può anche convergere in un campo più ampio di quello definito dalle disuguaglianze stesse. In particolare basterà che le disuguaglianze stesse valgano, invece che nel punto $x^{(0)}$, nel punto $x^{(k)}$, con k determinato, ma qualunque; e questo porta in generale ad un ampliamento del campo di convergenza dell'algoritmo; così ad es. per gli algoritmi tratti dalla media aritmetico-geometrica abbiamo potuto dimostrare che il campo di convergenza era costituito da tutti i possibili valori delle variabili complesse a, b.

A queste considerazioni può darsi un'altra forma. Consideriamo insieme coll'algoritmo dato K l'algoritmo inverso K^{-1}; supponiamo quindi che le equazioni (7) possano risolversi anche rispetto alle x.

Sia C_0 il campo entro il quale vale la disuguaglianza (26) (o la (27)); se nelle equazioni $\Phi(x^{(-1)}, x^{(0)}) = 0$ dell'algoritmo K^{-1}, prendiamo il punto $x^{(-1)}$ affatto arbitrariamente entro il campo C_0, per la disuguaglianza stessa, anche il punto $x^{(0)}$ cadrà nello stesso campo, e con esso tutti i successivi punti $x^{(k)}(k \geq 0)$; ma è chiaro che è ben possibile che il campo C_{-1}, entro il quale *può* prendersi il punto $x^{(-1)}$, in guisa che il punto $x^{(0)}$ cada in C_0, sia più ampio (ed in generale lo sarà) del campo C_0. Affatto analogamente indichiamo col simbolo C_{-k} il campo, entro il quale *può* essere scelto il punto $x^{-(k)}$, perchè il punto $x^{-(k-1)}$ cada entro il campo precedente $C_{-(k-1)}$ (per $k = 1, 2, \ldots$); ogni campo C_{-k} conterrà allora nel suo interno il campo $C_{-(k-1)}$ e l'algoritmo dato convergerà, quando il punto iniziale sia scelto entro il campo C_{-k}. Indichiamo allora col simbolo $C_{-\infty}$ il *limite superiore* dei campi C_{-k}, cioè il campo formato da tutti i punti di S_n (o della varietà V del numero 3), che appartengono ad un qualche campo C_{-k}; l'algoritmo dato sarà convergente, quando il punto iniziale $x^{(0)}$ sia scelto entro $C_{-\infty}$; e se ogni campo C_{-k} ha la massima ampiezza, se cioè esso contiene *tutti* i punti, pei quali $x^{-(k-1)}$ cada nel campo precedente $C_{-(k-1)}$, *il campo $C_{-\infty}$ è il vero campo di convergenza dell'algoritmo stesso*; cioè, *se il punto iniziale $x^{(0)}$ non appartiene a $C_{-\infty}$, l'algoritmo non converge.* Infatti, se l'algoritmo è convergente e X è il suo limite, scelto un numero σ positivo e piccolo a piacere, potrà determinarsi un indice ϱ_0 tale che per $\varrho \geq \varrho_0$ si avrà $|x_k^{(\varrho)} - X_k| < \sigma$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; per la continuità delle $g_\mu(x)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ sarà allora anche $|g_\mu(x^{(\varrho)})| < \delta$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$, dove δ è un numero positivo, il quale prendendo convenientemente σ, può supporsi piccolo a piacere. In particolare si potrà prendere δ in guisa che per $\varrho \geq \varrho_0$ valga la disuguaglianza (26) (o la (27)); cioè il punto $x^{(\varrho)}$ (per $\varrho \geq \varrho_0$) apparterrà al campo C_0, perciò il punto $x^{(0)}$ al campo $C_{-\varrho}$ e quindi anche al campo $C_{-\infty}$, il che dimostra la nostra asserzione.

Quando un algoritmo soddisfa alle condizioni di convergenza sopra ricordate, ci si presenta quindi il problema della determinazione del suo campo vero di convergenza, cioè del campo $C_{-\infty}$ ad esso relativo; malauguratamente questo problema offre delle difficoltà che sono insormontabili in generale e non si è potuto risolvere che in casi molto particolari.

§ III.

Continuità e derivabilità degli algoritmi.

19. *Due lemmi sulle successioni.*

Si abbia un algoritmo convergente, definito dalle equazioni (7) del n. 3, e sia X il suo limite. Questo può evidentemente pensarsi come funzione e dell'elemento iniziale $x^{(0)}$ della successione (13) (o di qualsiasi altro elemento $x^{(k)}$) e dei parametri che eventualmente entrino nelle equazioni che definiscono l'algoritmo. *Sotto quali condizioni siamo sicuri che il limite* X *è una funzione finita, continua e derivabile di queste variabili?*

A questa ricerca, per non dover poi interrompere il corso delle dimostrazioni, premettiamo due lemmi.

Lemma I. « Sia a_n una quantità positiva, variabile con n; ed essendo q un « numero positivo minore dell'unità, H un numero positivo finito, si abbia da un « certo indice ν in poi

$$a_{n+1} \leq q a_n + \mathrm{H} \qquad (n \geq \nu).$$

« Tutte le a_n sono allora minori di un numero finito ».

Infatti, poniamo nella disuguaglianza superiore $n = \nu$, $\nu + 1 \ldots \nu + k - 1$, con k arbitrario; avremo

$$a_{\nu+1} \leq q a_\nu + \mathrm{H}$$
$$a_{\nu+2} \leq q a_{\nu+1} + \mathrm{H} \leq q^2 a_\nu + \mathrm{H}(q+1)$$
$$a_{\nu+3} \leq q a_{\nu+2} + \mathrm{H} \leq q^3 a_\nu + \mathrm{H}(q^2 + q + 1)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{\nu+k} \leq q a_{\nu+k-1} + \mathrm{H} \leq q^k a_\nu + \mathrm{H}(q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + q + 1) = q^k a_\nu + \mathrm{H} . \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

e quindi *a fortiori*

$$a_{\nu+k} < a_\nu + \frac{\mathrm{H}}{1-q}$$

per k qualunque; il che dimostra il lemma enunciato.

Lemma II. « Sia $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, a_n$ una serie (uniformemente) convergente a termini posi- « tivi; sia $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, b_n$ un'altra serie, pure a termini positivi, tale che, indicando ancora « con q un numero positivo minore di uno, si abbia da un certo indice ν in poi

$$b_{n+1} \leq q b_n + a_n \qquad (n \geq \nu);$$

« anche la serie $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, b_n$ è (uniformemente) convergente ».

Poniamo senz'altro $\nu = 0$, il che non altera la generalità; e nella relazione superiore facciamo successivamente $n = 0, 1, 2 \dots m$. Avremo le relazioni

$$\begin{aligned} b_0 &= b_0, \\ b_1 &\leq q b_0 + a_0, \\ b_2 &\leq q^2 b_0 + q a_0 + a_1, \\ b_3 &\leq q^3 b_0 + q^2 a_0 + q a_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ b_m &\leq q^m b_0 + q^{m-1} a_0 + q^{m-2} a_1 + \dots + a_{m-1}, \end{aligned}$$

donde, sommando e indicando con S_m la somma dei primi $m+1$ termini della serie $\sum a_n$, con S'_m l'analoga della serie $\sum b_n$, otteniamo

$$S'_m \leq \frac{1-q^{m+1}}{1-q} b_0 + \frac{1-q^m}{1-q} a_0 + \frac{1-q^{m-1}}{1-q} a_1 + \dots + \frac{1-q^2}{1-q} a_{m-2} + a_{m-1}$$

ed *a fortiori*

$$S'_m \leq \frac{1}{1-q}(b_0 + S_{m-1}) < \frac{1}{1-q}(b_0 + S)$$

avendo indicato con S la somma della serie $\sum a_n$; la serie $\sum b_n$ è quindi anche essa convergente. Supponiamo di più che la serie $\sum a_n$ converga uniformemente in un campo C, dei cui punti le a_n sono funzioni: poichè ogni $a_n > 0$, anche a_n tenderà uniformemente allo zero per $n = \infty$.

Ciò posto, nella relazione (con m e k qualunque)

$$b_{2m+k} \leq q^{2m+k} b_0 + (q^{2m+k-1} a_0 + \dots + q^{m+k} a_{m-1}) + (q^{m+k-1} a_m + \dots + a_{2m+k-1})$$

supponiamo di aver preso m così grande che si abbia

$$q^{m+i} < \sigma \quad , \quad a_{m+i} < \sigma$$

per qualunque $i \geq 0$ e per tutti i punti del campo C, dove σ è un numero positivo piccolo a piacere. Diciamo ancora $B, \bar{S}$ i massimi valori di b_0 ed S nel campo C; avremo

$$b_{2m+k} \leq q^{m+k}(B + \bar{S}) + \frac{\sigma}{1-q} < \sigma \left\{ B + \bar{S} + \frac{1}{1-q} \right\};$$

cioè anche b_n tende uniformemente allo zero per $n = \infty$. Indicando inoltre con R_n il resto, a partire dal termine n^{mo}, della serie $\sum a_n$, con R'_n l'analogo della $\sum b_n$, si ha

$$R'_n \leq \frac{b_n + R_n}{1-q},$$

e se si prende n così grande che in tutto il campo C si abbia

$$R_n < \sigma \quad , \quad b_n < \sigma,$$

sarà ancora, nel campo stesso

$$R'_n < \frac{2\sigma}{1-q},$$

e quindi anche la serie $\sum b_n$ converge uniformemente, il che completa la dimostrazione del teorema enunciato.

Osserviamo infine che se la serie $\sum a_n$ è confrontabile colla progressione geometrica decrescente $\sum_0^\infty {}_n q^n$, cioè i suoi termini sono minori od uguali ai corrispondenti di questa, moltiplicati per un numero finito A, detto B il maggiore dei due numeri $b_0, \frac{A}{q}$, sarà ancora

$$b_n \leq (n+1) Bq^n;$$

cioè la serie $\sum b_n$ è confrontabile colla serie $\sum nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, ed ancora con qualunque progressione geometrica decrescente $\sum q'^n$, *dove q' è un numero arbitrario compreso tra q ed uno*, in particolare prossimo a q quanto si vuole.

20. *Continuità della funzione limite; derivabilità nel caso della convergenza di grado superiore al primo.*

L'algoritmo K, definito dalle equazioni (7), abbia convergenza di ordine r e di grado $s (\geq 1)$; allora, finchè il punto iniziale $x^{(0)}$ rimane nell'intorno della varietà M definito dalla disuguaglianza (26) (o dalla (27)), le serie (23) e quindi anche le (14) convergono assolutamente ed uniformemente; e poichè i loro termini sono funzioni continue dell'elemento iniziale $x^{(0)}$ (e dei parametri che eventualmente entrino in modo continuo nelle equazioni dell'algoritmo), è chiaro senz'altro che:

Il punto limite X è una funzione finita e continua dell'elemento iniziale $x^{(0)}$ e dei parametri dell'algoritmo.

Se inoltre le $x^{(0)}$, e gli eventuali parametri dell'algoritmo, sono variabili complesse, ogni $x_i^{(\rho)}$ è, per le ipotesi fatte, una funzione analitica di queste variabili; e dalla convergenza assoluta ed uniforme delle serie (14) si trae che anche il limite X è una funzione analitica delle stesse variabili e le sue derivate, di un ordine qualunque, si hanno derivando termine a termine le serie che definiscono il limite stesso.

Rimane a considerare il caso reale; vedremo che anche in questo, se le equazioni (7) soddisfano ad alcune semplici condizioni, il limite ammetterà le derivate rispetto alle stesse variabili.

Per trattar la questione nel modo più generale, supporremo che le coordinate iniziali $x_i^{(0)}$ ed i parametri dell'algoritmo siano funzioni finite, continue, con quelle derivate che dovremo considerare, di un parametro u; tali saranno, per noti teoremi, anche le coordinate $x_i^{(\rho)}$ di un qualunque elemento della successione.

Distinguiamo ora due casi, secondochè l'algoritmo ha convergenza lineare o di grado superiore al primo.

Cominciamo da quest'ultimo caso che è il più semplice. Abbiamo il teorema:

Quando l'algoritmo ha convergenza di qualsiasi ordine r e di grado $s \geq 2$, il limite X ha derivate di tutti gli ordini rispetto ai valori iniziali (ed ai parametri dell'algoritmo); e queste derivate si ottengono derivando termine a termine le serie (14) che definiscono il limite stesso.

Per dimostrare il teorema enunciato, mutiamo nelle (34) del n. 8 x in $x^{(\sigma)}$, con σ qualunque; avremo le formule

$$(34)_\sigma \qquad g_\mu(x^{(r+\sigma)}) = \sum_{1}^{p}{}_{k_1\ldots k_s} \gamma^{(r)}_{\mu;k_1\ldots k_s}(x^{(\sigma)})\, g_{k_1}(x^{(\sigma)})\, g_{k_2}(x^{(\sigma)}) \ldots g_{k_s}(x^{(\sigma)});$$

varranno insieme delle relazioni analoghe alle (18) del n. 5

$$(18)_{r+\sigma} \qquad x_k^{(2r+\sigma)} = x_k^{(r+\sigma)} + \sum_{1}^{p}{}_\mu \beta^{(r)}_{k\mu}(x^{(r+\sigma)})\, g_\mu(x^{(r+\sigma)})$$

dove le $\beta^{(r)}_{k\mu}$ sono funzioni determinate e finite dei loro argomenti; sostituendo per le $g_\mu(x^{(r+\sigma)})$ i loro valori dati dalle $(34)_\sigma$ abbiamo

$$(47) \qquad x_k^{(2r+\sigma)} = x_k^{(r+\sigma)} + \sum_{1}^{p}{}_{k_1\ldots k_s} \beta^{(r)}_{k;k_1\ldots k_s}(x^{(\sigma)})\, g_{k_1}(x^{(\sigma)})\, g_{k_2}(x^{(\sigma)}) \ldots g_{k_s}(x^{(\sigma)}).$$
$$(k = 1, 2 \ldots n\,;\ \sigma = 0, 1 \ldots r-1)$$

con

$$\beta^{(r)}_{k;k_1\ldots k_s}(x^{(\sigma)}) = \sum_{1}^{p}{}_\mu \beta^{(r)}_{k\mu}(x^{(r+\sigma)}) \cdot \gamma^{(r)}_{\mu;k_1\ldots k_s}(x^{(\sigma)}).$$

Deriviamo le (47) rispetto ad u, e per scriver brevemente indichiamo con $dx_i^{(\rho)}$ la derivata di $x_i^{(\rho)}$ rispetto ad u (omettiamo cioè il denominatore du); poichè $s \geq 2$, avremo le formule

$$(47') \qquad dx_k^{(2r+\sigma)} = dx_k^{(r+\sigma)} + \sum_{1}^{n}{}_i F_{ki}(g(x^{(\sigma)})) \cdot dx_i^{(\sigma)} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

nelle quali i simboli F_{ki} hanno il solito significato.

Sia ora $A_\tau (\tau = 0, 1, 2 \ldots 2r-1)$ un numero positivo maggiore od uguale al valore assoluto di ogni derivata $dx_k^{(\tau)} (k = 1, 2 \ldots n)$ nel campo considerato e sia anche $A_{r+\sigma} \geq A_\sigma$ per $\sigma = 1, 2 \ldots r-1$. Dalle relazioni precedenti si ha allora

$$(48) \qquad |dx_k^{(2r+\sigma)}| < A_{2r+\sigma} \qquad (k = 1, 2 \ldots n\,;\ \sigma = 0, 1, 2 \ldots r-1)$$

con

$$A_{2r+\sigma} = A_{r+\sigma} \left\{1 + \sum_{1}^{p}{}_\mu K_\mu |g_\mu^{(\sigma)}|\right\}$$

dove le K_μ sono delle costanti positive finite. Affatto analogamente, ponendo, per qualunque λ

$$A_{(\lambda+2)r+\sigma} = A_{(\lambda+1)r+\sigma} \left\{1 + \sum_{1}^{\mu}{}_p K_\mu\, g_\mu^{[\lambda r+\sigma]}\right\} = A_{r+\sigma} \prod_{0}^{\lambda}{}_\alpha \left\{1 + \sum_{1}^{p}{}_\mu K_\mu |g_\mu^{(\alpha r+\sigma)}|\right\}$$

e cambiando nelle (47') σ in $\omega r + \sigma$, avremo le disuguaglianze

$$(48)_\omega \qquad |dx_k^{(\omega r+\sigma)}| < A_{\omega r+\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2 \dots r-1 ; \omega = 2, 3 \dots).$$

Ma insieme colle serie (23) converge ogni prodotto infinito

$$\prod_0^\infty {}_\omega \left\{1 + \sum_1^\varrho {}_\mu K_\mu |g_k^{(\omega r+\sigma)}|\right\} \qquad (\sigma = 0, 1, 2 \dots r-1);$$

quindi, poichè le $A_0 \dots A_{2r-1}$ sono quantità finite, tali sono anche tutte le $A_{\omega r+\sigma}$; ne segue, per le $(48)_\omega$ che: *tutte le* $dx_k^{(\varrho)}(k = 1, 2 \dots n \,;\, \varrho = 1, 2 \dots)$ *si mantengono inferiori in valore assoluto ad un numero finito.*

Deriviamo ora le $(34)_\sigma$; poichè le $dx_k^{(\varrho)}$ sono, in valore assoluto, inferiori ad un numero finito ed $s \geq 2$, si avrà per $dg(x^{(r+\sigma)})$ un'espressione omogenea di grado s nelle $g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)}$ (lineare nelle $dg^{(\sigma)}$) con coefficienti funzioni finite delle x. Ne segue che $dg^{(r+\sigma)}$ è nulla sulla varietà M e quindi in un intorno convenientemente piccolo di M, è piccola quanto si vuole; ripetendo quindi le considerazioni del n. 7, si ha che le serie

$$\sum_0^\infty {}_\omega \, dg^{(\omega r+\sigma)}$$

in questo intorno di M convergeranno assolutamente ed uniformemente ed avranno il grado s di convergenza. Derivando poi le (47) si ottiene

$$dx_k^{(2r+\sigma)} - dx_k^{(r+\sigma)} = F_k(g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)}) \quad (k = 1, 2 \dots n \,;\, \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

e le analoghe cambiatovi σ in $\omega r + \sigma$, con ω qualunque. Le serie

$$dx_k^{(0)} + \sum \{dx_k^{(\varrho)} - dx_k^{(\varrho-1)}\}$$

convergono quindi assolutamente ed uniformemente, cioè il limite X ha derivate prime rispetto ad u, le quali si hanno derivando termine a termine le serie (14) che definiscono il limite stesso; o in altre parole, insieme colla $x_k^{(\varrho)}$, anche la $\frac{dx_k^{(\varrho)}}{du}$ tende per $\varrho = \infty$, in modo uniforme, al limite $\frac{dX_k}{du} (k = 1, 2 \dots n)$.

Procediamo ora per induzione ed ammettiamo di aver già dimostrato che tutte le derivate $d^t x_k^{(\varrho)}$ $(k = 1, 2 \dots n \,;\, \varrho = 1, 2 \dots)$ sono, per $t < \tau$, inferiori in valore assoluto ad un numero finito, che sulla varietà M ogni $d^t g^{(\varrho)}$ è nulla, e che le serie $\sum_1^\infty {}_\omega d^t g^{(\omega r+\sigma)}$ $(\sigma = 0, 1 \dots r-1)$ convergono assolutamente ed uniformemente ed hanno il grado s di convergenza; vogliamo dimostrare che lo stesso avviene per $t = \tau$.

Deriviamo perciò τ volte le (47); abbiamo le relazioni

$$(47')_\tau \quad d^\tau x_k^{(2r+\sigma)} = d^\tau x_k^{(r+\sigma)} + \sum_1^n {}_i F_{ki}(g^{(\sigma)}) \, d^\tau x_i^{(\sigma)} + F_k(g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)} \dots d^{\tau-1} g^{(\sigma)})$$

dove le F hanno il solito significato.

Sia ora, come per $\tau = 1$, $A_\alpha^{(\tau)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots 2r - 1)$ un numero positivo maggiore od uguale al valore assoluto di ogni derivata $d^\tau x_k^{(\alpha)}$ e sia ancora $A_{r+\sigma}^{(\tau)} \geq A_\sigma^{(\tau)} \geq 1$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots r - 1)$. Dalle $(47')_\tau$ avremo allora

$$(48)_\tau \qquad |d^\tau x_k^{(2r+\sigma)}| < A_{2r+\sigma}^{(\tau)}$$

con

$$A_{2r+\sigma}^{(\tau)} = A_{r+\sigma}^{(\tau)} \{1 + \overline{F}(g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\sigma)})\}$$

dove $\overline{F}(g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\sigma)})$ indica una funzione lineare omogenea a coefficienti positivi (funzioni delle x) e finiti dei valori assoluti delle $g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\sigma)}$. Come per $\tau = 1$, ponendo allora, per qualunque ω

$$A_{(\omega+2)r+\sigma}^{(\tau)} = A_{(\omega+1)r+\sigma}^{(\tau)} \{1 + \overline{F}(g^{(\omega r+\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\omega r+\sigma)})\},$$

cambiando nelle $(48)_\tau$ $x^{(\sigma)}$ in $x^{(r\omega+\sigma)}$ abbiamo

$$|d^\tau x_k^{(\omega r+\sigma)}| < A_{\omega r+\sigma}^{(\tau)}. \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 0, 1 \ldots r - 1 \\ k = 1, 2 \ldots n \\ \omega = 1, 2 \ldots \end{pmatrix}.$$

Ma colla serie

$$\sum_0^\infty{}_\omega \overline{F}(g^{(\omega r+\sigma)}, dg^{(\omega r+\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\omega r+\sigma)})$$

converge assolutamente anche il prodotto infinito

$$\prod_0^\infty{}_\omega \{1 + \overline{F}(g^{(\omega r+\sigma)}, dg^{(\omega r+\sigma)} \ldots d^{\tau-1} g^{(\omega r+\sigma)})\}$$

e quindi ancora *tutte le* $d^\tau x_k^{(\rho)}$ *si mantengono in valore assoluto inferiori ad un numero finito.*

Deriviamo allora τ volte le $(34)_\sigma$; avremo per $d^\tau g_\mu(x^{(r+\sigma)})$ un'espressione omogenea di grado s nelle $g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)}, \ldots d^{\tau-1} g^{(\sigma)}, d^\tau g^{(\sigma)}$, lineare in queste ultime $d^\tau g^{(\sigma)}$, con coefficienti funzioni finite delle x. Una qualunque $d^\tau g^{(r+\sigma)}$ è quindi nulla sulla varietà M; perciò in un intorno di M le serie

$$\sum_1^\infty{}_\omega d^\tau g^{(\omega r+\sigma)}$$

convergono anche esse assolutamente ed uniformemente (ed hanno il grado s di convergenza) e con esse anche le altre

$$\sum_0^\infty{}_\rho \{d^\tau x_k^{(\rho)} - d^\tau x_k^{(\rho-1)}\};$$

cioè il limite X ha anche le derivate dell'ordine τ quando le abbia degli ordini minori di τ; e poichè ha le derivate prime, le ha di un ordine qualunque. Il teorema enunciato è così dimostrato.

21. *Algoritmi a convergenza lineare. Condizioni per le derivate prime.*

L'algoritmo dato K abbia invece convergenza lineare e di ordine r; è facile vedere che anche in questo caso, sotto alcune condizioni, che ora determineremo, le derivate delle $x_i^{(\rho)}$ rispetto ad u si mantengono, per qualunque ρ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito.

Per queste, osserviamo innanzi tutto che si avranno delle relazioni analoghe alle (18) del n. 5

$$(18) \qquad x_k^{(r+\sigma)} = x_k^{(\sigma)} + \sum_1^p {}_\mu \, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \, g_\mu(x^{(\sigma)}) \, ; \qquad (k=1,2\ldots n\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1)$$

derivandole rispetto ad u otteniamo le formule

$$(49) \qquad \begin{gathered} dx_k^{(r+\sigma)} = \sum_1^n {}_\tau \left\{ \varepsilon_{kt} + \sum_1^p {}_\mu \left[\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \, g_{\mu t}(x^{(\sigma)}) + \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial x_t^{(\sigma)}} \cdot g_\mu(x^{(\sigma)}) \right] \right\} dx_t^{(\sigma)} + \\ + \sum_1^p {}_\mu \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial u} \, g_\mu(x^{(\sigma)}) + \sum_1^p {}_\mu \, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \, \frac{\partial g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial u} \, ; \\ (k=1,2\ldots n\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1\,;\, \varepsilon_{kt}=0 \text{ se } k \neq t\,,\, \varepsilon_{kk}=1) \end{gathered}$$

se quindi le $dx_k^{(\sigma)}$, per $\sigma = 0,1,2\ldots r-1$, sono in valore assoluto inferiori ad un numero finito A, sarà ancora

$$(50) \qquad \begin{gathered} |dx_k^{(r+\sigma)}| < \mathrm{A} \left\{ \mathrm{C}_k^{(r,\sigma)} + \sum_1^n {}_t \left| \sum_1^p {}_\mu \, g_\mu(x^{(\sigma)}) \, \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial x_t^{(\sigma)}} \right| \right\} + \\ + \sum_1^p {}_\mu \left| \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \, \frac{\partial g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial u} \right| + \sum_1^p {}_\mu \left| \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial u} \, g_\mu(x^{(\sigma)}) \right| \end{gathered}$$

dove abbiamo posto

$$(51) \qquad \mathrm{C}_k^{(r,\sigma)} = \sum_1^n {}_t \left| \varepsilon_{kt} + \sum_1^p {}_\mu \, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \, g_{\mu t}(x^{(\sigma)}) \right| .$$

Ammettiamo ora che sia

$$(52) \qquad \begin{gathered} \mathrm{C}_k^{(r,\sigma)} \equiv \mathrm{C}_k^{(r)} \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}) \quad \textit{con} \quad 0 \leq \mathrm{C}_k^{(r)} \leq 1\,; \\ (k=1,2\ldots n\,;\, \sigma=0,\ldots r-1) \end{gathered}$$

e distinguiamo due casi:

a) Supponiamo che su *tutta* la varietà M le $\mathrm{C}_k^{(r)}$ si mantengano minori di un numero fisso minore di uno. In questo caso, per le (52) e poichè le $\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})$ hanno derivate finite rispetto ai loro argomenti, potremo determinare un numero positivo q minore dell'unità, tale che in un intorno conveniente di M le espressioni

$$\mathrm{C}_k^{(r,\sigma)} + \sum_1^n {}_t \left| \sum_1^p {}_\mu \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial x_t^{(\sigma)}} \, g_\mu(x^{(\sigma)}) \right| \qquad (k=1,2\ldots n\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1)$$

si mantengano minori di q. In questo intorno di M, anche le $\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})$ e le $\frac{\partial g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial u}$ si mantengono evidentemente finite; ne segue che, indicando con H un numero positivo determinato, convenientemente scelto, dalle (50) si avrà

$$|dx_k^{(r+\sigma)}| < A' \qquad (k = 1, 2 \dots n ; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

con

$$A' = Aq + H.$$

In generale, posto

$$A^{(\omega)} = A^{(\omega-1)} q + H,$$

si avrà, per qualunque ω

$$|dx_k^{(\omega r+\sigma)}| < A^{(\omega)}; \qquad (k = 1, 2 \dots n ; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

e poichè, pel 1° lemma del n. 20, ogni $A^{(\omega)}$ è minore di $A + \frac{H}{1-q}$, ne segue che tutte le derivate $dx_k^{(\varrho)}$, per qualunque ϱ, si mantengono in valore assoluto inferiori ad un numero finito.

b) Supponiamo invece che, pur valendo sempre le (52), non esista un numero positivo e minore dell'unità di cui le $C_k^{(r)}$ si mantengano inferiori su tutta la varietà M.

Ammettiamo allora che sia anche

$$\text{(52')} \qquad D_{k,0}^{(r\sigma)} = \sum_1^p {}_\mu \beta_{k\mu}^{(r)} (x^{(\sigma)}) \frac{\partial g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial u} \equiv 0 \ (\text{mod M}) ;$$
$$(k = 1, 2 \dots n ; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

se indichiamo con $F(g)$ un'opportuna funzione lineare omogenea delle $|g|$, con coefficienti positivi e finiti, avremo dalle (50) le disuguaglianze

$$|dx_k^{(r+\sigma)}| < A'_\sigma \qquad (k = 1, 2 \dots n ; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

con

$$A'_\sigma = A \{1 + F(g^{(\sigma)})\}.$$

In generale, poniamo per qualunque ω

$$A_\sigma^{(\omega)} = A_\sigma^{(\omega-1)} \{1 + F(g^{(\omega\sigma)})\} = A \prod_1^\omega {}_\tau \{1 + F(g^{(\tau\sigma)})\};$$

avremo

$$|dx_k^{(\omega r+\sigma)}| < A_\sigma^{(\omega)}; \qquad (k = 1, 2 \dots n ; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

ma insieme colla serie $\sum F(g^{(\tau\sigma)})$ anche il prodotto infinito

$$\prod_1^\infty {}_\tau \{1 + F(g^{(\tau\sigma)})\}$$

è convergente assolutamente ed uniformemente; ne segue che tutte le $A_\sigma^{(\omega)}$ e quindi

anche tutte le $|dx_k^{(\rho)}|$ si mantengono, per qualunque ϱ, inferiori ad un numero finito, come avevamo affermato.

È facile ora andar oltre e dimostrare che le serie

$$\sum_1^\infty{}_\rho (dx_k^{(\rho)} - dx_k^{(\rho-1)}) \quad , \quad \sum_0^\infty{}_\rho dg_\mu^{(\rho)} \qquad (k=1,2\ldots n\,;\, \mu=1,\ldots p),$$

che si hanno derivando rispetto ad u, termine a termine, le serie (14) e (23) convergono assolutamente ed uniformemente nel campo considerato.

Infatti cambiamo nelle (31) del n. 8 x in $x^{(\sigma)}$; avremo le formule

$$(31)_\sigma \quad g_\mu(x^{(r+\sigma)}) = \sum_1^p{}_\nu \gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, g_\nu(x^{(\sigma)}), \quad (\mu=1,2\ldots p\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1);$$

derivandole otteniamo

$$dg_\mu^{(r+\sigma)} = \sum_1^p{}_\nu \gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, dg_\nu(x^{(\sigma)}) + \sum_1^p{}_\nu d\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, g_\nu(x^{(\sigma)}),$$
$$(\mu=1,2\ldots p\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1).$$

D'altra parte, poichè le derivate delle $x^{(\sigma)}$ sono tutte finite, in un intorno convenientemente piccolo di M anche le $d\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\rho)})$ saranno, per qualunque ϱ, tutte finite; poichè inoltre valgono le disuguaglianze (33) del n. 8, indicando con B un conveniente numero positivo finito, avremo anche

$$|dg_\mu^{(r+\sigma)}| < a\,|dg^{(\sigma)}| + \mathrm{B} \sum_1^p{}_\nu |g_\nu^{(\sigma)}| \qquad (\mu=1,2\ldots p\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1)$$

dove abbiamo indicato con $|dg^{(\sigma)}|$ un numero positivo, maggiore od uguale al valore assoluto di ogni $dg_\nu^{(\sigma)}$.

Affatto analogamente si avrà, per qualunque ω

$$|dg_\mu^{((\omega+1)r+\sigma)}| < a\,|dg^{(\omega r+\sigma)}| + \mathrm{B} \sum_1^p{}_\nu |g_\nu^{(\omega r+\sigma)}|$$
$$(\mu=1,2\ldots p\,;\, \sigma=0,1,2\ldots r-1\,;\, \omega=1,2\ldots)$$

ed anche

$$|dg_\mu^{((\omega+1)r+\sigma)}| < |dg^{((\omega+1)r+\sigma)}|$$

con

$$|dg^{((\omega+1)r+\sigma)}| \leq a\,|dg^{(\omega r+\sigma)}| + \mathrm{B} \sum_1^p{}_\nu |g_\nu^{(\omega r+\sigma)}|.$$

Ne segue, pel 2° lemma dimostrato al n. 20, la convergenza assoluta ed uniforme delle serie $\sum_0^\infty{}_\omega dg_\mu^{(\omega r+\sigma)}$ $(\mu=1,2\ldots p\,;\, \sigma=0,1\ldots r-1)$ e quindi anche delle altre

$$\sum_0^\infty{}_\rho dg_\mu^{(\rho)}, \qquad (\mu=1,2\ldots p).$$

Avendosi infine dalle (18) del n. 5

$$dx_k^{(\rho+1)} - dx_k^{(\rho)} = \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}(x^{(\rho)})\, dg_\mu^{(\rho)} + \sum_1^p{}_\mu\, g_\mu^{(\rho)}\, d\beta_{k\mu}(x^{(\rho)}), \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

ed osservando che, come sopra le $d\gamma_{\mu\nu}^{(\sigma)}$, anche le $d\beta_{k\mu}(x^{(\rho)})$ si mantengono, per qualunque ϱ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito, si conclude che anche le serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho\, (dx_k^{(\rho+1)} - dx_k^{(\rho)}) \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

convergono assolutamente ed uniformemente.

Abbiamo quindi il teorema:

Quando l'algoritmo definito dalle equazioni (7) ha convergenza lineare di ordine r e le espressioni $C_k^{(r)}$, date dalle (52), si mantengono su tutta la varietà M inferiori ad un numero positivo q minore dell'unità, o, se un tal numero q non esiste, valgono sulla M le disuguaglianze (52) e le (52'), il limite X dell'algoritmo è una funzione finita e continua colle sue derivate prime delle coordinate dell'elemento iniziale $x^{(0)}$ e dei parametri dell'algoritmo.

Le derivate del limite si ottengono inoltre derivando termine a termine le serie che definiscono il limite stesso.

22. *Condizioni per le derivate di ordine superiore.*

Andiamo ora allo studio delle derivate di ordine superiore al primo. Cominciando dalle derivate seconde, abbiamo dalle (49)

$$\begin{aligned} d^2x_k^{(r+\sigma)} = d^2x_k^{(\sigma)} &+ \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, d^2g_\mu^{(\sigma)} + 2\sum_1^p{}_\mu\, d\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \cdot dg_\mu^{(\sigma)} \\ &+ \sum_1^p{}_\mu\, g_\mu^{(\sigma)} d^2\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \qquad (k = 1, 2 \dots n) \end{aligned} \tag{53}$$

od anche, esplicitamente

$$\begin{aligned} d^2x_k^{(r+\sigma)} &= \sum_1^n{}_t \left\{ e_{kt} + \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, g_{\mu t}(x^{(\sigma)}) \right\} d^2x_t^{(\sigma)} + \\ &+ \sum_1^p{}_\mu \sum_0^n{}_{rs}\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \frac{\partial^2 g_\mu(x^\sigma)}{\partial x_r^{(\sigma)}\, \partial x_s^{(\sigma)}}\, dx_r^{(\sigma)} \cdot dx_s^{(\sigma)} \\ &+ 2\sum_1^p{}_\mu\, d\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, dg_\mu(x^{(\sigma)}) + \sum_1^p{}_\mu\, g_\mu(x^{(\sigma)})\, d^2\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}), \end{aligned} \tag{53'}$$

dove, per uniformità di scrittura, abbiamo indicato col simbolo $x_0^{(\sigma)}$ la variabile u

(ed è quindi $dx_0^{(\sigma)}=1$). Ciò posto, distinguiamo ancora i due casi *a*), *b*) del numero precedente. Nel caso *a*) osserviamo che le $\beta^{(r)}$ e le g hanno derivate, sempre finite, nell'intorno di M e che tutte le $dx_k^{(\rho)}$ sono ancora finite; se quindi tutte le $d^2x_k^{(\sigma)}(\sigma=0,1\dots r-1\,,\,k=1,2\dots n)$ si suppongono in valore assoluto minori di un numero A, sarà anche

$$|d^2x_k^{(r+\sigma)}|<A'$$

con

$$A'=qA+H \qquad (0<q<1)$$

dove H è ancora un opportuno numero positivo finito. Ne segue, come al numero precedente, che tutte le $d^2x_k^{(\rho)}(k=1,2\dots n)$ si mantengono, per qualunque ϱ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito.

Nel caso *b*) *ammettiamo che si abbia*

$$D_{k;t,s}^{(\sigma)}=\sum_1^p{}_\mu\,\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\frac{\partial^2 g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial x_s^{(\sigma)}\,\partial x_t^{(\sigma)}}\equiv 0 \ (\text{modd}\ g^{(\sigma)}\,,\,dg^{(\sigma)}) \tag{54}$$
$$(k=1,2\dots n\,;\,t\,,s=0,1,2\dots n);$$

ricordando allora che valgono le (52) e (52') e che le serie $\sum_0^\infty{}_\rho\,g_\mu^{(\rho)}$, $\sum_0^\infty{}_\rho\,dg_\mu^{(\rho)}$ convergono assolutamente ed uniformemente, come al numero precedente, si ottiene che anche in questo caso tutte le derivate seconde $d^2x_k^{(\rho)}$ si mantengono, per qualunque ϱ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito.

Ciò posto, deriviamo ancora una volta le $(31)_\sigma$ del n. precedente; avremo

$$d^2g_\mu^{(r+\sigma)}=\sum_1^p{}_\nu\,\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\,d^2g_\nu^{(\sigma)}+2\sum_1^p{}_\nu\,d\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\,dg_\nu^{(\sigma)}+\sum_1^p{}_\nu\,g_\nu^{(\sigma)}\,d^2\gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x^{(\sigma)})$$
$$\mu=1,2\dots p;$$

e di qui si deduce ancora, indicando con $|d^2g^{(\rho)}|$ un numero maggiore ed uguale al valore assoluto di ogni $d^2g_\mu^{(\rho)}$

$$|d^2g_\mu^{(\omega+1)r+\sigma}|<a\,|d^2g^{(\omega r+\sigma)}|+B\sum_1^p{}_\mu|g_\nu^{(\omega r+\sigma)}|+C\sum_1^p{}_\mu|dg_\mu^{(\omega r+\sigma)}|$$
$$(\sigma=0,1,2\dots r-1\,;\,\omega=1,2\dots)$$

dove B e C sono opportuni numeri positivi finiti, e quindi, pel 2° lemma del n. 19, le serie $\sum_0^\infty{}_\mu\,d^2g_\mu^{(\omega r+\sigma)}$ $(\mu=1,2\dots p\,;\,\sigma=0,1\dots r-1)$ e con esse le altre

$$\sum_0^\infty{}_\rho\,d^2g_\mu^{(\rho)} \qquad (\mu=1,2\dots p)$$

convergono assolutamente ed uniformemente nell'intorno considerato di M; e insieme con esse convergono anche le serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho\,(d^2x_k^{(\rho+1)}-d^2x_k^{(\rho)}) \qquad (k=1,2\dots n)$$

il che dimostra che il limite X ha le derivate seconde rispetto ad u, e queste si ottengono derivando due voltè termine a termine le serie che definiscono il limite stesso.

Un semplice processo d'induzione porta ora alle condizioni per le derivate di ordine superiore al secondo.

Ammettiamo di aver già dimostrato che tutte le derivate $d^t x_k^{(\rho)}$, per t minore di un certo numero intero $l > 2$, esistono, e si mantengono, per qualunque ϱ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito, e che tutte le serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho\, d^t g_\mu^{(\rho)} \quad , \quad \sum_0^\infty{}_\rho\, (d^t x_k^{(\rho+1)} - d^t x_k^{(\rho)})$$
$$(\mu = 1, 2 \dots p \;;\; k = 1, 2 \dots n \;;\; t = 0, 1 \dots l-1)$$

convergono assolutamente ed uniformemente in un intorno di M; e deriviamo l volte le (18) del numero precedente. Otteniamo le formule

$$\begin{aligned} d^l x_k^{(r+\sigma)} &= d^l x_k^{(\sigma)} + d^l \left\{ \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, g_\mu(x^{(\sigma)}) \right\} = \\ &= d^l x_k^{(\sigma)} + \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, d^l g_\mu(x^{(\sigma)}) + \mathrm{F}_k(g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)}, \dots d^{l-1} g^{(\sigma)}) \end{aligned} \tag{55}$$
$$(k = 1, 2 \dots n \;;\; \sigma = 0, 1 \dots r-1).$$

dove il simbolo F_k ha il solito significato; ed insieme (ricordando che la variabile u è stata fatta uguale ad $x_0^{(\sigma)}$)

$$d^l g_\mu^{(\sigma)} = \sum_0^n{}_{s_1 s_2 \dots s_l} \frac{\partial^l g_\mu^{(\sigma)}}{\partial x_{s_1}^{(\sigma)} \dots \partial x_{s_l}^{(\sigma)}}\, dx_{s_1}^{(\sigma)} \dots dx_{s_l}^{(\sigma)} + \cdots + \sum_1^n{}_t \frac{\partial g_\mu(x^{(\sigma)})}{\partial x_t^{(\sigma)}}\, d^l x_t^{(\sigma)} \tag{55'}$$
$$(\mu = 1, 2 \dots p \;;\; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

dove la parte non scritta contiene tutti termini che portano derivate delle g_μ e delle $x_k^{(\sigma)}$ di ordine minore di l.

Distinguiamo ancora i due casi $a)$, $b)$ del numero precedente. Nel caso $a)$, dalle (55) e (55′) deduciamo che, se le $d^l x_k^{(\sigma)}$ sono in valore assoluto inferiori ad un numero finito A, si ha insieme

$$|d^l x_k^{(r+\sigma)}| < \mathrm{A}' \qquad (k = 1, 2 \dots n \;;\; \sigma = 0, 1 \dots r-1)$$

con

$$\mathrm{A}' = \varrho \mathrm{A} + \mathrm{H}$$

dove H è ancora un opportuno numero finito; e di qui segue, come avanti, che tutte le $d^l x_k^{(\rho)}$ si mantengono finite, per qualunque ϱ.

Nel caso $b)$ invece *ammettiamo che sia*

$$\mathrm{D}_{k;s_1 s_2 \dots s_t}^{(r)} = \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}(x^\sigma) \frac{\partial^t g_\mu(x^\sigma)}{\partial x_{s_1}^{(\sigma)} \dots \partial x_{s_t}^{(\sigma)}} \equiv 0 \;(\mathrm{modd}\; g^{(\sigma)}, dg^{(\sigma)} \dots d^{t-1} g^{(\sigma)}) \tag{56}$$
$$(k = 1, 2 \dots n \;;\; s_1, s_2 \dots s_t = 0, 1, 2 \dots n \;;\; t = 2, 3 \dots l);$$

ne segue allora, come sopra, che anche in questo caso tutte le $d^l x_k^{(\rho)}$, si mantengono, per qualunque ρ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito.

Derivando poi l volte rispetto ad u le $(31)_\sigma$ del numero precedente, si ha immediatamente che le serie

$$\sum_0^\infty{}_\omega\, d^l g_\mu^{(\omega r+\sigma)} \;,\; \sum_0^\infty{}_\rho\, d^l g_\mu^{(\rho)} \;,\; \sum_0^\infty{}_\rho (d^l x_k^{(\rho+1)} - d^l x_k^{(\rho)})$$
$$(\mu = 1, 2 \dots p \;;\; \sigma = 0, 1 \dots r-1 \;;\; k = 1, 2 \dots n)$$

convergono assolutamente ed uniformemente nell'intorno considerato; cioè il limite X ha ancora derivate di ordine l rispetto ad u, che si hanno derivando l volte termine a termine le serie (14).

Abbiamo supposto, per maggior semplicità, che le $x^{(0)}$ fossero funzioni di una sola variabile indipendente u: ma è ben evidente, che, ove esse dipendano da più variabili $u, v, w, \dots$, sotto le stesse condizioni il limite X ha le derivate parziali rispetto ad $u, v, w, \dots$ di tutti gli ordini, e queste derivate si hanno ancora derivando termine a termine le serie (14) (ed un'osservazione analoga vale nel caso della convergenza di grado superiore); possiamo qiundi enunciare il teorema:

Se l'algoritmo K definito dalle equazioni (7) ha convergenza lineare e le $C_k^{(r)}$ si mantengono su tutta la varietà M inferiori ad un numero positivo q, minore dell'unità, in un conveniente intorno di M l'algoritmo converge ad un limite (X), che è una funzione delle coordinate dell'elemento iniziale $x^{(0)}$ e degli eventuali parametri dell'algoritmo, finita e continua insieme colle sue derivate di un ordine qualunque (ammesso naturalmente che le funzioni $\Phi(x\,x')$, $g(x)$ abbiano derivate finite e continue di ordine grande a piacere).

Se poi un tal numero q non esiste, ma valgono le disuguaglianze (52), (52′) e le (56) per $t = 2, 3 \dots l$, il limite X è ancora una funzione finita e continua delle stesse variabili colle sue derivate fino all'ordine l.

In tutti due i casi queste derivate si ottengono derivando termine a termine le serie (14) che definiscono il limite stesso.

Notiamo infine esplicitamente, a scanso di equivoci, che le condizioni date nell'enunciato nel teorema, sono soltanto *sufficienti* per l'esistenza di queste derivate.

23. *Espressione delle condizioni di derivabilità per le equazioni dell'algoritmo. Osservazioni.*

a) Dalle (44) del n. 12 (o dalle (49), facendovi $\sigma = 0$) si ottiene

$$\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t} \equiv \varepsilon_{kt} + \sum_1^p{}_\mu\, \beta_{k\mu}^{(r)}\, g_{\mu t}(x) \pmod{M} \tag{44}$$

e quindi anche per le (51) e (52)

$$C_k^{(r)} \equiv \sum_1^n{}_t \left|\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t}\right| \pmod{M},$$

e le (52) possono anche scriversi

$$\sum_{1}^{n} {}_{t} \left| \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t} \right| \leq 1 , \qquad (k = 1 , 2 \ldots n) .$$

Questa trasformazione conduce subito ad esprimere le (52) stesse mediante le equazioni che definiscono l'algoritmo: dalle (41) del n. 12 si ha infatti, colle notazioni ivi introdotte,

$$\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t} \equiv (-1)^r \frac{\Delta_{kt}^{(r)}}{\Delta^r} \text{ (mod M)},$$

quindi *le condizioni per l'esistenza delle derivate prime si scrivono semplicemente*

$$(52^*) \qquad \sum_{1}^{n} {}_{t} |\Delta_{kt}^{(r)}| \leq |\Delta|^r ; \qquad (k = 1 , 2 \ldots n)$$

quando inoltre sia possibile determinare un numero positivo q, minore dell' unità, pel quale si abbia anche, su tutta la varietà M

$$(52^{**}) \qquad \sum_{1}^{n} {}_{t} |\Delta_{kt}^{(r)}| \leq q \cdot |\Delta|^r \qquad (k = 1 , 2 \ldots n ; 0 < q < 1)$$

il limite X ha derivate di qualunque ordine, che si hanno derivando termine a termine le serie che definiscono il limite stesso. Quando invece non sia possibile determinare un tal numero q, conviene verificare le condizioni (52′) e (56). È molto semplice esprimere anche queste condizioni per le equazioni dell'algoritmo; basta per questo dalle (44) e (41) calcolare le $\beta_{\lambda\mu}^{(r)}$, il che non offre alcuna difficoltà. Omettiamo di scrivere, perchè non hanno una forma semplice, e, per quel che ora vedremo, non hanno neppure una grande importanza, le formule relative.

b) Facciamo piuttosto l'osservazione seguente:

L'algoritmo K abbia convergenza lineare di ordine r e valgano per esso le disuguaglianze (52*); ricordando allora (n. 9) che l'algoritmo K ha anche convergenza lineare di ogni ordine ωr, multiplo di r, proponiamoci di vedere se anche per l'ordine ωr di convergenza valgano, per l'algoritmo K, delle disuguaglianze analoghe alle (52*); anzi, quando per l'ordine r di convergenza valgano le (52*), ma non le disuguaglianze più restrittive (52**), proponiamoci di vedere se questo non sarà invece possibile per un conveniente ordine ωr (con $\omega > 1$) di convergenza dell'algoritmo stesso; se questo infatti accadrà, dalla considerazione dell'ordine di convergenza ωr, invece che dell'ordine r, si avrà che il limite ha derivate di tutti gli ordini, senza che si abbia a fare le verifiche richieste dalle (52′) e (56).

Indichiamo perciò con C_r il massimo valore che le $C_k^{(r)}$ $(k = 1 , 2 , \ldots n)$ hanno su tutta la varietà M; allora, senza distinguere per ora i due casi, avremo $C_r \leq 1$. Ora dalle formule

$$(57) \qquad \frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t} = \sum_{1}^{n} {}_{l} \frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_l^{(r)}} \cdot \frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t} \qquad (k , t = 1 , 2 \ldots n)$$

si ha identicamente

$$(57') \qquad \left| \frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t} \right| \leq \sum_{1}^{n} {}_{l} \left| \frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_l^{(r)}} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t} \right|$$

e poichè

$$\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_l^{(r)}} \equiv \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l} \pmod{M}$$

(in quanto sulla varietà M è $x_k^{(\sigma)} = x_k$, per qualunque σ). sarà anche

$$\left|\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t}\right|_M \leq \sum_1^n {}_l \left|\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l}\right|_M \cdot \left|\frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t}\right|_M$$

ed insieme

$$C_k^{(2r)} = \sum_1^n {}_t \left|\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t}\right|_M \leq \sum_1^n {}_l \left|\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l}\right|_M \sum_1^n {}_t \left|\frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t}\right|_M = \sum_1^n {}_l C_l^{(r)} \left|\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l}\right|_M \leq C_r \cdot C_k^{(r)};$$

detto quindi C_{2r} il massimo valore delle $C_k^{(2r)}$ su M, si avrà

$$C_{2r} \leq C_r^2. \tag{58}$$

Affatto analogamente, con notazioni di evidente significato, sarà

$$\left\{ \begin{aligned} & C_{(\omega+\omega')r} \leq C_{\omega r} \cdot C_{\omega' r}, \\ & C_{\omega r} \leq C_r^{\omega}, \end{aligned} \right. \tag{58'}$$

qualunque siano gli interi positivi ω ed ω'.

Ove dunque si abbia $C_r \leq 1$, è ancora, per qualunque ω, $C_{\omega r} \leq 1$; quando sia $C_r \leq q$ (con $0 < q < 1$), è insieme $C_{\omega r} \leq q^{\omega}$; cioè se le disuguaglianze (52*) (o le (52**)) sono verificate per l'ordine r, valgono ancora (come è ben naturale) per qualunque ordine di convergenza multiplo di r.

c) Vogliamo ora studiare più da vicino il caso in cui sia $C_r = 1$. Cominciamo perciò dall'osservare, che, se con $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ indichiamo (affatto arbitrariamente) dei numeri uguali a zero o ad uno, dalle (44) otteniamo

$$\sum_1^n {}_t (-1)^{\tau_k+\tau_t} \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t} = 1 + (-1)^{\tau_k} \sum_1^p {}_\mu \beta_{k\mu} \sum_1^n {}_t (-1)^{\tau_t} g_{\mu t};$$

ove dunque in un punto X della varietà M si abbia, per $\mu = 1, 2 \ldots p$

$$\sum_1^n {}_t (-1)^{\tau_t} g_{\mu t} = 0 \tag{59}$$

(essendo le τ_t scelte convenientemente) nel punto stesso si avrà, per qualunque k

$$\sum_1^n {}_t (-1)^{\tau_k+\tau_t} \left(\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t}\right)_X = 1;$$

e quindi nel punto X potranno verificarsi le disuguaglianze (52) soltanto quando si abbia, per ogni valore di k e di t

$$(-1)^{\tau_k+\tau_t} \left(\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t}\right)_X \geq 0; \qquad (k, t = 1, 2 \ldots n)$$

e sarà allora nel punto X $C_k^{(r)} = 1$, per $k = 1, 2 \ldots n$, e quindi anche $C_r = 1$. In

questa ipotesi inoltre si avrà dalle (57) che ogni derivata

$$(-1)^{\tau_k+\tau_t}\left(\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t}\right)_X$$

sarà positiva e soltanto in casi eccezionali potrà esser nulla, ed insieme (nel punto X) sarà ogni $C_k^{(2r)}=1$ e quindi anche $C_{2r}=1$; e affatto analogamente, per qualunque ω, ogni derivata

$$(-1)^{\tau_k+\tau_t}\left(\frac{\partial x_k^{(\omega r)}}{\partial x_t}\right)_X$$

sarà positiva (o nulla) ed insieme si avrà $C_k^{(\omega r)}=1$ e quindi $C_{\omega r}=1$.

d) Ma è notevole che questo risultato può essere invertito.

Sia infatti $C_r=1$; dalle (57) e (58) si ha che sarà in generale $C_{2r}<1$; e solo potrà aversi $C_{2r}=1$, quando, in qualche punto di M, si abbia

$$C_k^{(r)}=C_r=1$$

per tutti i valori di k da 1 ad n ed insieme si abbia per *qualche valore di* s e per tutti i valori di t

$$\left|\frac{\partial x_s^{(2r)}}{\partial x_t}\right|_M=\sum_1^n{}_l\left|\frac{\partial x_s^{(r)}}{\partial x_l}\right|_M\cdot\left|\frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t}\right|_M. \tag{60}$$

Ma se questa uguaglianza vale per qualche valore, ma non per tutti i valori di s da 1 ad n, si ha $C_{2r}=1$, ma non tutte le $C_k^{(2r)}$ sono nel punto stesso uguali all'unità; quindi si dedurrebbe che nel punto X tutte le $C_k^{(3r)}$ sono minori di uno (e quindi nell'intorno del punto $C_{3r}<1$); se noi dunque vogliamo che non solo sia $C_{2r}=1$, ma anche $C_{\omega r}=1$, per qualunque ω, è necessario supporre che le (60) valgano per tutti i valori di s e di t.

Ammettiamo dunque che le (60) valgano per tutti i valori di s e di t e, per evitare discussioni troppo complicate e minute, limitiamoci a considerare il caso più semplice, quando nessuna delle derivate $\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t}$ sia nulla nel punto di M che si considera.

Allora, perchè valgano le (60), è necessario e sufficiente che, fissato per k e t un sistema arbitrario di valori, gli n prodotti

$$\left(\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l}\right)_X\cdot\left(\frac{\partial x_l^{(r)}}{\partial x_t}\right)_X \qquad (l=1,2\ldots n)$$

abbian tutti il medesimo segno, che dipenderà in generale dagli indici k e t (ed in questa ipotesi ogni derivata $\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_t}$ sarà nel punto X diversa da zero); poichè inoltre, per $t=k$, uno degli n prodotti è uguale a $\left(\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_k}\right)_X^2$, ogni derivata $\frac{\partial x_k^{(2r)}}{\partial x_k}$ sarà nel punto X positiva. Supponiamo che questo accada anche per le $\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_k}$; ove infatti

così non fosse, basterebbe partire, anzichè dall'ordine r, dall'ordine $2r$ di convergenza. In questa ipotesi, *cambiando al più il segno di alcune tra le* $x_1, x_2 \dots x_n$ (e delle corrispondenti $x'_1, x'_2 \dots x'_n$), possiamo supporre che tutte le derivate $\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l}$ sian positive nel punto considerato. Poniamo infatti per un momento

$$\xi_t^{(\sigma)} = (-1)^{\tau_t} x_t^{(\sigma)}$$

con $\tau_1 = 0$, $\tau_t = 0$ oppure ad 1 per $t \neq 1$, $\sigma = 0, 1, 2 \dots$; e determiniamo τ_t in guisa che nel punto considerato si abbia $\frac{\partial \xi_1^{(r)}}{\partial \xi_t} = (-1)^{\tau_t} \frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial x_t} > 0$ (per $t = 1, 2 \dots n$); poichè $\frac{\partial \xi_1^{(2r)}}{\partial \xi_1}$ è positiva, sarà anche $\frac{\partial \xi_k^{(r)}}{\partial \xi_1} > 0$, per $k = 1, 2 \dots n$, e poichè i due prodotti

$$\frac{\partial \xi_k^{(r)}}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial \xi_1^{(r)}}{\partial \xi_1} \quad , \quad \frac{\partial \xi_k^{(r)}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial \xi_k^{(r)}}{\partial \xi_1}$$

hanno ugual segno (positivo) sarà infine anche, per qualunque k ed l, $\frac{\partial \xi_k^{(r)}}{\partial \xi_l} > 0$ nel punto considerato; e, tornando a porre $x_1 \dots x_n$ in luogo di $\xi_1 \dots \xi_n$ si ha appunto quanto avevamo asserito. Sicchè dunque, riassumendo, abbiamo che nel punto considerato si può supporre che sia

$$\frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l} > 0 \quad , \quad \sum_1^n {}_l \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_l} = 1 \qquad (k, l = 1, 2 \dots n).$$

Dalle formule di derivazione delle funzioni composte si ha allora, nel punto X

$$\frac{\partial x_k^{(r\omega)}}{\partial x_l} > 0 \quad , \quad \sum_1^n {}_l \frac{\partial x_k^{(r\omega)}}{\partial x_l} = 1 \qquad (k, l = 1, 2 \dots n)$$

per qualunque ω, e quindi anche $C_{\omega r} = 1$.

Prendiamo ora le relazioni fondamentali (31) del n. 8 e deriviamole rispetto ad una qualunque delle x, alla x_t; sommiamo quindi rispetto a t da 1 ad n. Abbiamo le identità

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial g_\mu(x^{(r)})}{\partial x_k^{(r)}} \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_t} \equiv \sum_1^p {}_\nu \gamma_{\mu\nu}^{(r)}(x) \sum_1^n {}_t g_{\nu t} \pmod{M}$$

e, per le relazioni antecedenti, nel punto considerato sarà anche

$$\sum_1^n {}_k (g_{\mu k})_X = \sum_1^p {}_\nu \gamma_{\mu\nu}^{(r)} \cdot \sum_1^n {}_t (g_{\nu t})_X$$

o, posto

$$H_\mu = \sum_1^n {}_k (g_{\mu k})_X$$

sarà

$$H_\mu = \sum_1^p {}_\nu (\gamma_{\mu\nu}^{(r)})_X \cdot H_\nu$$

e quindi anche, tenendo conto delle (33), detto H il massimo valore assoluto delle

$H_1, H_2 \ldots H_p$, si avrà

$$|H_\mu| \leq \sum_{1}^{p} {}_\nu |\gamma_{\mu\nu}^{(\sigma)}||H_\nu| \leq H \cdot a$$

e perciò anche

$$H(1-a) \leq 0,$$

donde necessariamente $H = 0$; cioè nel punto X si ha (per $\mu = 1, 2 \ldots p$)

$$\sum_{1}^{n} {}_k g_{\mu k} = 0;$$

e questo risultato (tenendo conto dei cambiamenti di segno che eventualmente si sono fatti) dimostra quanto avevamo detto in principio.

e) Ciò posto, in un punto X di M si abbia $C_r = 1$, ma *non* si abbia, per tutti i valori di μ da 1 a p, colle τ_t scelte convenientemente

$$\sum_{1}^{n} {}_t (-1)^{\tau_t} g_{\mu t} = 0;$$

dalla discussione precedente si ha che nel punto stesso sarà certamente $C_k^{(6r)} < 1$ (per $k = 1, 2 \ldots n$); supponendo dunque che nessuna delle relazioni superiori sia soddisfatta identicamente sulla varietà M per tutti i valori di μ, abbiamo che fatta eccezione di punti e varietà particolari, di dimensione minore di $n - p$, della varietà M, potrà in ogni altra regione di M (che non contenga alcuno di questi punti e varietà eccezionali) determinarsi un numero finito $\omega (\leq 6)$ tale che in ogni punto della regione stessa si abbia $C_k^{(\omega r)} < 1$, per tutti i valori di k. E poichè ogni $C_k^{(\omega r)}$ è in ogni regione di M una funzione continua, anche il suo massimo valore sarà nella regione stessa minore dell'unità, e potrà quindi determinarsi anche un numero q minore dell'unità, tale che in ogni punto della stessa regione si avrà $C_{\omega r} \leq q < 1$; donde si deduce, che finchè il punto iniziale $x^{(0)}$ rimane in un intorno (di S_n) sufficientemente prossimo alla regione di M considerata, il limite X avrà derivate di qualunque ordine; l'aver dunque soddisfatte le (52) porta con sè che, quando il punto limite X non cade in alcune varietà eccezionali e il punto iniziale si prende in un intorno convenientemente piccolo della varietà M stessa, il limite X ha derivate di qualunque ordine, senza che per assicurarsene sia necessario ricorrere all'esame delle congruenze (52′) e (56).

f) Se invece nel punto limite X sono soddisfatte le p relazioni

$$\sum_{1}^{n} {}_t (-1)^{\tau_t} g_{\mu t} = 0, \qquad (\mu = 1, 2 \ldots p)$$

le conclusioni superiori non valgono più; e, verificate nel punto stesso le (52), conviene guardare anche alle (52′) e per le derivate di ordine superiore al primo, alle (56). Ci limitiamo a considerare il caso speciale che il divisore sia *lineare*, cioè che ogni g_μ sia una funzione lineare intiera delle *sole* $x_1, x_2 \ldots x_n$, e soddisfi (*identicamente*, come è subito visto) ad una relazione (59). In questo caso le (52′) e (56)

sono identicamente verificate, le (52) potranno poi aver luogo allora ed allora soltanto che ogni derivata $(-1)^{\tau_i+\tau_k} \frac{\partial x_k^{(r)}}{\partial x_i}$ sia nel punto limite positiva o nulla (il che accadrà se in un conveniente intorno del punto limite le derivate stesse si mantengono sempre positive); in questa ipotesi il limite X ha quindi ancora in questo caso derivate di qualunque ordine, finite e continue, che si hanno derivando le serie che danno il limite stesso.

g) Consideriamo infine il caso di $n=1$. Avendo l'algoritmo convergenza lineare, sarà

$$g(x') = \gamma(x) \cdot g(x) \qquad \text{con } |\gamma(x)| < a < 1$$

ed insieme, poichè $g'(\mathrm{X}) \neq 0$, si ha

$$\frac{dx'}{dx} \equiv \gamma \ (\mathrm{mod\ M});$$

la condizione di convergenza è cioè identica a quella di derivabilità.

Ne segue che se nell'equazione $\mathrm{F}(x\,x') = 0$, che definisce l'algoritmo, entrano uno o più parametri u e la F ha derivate parziali (dei successivi ordini) rispetto a questi parametri, altrettanto può affermarsi del limite X.

24. *Algoritmi derivati di un algoritmo dato.*

Ai risultati ottenuti circa le derivate del limite di un algoritmo perveniamo ancora colle considerazioni seguenti:

Nelle equazioni (7) del n. 3, che definiscono l'algoritmo, e per le quali si hanno le condizioni (9) e (10) di compatibilità e valgono anche tutte le altre ipotesi del n. 3, pensiamo che le x ed x' contengano un parametro u, il quale possa entrare anche in modo esplicito nelle equazioni (7); ed in questa ipotesi *variamo* (deriviamo cioè rispetto ad u) le equazioni tutte dell'algoritmo. Indicando col simbolo δ le variazioni e ponendo $\xi_k = \delta x_k$, $\xi'_k = \delta x'_k$ $(k = 1, 2 \ldots n)$, avremo dalle (7) le q relazioni

$$\delta\Phi_i = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \xi_k + \sum_1^n{}_l \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l} \xi'_l + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots q),$$

dalle (9) e (10) le altre

$$\delta \mathrm{H}_r = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \mathrm{H}_r}{\partial x_k} \xi_k + \frac{\partial \mathrm{H}_r}{\partial u} = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots \sigma)$$

$$\delta \mathrm{K}'_s = \sum_1^n{}_l \frac{\partial \mathrm{K}'_s}{\partial x_l} \xi'_l + \frac{\partial \mathrm{K}'_s}{\partial u} = 0 \qquad (s = 1, 2 \ldots \tau),$$

le quali ultime, per i teoremi fondamentali delle funzioni implicite od anche per le (11), sono una conseguenza algebrica delle $\Phi_i = 0$, $\delta\Phi_i = 0$.

Variamo ora le $g_1, g_2 \ldots g_p$; avremo le funzioni

$$\delta g_\mu = \sum_1^n{}_k \frac{\partial g_\mu}{\partial x_k} \xi_k + \frac{\partial g_\mu}{\partial u} \qquad (\mu = 1, 2 \ldots p);$$

e poichè, come abbiamo visto al n. 3, le $\mathrm{H}_r(x)$, $\mathrm{K}_s(x)$ si esprimono linearmente ed

omogeneamente per le $g_\mu(x)$ e la varietà V definita dalle equazioni $H_r = 0$, $K_s = 0$ è più ampia, per ipotesi, della varietà M definita dalle $g_\mu = 0$, avremo che le $\delta H_r(x)$, $\delta K_s(x)$ si esprimeranno linearmente ed omogeneamente per le g, δg, ed inoltre nell' S_{2n} le cui coordinate cartesiane sono le x e le ξ, la varietà M_1 definita dalle equazioni $g = 0$, $\delta g = 0$ avrà una dimensione minore e sarà contenuta nella varietà V_1 definita dalle $H_r = 0$, $K_s = 0$, $\delta H_r = 0$, $\delta K_s = 0$. Consideriamo allora in questo S_{2n} un punto $(x^{(0)}\, \xi^{(0)})$, scelto arbitrariamente entro la varietà V_1 ora definita; le equazioni $\Phi_i = 0$, $\delta\Phi_i = 0$, fattovi $x = x^{(0)}$, $\xi = \xi^{(0)}$, definiranno un nuovo punto $(x^{(1)}\, \xi^{(1)})$ della varietà V_1; ed iterando, otteniamo un algoritmo K′, appartenente alla varietà M_1, che diremo *derivato primo* dell'algoritmo K, definito dalle equazioni (7).

L'algoritmo primitivo K abbia convergenza d'ordine r e grado $s (\geq 1)$; sotto quali condizioni l'algoritmo derivato K′ ha convergenza dello stesso ordine?

Sia dapprima $s = 1$; variando le equazioni (18) del n. 21, otteniamo le relazioni

$$\xi_k^{(r+\sigma)} = \sum_1^n {}_t\, \xi_t^{(\sigma)} \left\{ \varepsilon_{kt} + \sum_1^p {}_\mu \left(\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)}) \cdot g_{\mu t}(x^{(\sigma)}) + g_\mu(x^{(\sigma)}) \frac{\partial \beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})}{\partial x_t^{(\sigma)}} \right) \right\} + $$
$$+ \sum_1^p {}_\mu \frac{\partial}{\partial u} \left[\beta_{k\mu}^{(r)}(x^{(\sigma)})\, g_\mu(x^{(\sigma)}) \right]$$

le quali non differiscono che per le notazioni dalle (49) del numero stesso.

Quando dunque valgano le (52) e si abbia il caso *a*), oppure nel caso *b*) si abbiano insieme anche le (52′), tutte le $\xi_k^{(\rho)}$ si manterranno, per qualunque ρ, inferiori in valore assoluto ad un numero finito.

Variando poi le $(31)_\sigma$ del numero stesso, ne deduciamo che le serie

$$\sum_1^\infty {}_\rho\, \delta g_\mu^{(\rho)} \quad , \quad \sum_0^\infty {}_\rho (\xi_k^{(\rho+1)} - \xi_k^{(\rho)}) \qquad (\mu = 1, 2 \ldots p\, ,\ k = 1, 2 \ldots n)$$

convergono assolutamente ed uniformemente.

Dall'osservazione fatta nella dimostrazione del 2° lemma del n. 19 risulta inoltre che l'algoritmo derivato K′ ha convergenza lineare, misurata ancora dalla stessa costante dell'algoritmo K.

Sia ora $s \geq 2$; variando le $(34)_\sigma$ del n. 20, otteniamo per le $\delta g_\mu^{(r+\sigma)}$ un aggregato omogeneo di grado s nelle $g^{(\sigma)}$, $\delta g^{(\sigma)}$, e poichè, come al n. 20 abbiam visto, ogni $\xi_k^{(\rho)}$ si mantiene sempre finita e sulla varietà M ogni $\delta g^{(r+\sigma)}$ si annulla, l'algoritmo K′ ha ancora, in un intorno conveniente di M, convergenza di grado uguale ad s.

Variando una seconda, una terza volta le equazioni (7) e le loro conseguenze, sia algebriche che differenziali, è chiaro che insieme coll'algoritmo derivato primo potremo considerare l'*algoritmo derivato dell'algoritmo* K *del 2°, 3° ordine*, più in generale di un ordine qualunque; quando l'algoritmo K ha convergenza di grado superiore al primo, come al n. 20 vedremmo che tutti questi algoritmi hanno, nell'intorno di M, convergenza del medesimo ordine e grado; quando l'algoritmo K ha convergenza lineare, il volere che le successive variazioni delle $x_k^{(\rho)}$ rimangano

sempre finite, porta evidentemente alle condizioni stesse, che abbiamo trovate al n. 22; e quando queste siano soddisfatte l'algoritmo converge (ed ha come limiti il limite dell'algoritmo primitivo e le sue derivate) e la convergenza, lineare, è misurata dalla stessa costante che misura la convergenza dell'algoritmo primitivo.

25. *Trasformazione delle equazioni e delle variabili in un algoritmo.*

L'algoritmo K, definito dalle equazioni (7), non cambia in modo essenziale, quando alle (7) stesse si sostituisca un sistema equivalente od una trasformazione analoga si eseguisca sulle equazioni (3) del divisore M, cui l'algoritmo appartiene, o infine quando nello $S_n \equiv (x_1, x_2 \dots x_n)$ si eseguisca una qualunque trasformazione di variabili. Per una qualunque di queste trasformazioni, le condizioni di convergenza e di derivabilità dell'algoritmo devono, per il loro significato, rimanere invariate.

È facile confermare e precisare analiticamente questo risultato.

a) Sostituiamo dapprima alle (7) un sistema equivalente, lasciando inalterate le (3). Alle equazioni (15) del n. 5 verrà pure sostituito un sistema equivalente; quindi rimarranno invariate le (18) e con esse le (20) dello stesso numero ed, eventualmente, le (29) e (34) dei nn. 7 ed 8; i determinanti Δ_{ik}, Δ, dati dalle (40') del n. 12, si moltiplicano tutti per uno stesso fattore diverso da zero, quindi anche le (41) rimarranno invariate [1]. Ne segue immediatamente che le condizioni di convergenza e derivabilità rimangono tutte immutate per questa prima trasformazione.

b) Lasciamo ora immutate le equazioni (7); sostituiamo invece alle equazioni (3) che definiscono il divisore M un sistema equivalente

$$G_1 = G_2 = \dots = G_\pi = 0;$$

si avrà dunque, coi simboli di Kronecker

$$(g_1, g_2 \dots g_p) \sim (G_1, G_2 \dots G_\pi).$$

Dall'equivalenza di questi due sistemi segue anche l'equivalenza dei sistemi *derivati* di un ordine qualunque

$$(g, dg, d^2g \dots d^tg) \sim (G, dG, d^2G \dots d^tG);$$

sarà quindi, coi soliti simboli

$$F(g, dg \dots d^tg) = F(G, dG \dots d^tG);$$

perciò la convergenza assoluta ed uniforme dell'un gruppo di serie

$$\sum_0^\infty{}_\rho\, d^\tau g_\mu^{(\rho)}\ ,\ \sum_0^\infty{}_\rho\, d^\tau G_\nu^{(\rho)} \qquad (\mu = 1, 2 \dots p\ ;\ \nu = 1, 2 \dots \pi\ ;\ \tau = 0, 1 \dots t)$$

porta con sè la convergenza assoluta ed uniforme dell'altro.

Tutto questo non dimostra però che per un tale cambiamento rimangano immutate le condizioni di convergenza e derivabilità; ma è facile vedere quello che accade.

Cominciamo dal supporre che l'algoritmo abbia convergenza di ordine r e grado s, con $s \geqq 2$; dalle (34) del n. 8, per l'equivalenza dei due sistemi $(g_1\, g_2 \dots g_p)$, $(G_1 \dots G_\pi)$,

[1] Ancora qui supponiamo per semplicità $q = n$.

seguono delle relazioni affatto simili tra le $G(x^r)$ e le $G(x)$ ed inversamente; la trasformazione considerata lascia quindi invariato l'ordine ed il grado della convergenza, quando questo sia maggiore dell'unità.

Consideriamo ora il caso della convergenza lineare.

Ammettiamo senz'altro che sia $p = \pi =$ al rango del divisore M, di guisa che sia le $g_1 \dots g_p$, sia le $G_1 \dots G_p$ siano tra loro indipendenti. L'equivalenza dei due sistemi $(g_1\, g_2 \dots g_p)$, $(G_1\, G_2 \dots G_p)$ si traduce in due sistemi di formule

$$g_\mu = \sum_1^p {}_\alpha\, a_{\mu\alpha}\, G_\alpha \quad ; \quad G_\mu = \sum_1^p {}_\alpha\, b_{\mu\alpha}\, g_\alpha,$$

indicando le $a_{\mu\alpha}$, $b_{\mu\alpha}$ funzioni determinate e finite delle x. Dalle $(31)_\rho$ del n. 9 si ottengono allora relazioni analoghe tra le G

$$G_\mu(x^{(\rho)}) = \sum_1^p {}_\nu\, \Gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x)\, G_\nu(x)$$

con

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x) = \sum_1^p {}_{\alpha\beta}\, b_{\mu\alpha}(x^{(\rho)})\, \gamma_{\alpha\beta}^{(\rho)}(x)\, a_{\beta\nu}(x).$$

Ora se $p = 1$, è $ab = 1$, quindi $\Gamma(x) \equiv \gamma(x)$ (mod M) e tutto resta immutato; per $p > 1$, indicando con A, B dei numeri maggiori od uguali ai moduli di ogni $a_{\mu\alpha}$, $b_{\mu\alpha}$ nel campo considerato, sarà

$$\sum_1^p {}_\nu\, |\Gamma_{\mu\nu}^{(\rho)}(x)| \leq p\, A\, B \sum_1^p {}_{\alpha\beta}\, |\gamma_{\alpha\beta}^{(\rho)}|.$$

Le serie $\sum_1^\infty {}_\rho\, g_\mu^{(\rho)}$ abbiano ora convergenza lineare di ordine r misurata dalla costante $a < 1$, e perciò anche di ogni ordine $r\omega$ multiplo di r, e misurata da una costante minore od uguale di a^ω; sarà quindi

$$\sum_1^p {}_\beta\, |\gamma_{\alpha\beta}^{(r\omega)}| < a^\omega \qquad (\alpha = 1, 2 \dots p);$$

fatto allora nelle formule superiori $\rho = r\omega$, si avrà anche

$$\sum_1^p {}_\nu\, |\Gamma_{\mu\nu}^{(r\omega)}| < p^2 . A . B . a^\omega . \qquad (\mu = 1, 2 \dots p)$$

Si determini ora un esponente τ pel quale si abbia

$$p^2 . A . B . a^\tau = b < 1;$$

allora le serie $\sum G_\mu^{(\rho)}$ avranno anche esse convergenza lineare di ogni ordine $r\omega$ con $\omega \geq \tau$, misurata da una costante non maggiore di $b a^{\omega - \tau}$.

Quando dunque sia $p > 1$ può per la trasformazione indicata mutare il minimo ordine di convergenza delle serie $\sum g_\mu^{(\rho)}$, relative al divisore cui l'algoritmo appartiene; quel che è invece invariante è la differenza tra due ordini successivi di convergenza e (in una certa misura) il rapporto delle relative costanti.

Le condizioni di derivabilità rimangono poi inalterate, poichè sono indipendenti dalle equazioni del divisore cui l'algoritmo appartiene.

c) Eseguiamo infine nell' S_n un qualunque cambiamento di variabili definito dalle relazioni

$$\omega_i(x, \xi) = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

dove le ω_i sono tali funzioni delle antiche e nuove variabili $x_1 \dots x_n$, $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$, che i due determinanti funzionali

$$\frac{d(\omega_1\,\omega_2 \dots \omega_n)}{d(x_1\,x_2 \dots x_n)}, \quad \frac{d(\omega_1\,\omega_2 \dots \omega_n)}{d(\xi_1\,\xi_2 \dots \xi_n)}$$

sono diversi da zero.

Una tale trasformazione lascia invariate le condizioni di convergenza, e lineare, e di grado superiore, di qualunque ordine: le (31) e le (34) del n. 8 rimangono infatti immutate, nelle nuove variabili invece che nelle antiche, e con le (31) anche le disuguaglianze (33), il che dimostra la nostra asserzione.

Per quel che riguarda le condizioni di derivabilità, espresse dalle (52) del n. 21, dalle formule (con ω qualunque)

$$\frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial \xi_t} = \sum_1^n{}_{lm} \frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial x_l^{(r\omega)}} \frac{\partial x_l^{(r\omega)}}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial \xi_t}$$

si ottiene

$$\sum_1^n{}_t \left| \frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial \xi_t} \right| \leq \sum_1^n{}_{lmt} \left| \frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial x_l^{(r\omega)}} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_l^{(r\omega)}}{\partial x_m} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_m}{\partial \xi_t} \right|;$$

indicando quindi con A, B i massimi valori assoluti delle derivate $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}$, $\frac{\partial x_m}{\partial \xi_t}$ nel campo considerato sarà anche

$$\sum_1^n{}_t \left| \frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial x_t} \right| \leq n\mathrm{AB} \sum{}_{lm} \left| \frac{\partial x_l^{(r\omega)}}{\partial x_m} \right| < n^2\mathrm{AB} \,.\, \mathrm{C}_{r\omega}.$$

Consideriamo allora il caso più semplice, che sia $C_r \leq q < 1$, e quindi anche $C_{r\omega} \leq q^\omega$; determinato un esponente τ pel quale si abbia

$$n^2\mathrm{AB}q^\tau < 1,$$

sarà, per qualunque valore di $\omega \geq \tau$

$$\sum_1^n{}_t \left| \frac{\partial \xi_k^{(r\omega)}}{\partial \xi_t} \right| \leq q^{\omega-\tau} < 1;$$

cioè anche nelle variabili ξ, ξ' sono soddisfatte per un ordine sufficientemente elevato di convergenza le condizioni analoghe alle (52), e per esse variabili si presenta ancora il caso che abbiamo indicato con a).

Qualora invece nel punto considerato si abbia $C_{\omega r} = 1$ per qualunque ω, le formule antecedenti non conducono più ad alcuna conclusione; e per quanto sia certo che insieme colle derivate rispetto alle x il limite ha ancora derivate rispetto alle ξ, non è escluso che le (52) possano valere per un determinato sistema di variabili, ma non per un altro sistema [1]. Una discussione precisa di questo caso eccezionale può farsi soltanto nei singoli casi particolari.

[1] È bene aver presente che le (52) assegnano soltanto delle condizioni *sufficienti* per l'esistenza delle derivate prime.

26. *Sugli sviluppi in serie degli algoritmi analitici.*

Abbiamo già osservato, al n. 20, che quando l'algoritmo è analitico, quando cioè le Φ_i sono funzioni analitiche dei loro argomenti, la convergenza dell'algoritmo porta con sè che il limite è anche esso una funzione analitica delle variabili iniziali e degli eventuali parametri dell'algoritmo; quando dunque queste variabili iniziali siano date come serie di potenze di altre variabili u, altrettanto accade delle funzioni limiti. Se di più il grado di convergenza dell'algoritmo è maggiore dell'unità, si può al risultato dare una forma molto più precisa e completa.

Sia r l'ordine, $s \geq 2$ il grado di convergenza dell'algoritmo; varranno le (34) del n. 8, e poichè l'algoritmo ha anche convergenza di qualunque ordine $r+\sigma$ maggiore di r e di grado non minore di s, insieme con queste si avranno anche delle relazioni delle forma

$$(34)_\sigma \qquad g_\mu(x^{(r+\sigma)}) = \sum_1^p {}_{k_1 k_2 \dots k_s} \gamma^{(r+\sigma)}_{\mu; k_1 \dots k_s} g_{k_1}(x)\, g_{k_2}(x) \dots g_{k_s}(x)$$

dove le $\gamma^{(r+\sigma)}_{\mu; k_1 \dots k_s}$ sono funzioni analitiche delle $x_1\, x_2 \dots x_n$ e degli eventuali parametri dell'algoritmo.

Supponiamo ora che le coordinate iniziali $x_1 \dots x_n$ siano espresse da serie di potenze

$$x_k = \sum_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q} a^{(k)}_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_q} u_1^{\rho_1} u_2^{\rho_2} \dots u_q^{\rho_q} \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

di q variabili complesse $u_1, u_2 \dots u_q$ (che entrino, eventualmente, anche nelle equazioni (7) che definiscono l'algoritmo) e per $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$ sia $x_k(0, 0 \dots 0) = (x_k)_0$ un punto della varietà M cui l'algoritmo appartiene, si abbia cioè $g((x)_0) = 0$; e indichiamo per brevità coll'indice zero il valore che una determinata funzione delle $u_1\, u_2 \dots u_q$ prende quando in essa si faccia $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$.

In queste ipotesi l'algoritmo definisce un punto $(X_1\, X_2 \dots X_n)$ della varietà M, che è una funzione analitica delle variabili complesse $u_1, u_2 \dots u_q$, qualunque X_k è cioè definita nell'intorno del punto $u_1 = u_2 = \dots = u_q = 0$ da una serie di potenze di queste variabili. Il fatto che l'algoritmo ha un grado di convergenza maggiore dell'unità conduce ad un determinazione semplice dei coefficienti di queste serie, fino ad un grado qualunque.

Dalle $(31)_\rho$ del n. 9 si ha intanto che, per qualunque σ, è identicamente

$$(61) \qquad \{ g_\mu^{(\sigma)} \}_0 = 0\,;$$

differenziamo poi le $(34)_\sigma$ fino all'ordine t, con $t \leq s-1$. Un qualunque differenziale

$$d^t g_\mu^{(r+\sigma)}$$

si esprime come un aggregato omogeneo delle g, e delle $d^\omega g\, (\omega = 1, 2 \dots t)$ tale che

ogni termine contiene come fattore una g almeno; facendo quindi $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$, si ha identicamente, per qualunque σ

$$\}d^t g_\mu^{(r+\sigma)}\{_0 = 0 \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \ ; \ t = 1, 2 \dots s - 1).$$

Consideriamo ora una $g_\mu^{(2r+\sigma)}$ e differenziamola fino ad un ordine $t \leq s^2 - 1$. Cambiando nella $(34)_\sigma$ le x nelle $x^{(r)}$, per la formula di Leibnitz il differenziale $d^t g_\mu^{(2r+\sigma)}$ è un aggregato omogeneo di grado s, delle $g^{(\sigma)}$, $d^\omega g^{(\sigma)}$ $(\omega = 1, 2 \dots s^2 - 1)$ tale che *in ogni termine vi è almeno un differenziale* $d^\lambda g^{(\sigma)}$, *nel quale* λ *è minore od uguale ad* $s - 1$; facendo quindi $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$ e tenendo conto delle relazioni superiori, si ha identicamente

$$\}d^t g_\mu^{(2r+\sigma)}\{_0 = 0 \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \ ; \ t = 1, 2 \dots s^2 - 1).$$

Ammettiamo ora, in generale, di aver dimostrato che è identicamente, per qualunque σ

$$(62) \qquad \}d^t g_\mu^{(r\tau+\sigma)}\{_0 = 0 \qquad (\mu = 1, 2 \dots p \ ; \ t = 1, 2 \dots s^\tau - 1);$$

relazioni affatto identiche si avranno ancora per il valore $\tau + 1$.

Cambiamo infatti nelle $(34)_\sigma$ le x nelle $x^{(r\tau)}$ e differenziamo le relazioni ottenute fino ad un ordine $t \leq s^{\tau+1} - 1$. Ancora per la formula di Leibnitz ogni tale differenziale

$$d^t g_\mu^{[r(\tau+1)+\sigma]} \qquad (t < s^{\tau+1})$$

è un aggregato delle $g^{(r\tau+\sigma)}$ e dei loro differenziali, tali che ogni termine contiene *un differenziale almeno* $d^\lambda g^{(r\tau+\sigma)}$, *nel quale l'ordine* λ *è minore di* s^τ; facendovi quindi $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$, si ha per qualunque σ

$$\}d^t g_\mu^{[r(\tau+1)+\sigma]}\{_0 = 0 \qquad (t \leq s^{\tau+1} - 1),$$

come appunto si era affermato. Le relazioni (62) sono così dimostrate per qualunque valore di τ.

Mutiamo ora nelle (18) del n. 5 le x nelle $x^{(r\tau+\sigma)}$ e differenziamo le formule così ottenute

$$x_k^{(r\tau+\sigma+1)} - x_k^{(r\tau+\sigma)} = \sum_1^p {}_\mu \, \beta_{k\mu}(x^{(r\tau+\sigma)}) \, g_\mu(x^{(r\tau+\sigma)})$$

fino ad un ordine $t < s^\tau$, facciamo poi $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$. Dalle (61) e (62) otteniamo le formule

$$\}d^t x_k^{(r\tau+\sigma+1)}\{_0 = \}d^t x_k^{(r\tau+\sigma)}\{_0 \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

e sotto forma equivalente

$$(63) \qquad \}d^t x_k^{(q)}\{_0 = \}d^t x_k^{(r\tau)}\{_0 \quad \text{per} \quad q \geq r\tau, \tau = 1, 2 \dots, t < s^\tau.$$

Passiamo al limite in queste formule per $q = \infty$: otteniamo le relazioni notevoli

$$(d^t X_k)_0 = (d^t x_k^{(r\tau)})_0 \quad \text{per} \quad s^{\tau-1} \leq t < s^\tau \quad , \quad (k = 1, 2 \ldots n \; ; \; \tau = 1, 2 \ldots)$$

che esprimono il teorema:

Se un algoritmo analitico ha convergenza dell'ordine r e di grado s, maggiore dell'unità, e le variabili iniziali $x_1, x_2 \ldots x_n$ sono serie di potenze di q variabili complesse $u_1 u_2 \ldots u_q$, che per $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$ definiscono un punto del divisore M cui l'algoritmo appartiene, il limite $(X_1 X_2 \ldots X_n)$ è una funzione analitica delle stesse variabili $u_1 u_2 \ldots u_q$, ed ogni $X_k (k = 1, 2 \ldots n)$ è nell'intorno del punto $(0, 0 \ldots 0)$ definito da una serie di potenze delle $u_1 u_2 \ldots u_q$, tale che tutti i termini della serie stessa di grado minore di s^τ sono identici ai termini di ugual grado della serie approssimata corrispondente $x_k^{(r\tau)}$, di indice uguale ad $r\tau$.

In particolare, per $r = 1$, basta iterare τ volte le serie iniziali, per avere i termini, di grado minore di s^τ, delle serie che definiscono il limite X.

Si supponga in particolare che per $u_1 = u_2 = \cdots = u_q = 0$ sia $(x_k)_0 = 0$ per $k = 1, 2 \ldots n$ (e quindi la varietà M passi per l'origine); per avere nelle serie X_k i termini di grado minore di s^τ, *basterà allora e nelle serie iniziali e nelle equazioni* (7) *che definiscono l'algoritmo conservare soltanto i termini che hanno ancora un grado minore di* s^τ, *iterare quindi* $r\tau$ *volte le funzioni ottenute*. Per le ipotesi fatte, questi soli termini hanno infatti influenza sui termini delle serie X_k di grado minore di s^τ.

NOTA AL N. 18.

La teoria delle forme Hermitiane (quadratiche) conduce ad un elegante criterio di convergenza, dovuto al KOENIGS in un caso particolare.

Siano le x, x' variabili complesse e nelle formule (31) del n. 8 cambiamo ogni elemento nel suo complesso coniugato (che indichiamo soprasegnandolo); avremo colle (31) le altre relazioni

$$(a) \qquad \bar{g}_\mu(\bar{x}^{(r)}) = \sum_1^p {}_\nu \, \bar{\gamma}_{\mu\nu}^{(r)}(\bar{x}) \cdot \bar{g}_\nu(\bar{x}), \qquad (\mu = 1, 2 \dots p).$$

Sia ora

$$(b) \qquad \mathrm{A}(\xi, \bar{\xi}) = \sum_1^p {}_{\mu\nu} \, a_{\mu\nu} \, \xi_\mu \, \bar{\xi}_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = \bar{a}_{\nu\mu})$$

una forma di HERMITE *definita positiva* nelle p coppie di variabili coniugate $\xi_\nu, \bar{\xi}_\nu$; e consideriamo la forma di HERMITE

$$(c) \qquad \mathrm{H}_x^{(r)}(\xi, \bar{\xi}) = \sum_1^p {}_{\mu\nu} \{ b_{\mu\nu}^{(r)}(x, \bar{x}) - a_{\mu\nu} \} \, \xi_\mu \, \bar{\xi}_\nu = \sum_1^p {}_{\mu\nu} \, h_{\mu\nu}^{(r)} \, \xi_\mu \, \bar{\xi}_\nu$$

dove abbiamo posto

$$(d) \qquad h_{\mu\nu}^{(r)} = b_{\mu\nu}^{(r)}(x, \bar{x}) - a_{\mu\nu} \quad , \quad b_{\mu\nu}^{(r)} = \sum_1^p {}_{\alpha\beta} \, a_{\alpha\beta} \, \gamma_{\alpha\mu}^{(r)}(x) \, \bar{\gamma}_{\beta\nu}^{(r)}(\bar{x}).$$

Nella forma $\mathrm{H}_x^{(r)}$ i coefficienti sono funzioni determinate del punto x di S_n: *se, quando il punto x è sulla varietà* $\mathrm{M}(g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0)$, *la forma* H_{M} *è definita negativa, l'algoritmo* K *ha convergenza* (*assoluta ed uniforme*) *dell'ordine* r *in un intorno convenientemente piccolo di* M *ed appartiene al divisore* M.

Per dimostrare questa asserzione, osserviamo che se la forma H_{M} è definita negativa in ogni punto di M, la massima radice dell'equazione in ω (a radici tutte reali)

$$|\{ b_{\mu\nu}^{(r)} \}_{\mathrm{M}} - a_{\mu\nu} \, \omega| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \dots p)$$

è minore dell' unità, e poichè è una funzione continua dei punti di M, il suo valore massimo su M è un numero ω_0 ancora minore dell' unità.

Consideriamo ora l'equazione in ω (ancora a radici tutte reali)

$$|b_{\mu\nu}^{(r)}(x, \bar{x}) - a_{\mu\nu} \, \omega| = 0, \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \dots p);$$

limitando le variabilità del punto x (in S_n o in V) ad un intorno convenientemente piccolo della varietà M, la sua massima radice non supererà $\omega_0 + \varepsilon$, dove ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Sia allora a un numero positivo determinato, ma del resto qualunque, compreso tra ω_0 ed 1; la forma di HERMITE

$$\mathrm{H}_x^{(r)}(\xi, \bar{\xi}; a) = \sum_1^p {}_{\mu\nu} \{ b_{\mu\nu}^{(r)}(x, \bar{x}) - a \cdot a_{\mu\nu} \} \, \xi_\mu \, \bar{\xi}_\nu$$

sarà ancora definita negativa, finchè il punto x rimane in un conveniente intorno C_a della varietà M. Sia x un punto di questo intorno e nella $H_x^{(r)}(\xi, \bar{\xi}; a)$ poniamo $\xi_\mu = g_\mu(x)$, $\bar{\xi}_\mu = \bar{g}_\mu(\bar{x})$; dalle ($b$) e ($d$) otteniamo la disuguaglianza

$$A(g^{(r)}, \bar{g}^{(r)}) < a \,.\, A(g, \bar{g});$$

ed in modo del tutto analogo, quando anche il punto $x^{(\sigma)}$ $(\sigma = 0, 1 \ldots r-1)$ è compreso nello stesso intorno di M, si ha

$$(e) \qquad A(g^{(r+\sigma)}, \bar{g}^{(r+\sigma)}) < a \,.\, A(g^{(\sigma)}, \bar{g}^{(\sigma)}).$$

Consideriamo ora l'equazione

$$A(g, \bar{g}) = u,$$

dove u è un numero reale e positivo. Per $u = 0$, a questa equazione, poichè la forma A è definita, soddisfano tutti e soli i punti della varietà M; quando u varia, crescendo, dallo zero all' infinito positivo, l'equazione stessa definisce una famiglia di ipersuperficie S_n, due qualunque delle quali non hanno punti a comune e contengono tutte nel loro *interno* la varietà M come nucleo. Di più, prendendo u convenientemente piccolo, i punti interni e sul contorno dell' ipersuperficie (u) cadono in un intorno di M, piccolo a piacere; per essere infatti la forma A definita, il valore di $A(g^{(\rho)}, \bar{g}^{(\rho)})$ dà un limite superiore del modulo di ogni $g_\mu^{(\rho)}$; si ha cioè una disuguaglianza della forma

$$(f) \qquad |g_\mu^{(\varphi)}| < K A(g^{(\rho)}, \bar{g}^{(\varphi)}),$$

dove K è un numero positivo finito, *che dipende soltanto dai coefficienti della forma* A.

Consideriamo allora il campo C_a (con $\omega_0 < a < 1$), di cui sopra abbiamo detto, e prendiamo $u = u_0$ così piccolo, che i punti x definiti dalla disuguaglianza

$$A(g, \bar{g}) \leq u_0,$$

ed insieme con x, anche i punti $x^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2 \ldots, r-1)$ dedotti dal punto x mediante l'algoritmo, cadano nell'intorno C_a (come è effettivamente possibile, per la continuità delle g); poniamo insieme, per qualunque ρ, $A^{(\rho)} = A(g^{(\rho)}, \bar{g}^{(\rho)})$.

Dalla (e), abbiamo allora, che anche i punti $x^{(r+\sigma)}$ cadranno nell'intorno C_a ed in generale avremo, per qualunque ρ

$$A^{(r\rho+\sigma)} < a \,.\, A^{\{r(\rho-1)+\sigma\}}$$

e quindi anche

$$A^{(r\rho+\sigma)} < a^\rho \,.\, A^{(\sigma)};$$

perciò ogni serie

$$\sum_0^\infty {}_\rho \, A^{(r\rho+\sigma)}$$

converge uniformemente nel campo C_a, donde per la (f) si trae la convergenza assoluta ed uniforme in C_a delle serie

$$\sum_0^\infty {}_\rho \, g_\mu^{(r\rho+\sigma)}$$

e quindi anche delle (23) e (14). L'algoritmo dato converge dunque (assolutamente ed uniformemente) ad un punto della varietà M, il che dimostra il teorema enunciato.

Nel caso reale e per $p = n$, il teorema stesso è stato enunciato dal Koenigs [1].

Non è facile confrontare, in generale, il criterio di convergenza dato dal teorema precedente, coi criterî assegnato ai nn. 5 e segg.; osserveremo soltanto, che quando l'algoritmo dato ha (secondo le nostre denominazioni) convergenza di ordine r e di grado superiore al primo, la forma $H_x^{(r)}$ è identica, sulla varietà M, alla forma $-A$ e quindi il criterio di Koenigs è evidentemente soddisfatto; se inversamente sulla varietà M si ha $H_x^{(r)} = -A$, per essere la forma A definita, ne segue che l'algoritmo K ha convergenza di ordine e grado superiore al primo. Si è così condotti ancora alle p^2 condizioni del n. 13, b) che caratterizzano la convergenza di grado superiore al primo.

[1] Koenigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (loc. cit., pag. 357).

INDICE BIBLIOGRAFICO

1711. J. Newton, *Opuscula Mathematica*: Opusculum I. *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, 1711. — *Exempla per resolutionem aequationum*, pp. 10-13. — Opusculum II. *Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum eiusdem applicatione ad curvarum geometriam*, 1737. — *De reductione affectarum aequationum*, pp. 37-53. — Opusculum X. *Exemplum IX*, pp. 311-314. (Lausannae et Genevae, 1744).

1777. Condorcet, *Sur quelques séries infinies dont la somme peut être exprimée par des fonctions analytiques d'une forme particulière* (Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro anno 1777. Pars prior, pag. 34).

» Eulero, *De formulis exponentialibus replicatis* (ibidem, pag. 38).

1785. Lagrange, *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral...* (Oeuvres de Lagrange, tomo 2°, pp. 253-312).

1794-1809. Gauss, *Nachlass über das arithmetisch-geometrisches Mittel* (Verke, Bd. III. S. 360-402).

1814. W. Herschell, *Considerations of various points of Analysis* (Phylosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. CIV, 1814).

1815. C. Babbage, *An essay towards the calculus of functions* (ibidem, vol. CV, pag. 389; vol. CVI, pag. 179).

1818. Fourier, *Questions d'analyse algébrique* (Oeuvres, tomo 2°, pag. 243).

1827. Hill, *Casum irreducibilem solvendi conatus* (Giornale di Crelle, vol. 2°, pag. 304).

1830. Fourier, *Analyse des équations déterminées* (Paris, Didot, 1831, cap. II, pag. 157).

» Galois, *Note sur la résolution des équations numériques* (Oeuvres math. Gauthier-Villars, Paris, 1897, pag. 13).

1833. Hill, *Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter trascendentium* (Giornale di Crelle, vol. 11°, pp. 93-97).

» Hill, *De radice cubica celeriter extrahenda* (ibidem, pp. 262-263).

1860. Hoppe, *Viederholung, Interpolation und Inversion einer Function unter gemeinschaftlicher Form* (Schlömich Zeitschrift für die Math. und Physik, Bd. V, pag. 136).

1861. Borchardt, *Ueber das arithmetisch-geometrisches Mittel* (Giornale di Crelle, vol. 58°, pag. 127).

1862. Sancery, *De la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines des équations* (Nouvelles Annales de Math. (2), tomo 1°, pp. 305 e 384).

1869. Schroeder, *Ueber unendlich viele Algorithmen sur Auflösung der Gleichungen* (Math. Annalen, Bd. II, pag. 317).

1870. Schroeder, *Ueber iterirte Functionen* (ibidem, Bd. III. pag. 296).

1871. Seidel, *Ueber eine Darstellung des Kreisbogens, des Logarithmus und des elliptischen Integrales erster Art durch unendliche Producte* (Giornale di Crelle, vol. 73°, pag. 272).

1874. Seidel, *Ueber die Grenzwerthe einer unendliches Potenzausdruckes* $x^{x^{x\cdots}}$ (Abhandl. der Math. Phys. Klasse der K. Bay. Ak. der Wiss. zu München, S. 1).

1875. Lissenov, * *Saggio di una esposizione sistematica del calcolo funzionale su una variabile indipendente* (in russo). (Raccolta Matematica di Mosca, tomo VII, pag. 80, 1876). A. 18.

1876. Lissenov, * *Sugli indici funzionali* (ibidem, tomo VIII, pag. 277, 1876). A. 18.

1877. Borchardt, *Ueber das arithmetisch-geometrisches Mittel von vier Elementen* (Abh. der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1877).

1878. Schering, *Zur Theorie des Borchardt'schen arithmetisch-geometrisches Mittels aus vier Elementen* (Giornale di Crelle, vol. 85°, pag. 115).

1880. Laguerre, *Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles* (Oeuvres, tomo I, pag. 87, Paris, Gauthier Villars, 1898).

» Hettner, *Zur Theorie des arithmetisch-geometrisches Mittel aus vier Elemeten* (Giornale di Crelle, vol. 89°, pag. 221).

» Stieltjes, *Notiz über eine elementaren Algorithmus* (ibd., pag. 343).

1881. Borchardt, *Sur deux algorithmes analogues a celui de la moyenne arithmetico-géométrique de deux éléments* (In memoriam Dominici Chelini ed. Cremona et Beltrami, 1881, pag. 206; Ges. Werke di Borchardt, pag. 455).

» Hoffmann, * *Ueber die Auflösung des trinomischen Gleichungen durch Kettenbruchähnliche Algorithmen* (Archiv für Math. und Physik, 1881, pag. 33). B. 23.

1882. Korkine, *Sur un problème d'interpolation* (Bullettin des Sciences Math. (2), VI, 1882, pag. 228).

» Stieltjes, * *Sur une algorithme pour la moyenne géométrique* (Nieuw Archief vor Viskunde, nitgegeven door het Wisk. Genootschap, tomo IX, 1882, pag. 198). F.

1883. Koenigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (Bull. des Sciences Math. (2), VII, 1883, pag. 340).

1884. Koenigs, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale Sup. (3), I, 1884. Supplément).

» Farkas, *Sur les fonctions itératives* (Journal de Liouville, tomo X, 1884, p. 101).

1885. Koenigs, *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'École Normale Sup. (3), II, 1885, pag. 385).

1886. Isenkrahe, *Ueber die Inversion des vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für ihre reellen Moduln* (Schlömich Zeitschrift, XXXI, pp. 34, 178, 241).

1887. H. Schapira, *Ueber ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen* (Verhandlungen des Natur-historisches-medicinischen Vereins zu Heidelberg, Neue Folge, IV Bd. I Heft).

» H. Schapira, *Bemerkungen zu des Grenzfunction algebraischer Iterationen* (Schlömich Zeitschrift, XXXII, pag. 310).

» E. Netto, *Ueber ein Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen* (Math. Annalen, Bd. 29, pag. 141).

1888. Isenkrahe, *Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und trascendenter Gleichungen* (Math. Annalen, Bd. 31, pag. 309).

» Th. Lohnstein, *Zur Theorie des arithmetisch-geometrisches Mittels* (Schlömich Zeitschrift, XXXIII, pp. 129, 316).

1889. Meyer, *Zur Auflösung der Gleichungen* (Math. Annalen, Bd. 33, pag. 511).

» Schlesinger, *Zur Theorie des Fuchsschen Functionen* (Giornale di Crelle, vol. 105°, pag. 181).

» Mertens, *Ein Beweis des Fundamentalsatz der Algebra* (Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. zu Vien. Math. Phys. Klasse, XCVII Bd. pag. 1505, 1889 e CI, pag. 405, 1892).

1890. Fouret, *Sur la méthode d'approximation de Newton* (Nouv. Annales de Math. (3), Anno 1890, pag. 567).

1891. Weierstrass, *Neuer Beweis des Fundamentalsatz der Algebra* (Werke, Bd. III, pag. 251).

1892-93. Schapira, *Die Iteration als Fundamentalprocess Mathematischer Operationen* (Jahresbericht des D. Math. Vereinigung, III Band., 1892-93, pag. 88).

1894. Heymann, *Ueber die Auflösung der Gleichungen fünftem Grade* (Schlömich Zeitschrift, XXXIX, 1894, pp. 162, 195, 257, 321).

» Heymann. *Theorie der An- und Umlaufe und Auflösung der Gleichungen von vierten, fünften, und sexten Grade mittelst goniometrischer und hyperbolischer Functionen* (Giornale di Crelle, vol. 113°, pag. 266).

» Grevy, *Etude sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecole Normale Sup., 1894).

1895. N. W. Bugaiew, *Sur le théorème de Taylor transformé* (C. R. de l'Académie des Sciences, tomo 121°, pag. 1127).

» A. Tauber, * *Ueber die Newton'sche Näherungsmethode* (Monatsheft für die Math. und Physik, 5 Bd. VI, pag. 291). F.

1895. Lemeray, *Un théorème sur les fonctions itératives* (Bull. de la Société Math. de France, vol. XXIII).

1896. Netto, *Vorlesungen über Algebra* (Teubner, Leipzig, Bd. I, pag. 300).

» Grevy, *Étude sur les équations fonctionnelles* (Annales de l'Ecol Normale Sup., 1896).

» Lemeray, *Sur les racines de l'équation $x = a^x$* (Nouv. Annales, 1896, pag. 584).

» N. W. Bugaiew, * *Il metodo delle approssimazioni successive e la sua applicazione alla risoluzione numerica delle equazioni algebriche, alla deduzione dei teoremi di Taylor e di Lagrange, allo sviluppo in serie delle funzioni, all'integrazione delle equazioni differenziali* (in russo). (Raccolta matematica di Mosca, vol. 18°, pp. 289, 586; vol. 19°, pag. 1). F.

» N. W. Bugaiew, *Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré* (C. R. de l'Académie des Sciences, vol. 122°, pag. 369).

1897. N. W. Bugaiew, * *Il metodo delle approssimazioni successive. Metodi ausiliari e complementari del calcolo approssimato* (Raccolta matematica di Mosca, vol. 19°, pag. 421). F.

» Isenkrahe, *Das Verfahren des Functionswiederholung, seine geometrische Veranschauligung und algebraische Anwendung* (Teubner, Leipzig, 1897).

» Böttcher, * *Sulla teoria dell'iterazione* (in polacco) (Pamietnik Towarzystwa Politechnicznego we Lwowie. Lwow, 1897. B. 2.

» Lemeray, * *Sur la convergence des substitutions uniformes. — Sur les racines de l'équation $x = a^x$. — Racines des quelques équations transcendents* (Nouvelles Annales, 1897). A. 20.

» Lemeray, *Sur les dérivées des fonctions itératives au point limite. — Dérivées des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération* (Bull. de la Société Math. de France, tomo XXV).

» Leau, *Étude sur les équations fonctionnelles* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tomo XI, 1897).

» Fubini, *Nuovo metodo per lo studio ed il calcolo delle funzioni trascendenti elementari* (Periodico di matematica di G. Lazzeri. Livorno, vol. 12°, pag. 169).

1898. Schlesinger, *Ueber die Gaussische Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie des elliptischen Modulfunctionen* (Monatsberichte der K. Ak. des Wiss. zu Berlin, 1898, pag. 346).

» Böttcher, *Beiträge zur Theorie der Iterationsrechnung* (Inaug. Diss. Oswald Schmidt, Leipzig, 1898).

» Lemeray, * *Le quatrième algorithme naturel* (Proc. of the Edinburgh Math. Society, vol. XVI, 1897-98). F.

» Lemeray, *Sur la convergence des substitutions uniformes* (Nouvelles Annales (3), t. XVII, 1898).

» Lemeray, *Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération* (Bull. de la Société Math. de France, XXVI, pag. 10).

» Leau. *Sur un problème d'itération* (ibidem. pag. 5).

» Fubini, *Di una nuova successione di numeri* (Periodico di Matematica, vol. 14°, pag. 147).

» Sommerfeld, *Ueber die numerische Auflösung trascendenter Gleichungen durch successive Approximationen* (Nachrichten von den K. Gesellschaft des Wiss. zu Gottingen. Math. Phys. Classe, 1898, pag. 360).

» Lemeray, *Sur le calcul des racines des équations par approximations successives* (Nouvelles Anaales (3), tomo XVII, pag. 534).

1899. Böttcher, *Il problema del calcolo iterativo* (in polacco) (Praze matematyczno fizyene, tomo X, pag. 65; XII, pag. 95; XIII, pag. 353).

1900. Aristof, ** *Sull'iterazione delle funzioni* (in russo). (Bulletin de la Société Physiko-Mathématique de Kasan, serie 2ª, tomo X, pp. 14 e 86).

1901. Heymann, *Ueber Wurzelgruppen welche durch Umlaufe ausgeschnitten werden* (Zeitschrift für die Math. und Physik, Bd. XLVI, pag. 265, 1901).

» D'Ovidio, *Su alcune successioni di medie aritmetiche, geometriche ed armoniche* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 26°, pag. 685).

1901. PELLET, *Calcul des racines réelles d'une équation. — Sur la méthode de Newton. — Sur l'approximation des racines réelles des équations* (CR. de l'Académie de Sciences t. 133°, pp. 917 e 1187 — Bulletin de la Société Math. de France, tomo 29°, pp. 139, 228, 320 e tomo 30°, fasc. 3°).

1902. NICCOLETTI, *Su un esempio di limite* (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. 40).

» LONDON, *Ueber eine besondere Art konvergenter Puncktfolgen* (Jahresb. des D. Math. Vereinigung, XI Bd., pag. 274).

1902-1904. BÖTTCHER, ** *Le principali leggi di convergenza delle iterazioni e le loro applicazioni all'analisi* (in russo). (Bulletin de la Société Physiko-Math. de Kasan, tomo XIII, pag. 1; tomo XIV, pag. 155).

1904. BÖTTCHER, *Sull'iterazione di una funzione lineare* (Viadomosci Matematyczne, tomo VIII, pag. 291 e IX, pag. 97).

» JACOB, *On Sequences which determine the n-th Rooth of a Rational Number* (Proc. of the London Mathematical Society, gennaio 1904, pag. 166).

(*) Con un asterisco ho indicato i titoli dei lavori che non mi è riuscito di vedere, ma dei quali ho trovato la citazione nel « Jahrbuch über die Fortschritte der Math. und Physik », oppure nei due lavori di ARISTOFF e di BÖTTCHER, contrassegnati con due asterischi. Le lettere F, A, B, indicano appunto le fonti delle mie citazioni in questi casi: accanto alla lettera A e B si ha la pagina dove la citazione è fatta.

Colgo l'occasione per esprimere i sensi della mia gratitudine al mio chiarissimo collega professore G. A. Maggi, alla cui cortesia devo, se ho potuto aver conoscenza dei lavori russi e polacchi indicati.

INDICE DELLA MEMORIA

Di alcune non recenti esperienze, considerate dal punto di vista della teoria elettronica.

Memoria del Socio AUGUSTO RIGHI

§ 1.

Introduzione.

La maggior parte di quelle, fra le mie ricerche sperimentali pubblicate dal 1872 in poi, che riguardano fenomeni elettrici, furono a me ispirate da certe idee teoriche sulla natura di tali fenomeni, molto simili a quelle, oggi accettate dalla maggior parte dei fisici, che condussero alla teoria della ionizzazione e degli elettroni.

A quell'epoca omai lontana l'ipotesi della esistenza nei gas di ioni positivi e negativi non era stata ancora formulata; e quando poco dopo lo fu, non incontrò il generale assentimento, in causa forse del non sapersi allora soddisfacentemente spiegare l'esistenza di ioni delle due specie anche in un gas non composto. Quando però assai più tardi si riconobbe la possibile esistenza di elettroni negativi liberi, e si giunse a comprendere come per il separarsi di alcuni di essi dagli atomi neutri, e pel successivo riunirsi ad altri atomi, potevano essere generati i ioni positivi e negativi, la teoria della conduzione elettrolitica dei gas, non solo apparve accettabile, ma in brevissimo tempo acquistò una immensa portata. Ora l'ipotesi, che mi guidò sempre in passato, differisce da quella che forma la base della teoria generalmente adottata in ciò, che mentre i fenomeni venivano da me spiegati col movimento di molecole gassose, le quali eransi elettrizzate, sia pel loro contatto con corpi carichi, sia in seguito al loro urto con altre molecole già cariche di elettricità, oggi invece si considerano i fenomeni stessi come dovuti al moto dei ioni, generati dalle note cause ionizzatrici, fra le quali l'urto di quelli già esistenti contro molecole neutre, le quali infatti, se l'urto è abbastanza energico, si scindono esse pure in ioni.

Le brillanti esperienze del Crookes sulla così detta materia radiante, che vennero per qualche tempo spiegate da molti fisici considerando i raggi catodici come manifestazione di speciali ondulazioni dell'etere, da pochissimi furono interpretate conformemente al concetto di Crookes; naturalmente mi trovai fra questi pochi, perchè le idee del fisico inglese erano identiche alle mie, che anzi in gran parte si erano in me formate a guisa di estensione e generalizzazione di quelle.

Oggi però le prove accumulate in favore della ionizzazione sono tali e tante, che s'impongono alla ragione, mentre d'altra parte non è possibile negare, che i raggi catodici constino di particelle negative (elettroni) di massa di gran lunga minore di quelle degli atomi, e dotate di moto velocissimo. Con ciò le antiche esperienze non perdono

valore; molte di esse anzi, esaminate alla luce della nuova teoria, valgono a illustrarla in modo speciale. Perciò ho giudicato possa avere qualche interesse il richiamare alcune di quelle mie esperienze, e renderne conto a norma della teoria degli elettroni; il che richiederà semplicemente, almeno nella maggior parte dei casi, ch'io faccia una specie di traduzione, e cioè mi limiti quasi unicamente a sostituire certi vocabili, come: *molecole gassose*, oppure *particelle elettrizzate*, ecc., con altri vocaboli, come *ioni positivi* o *negativi*, oppure *elettroni*, ecc.

Nel fare questo richiamo seguirò presso a poco l'ordine cronologico delle mie pubblicazioni, salvo quando l'attenermi a questo partito mi trarrebbe a inutili ripetizioni. Prima però credo necessaria una osservazione d'indole generale che, per quanto ovvia, non è stata fatta finora, ch' io sappia, da altri.

Il meccanismo della ionizzazione d'un gas si suol descrivere come segue. Un elettrone si separa da un atomo del gas, il qual atomo diviene in tal modo un ione positivo; l'elettrone separato o resta libero, oppure (particolarmente se il gas ha notevole pressione) si unisce ad un atomo neutro, trasformandolo così in ione negativo. Molto probabilmente anche il ione positivo s' ingrossa unendosi ad un atomo neutro, e così si spiega la minor mobilità che possiede in confronto del ione negativo; sembra poi che in ispeciali circostanze (p. es. ionizzazione prodotta nell'aria dal fosforo) i ioni risultino costituiti da aggregati atomici anche più complessi. I ioni così formati saranno ioni monovalenti; a formarne dei bivalenti occorre far sì che in un atomo manchino o sieno in eccesso due elettroni, e così di seguito. Ora si sa che i gas composti si ionizzano essi pure, comportandosi in tutto come i gas semplici, e senza la minima manifestazione di scomposizione chimica. Bisogna dunque ritenere che la ionizzazione, almeno pei gas composti, si operi sulle molecole e non sugli atomi. Per esempio, se si tratta di anidride carbonica, i ioni positivi saranno molecole da cui fu tolto un elettrone (o più) mentre i ioni negativi saranno molecole con un elettrone aggiunto (o più). Può darsi che si abbiano ioni di tal genere anche nel caso di gas semplici non monoatomici.

In base a questa osservazione si scorge che in ultima analisi la mia antica ipotesi differisce da quella ora adottata meno di quanto a prima giunta poteva sembrare. La differenza veramente importante è quella relativa all'origine della carica attribuita alle molecole elettrizzate o ai ioni; ma su questo punto non si può rimanere dubbiosi: la teoria elettronica, così generale e comprensiva, merita interamente la preferenza.

§ 2.

Influenza della densità elettrica degli elettrodi sulla scarica (1).

Dopo aver studiato, per mezzo d'uno speciale elettrometro, che permetteva l'esatta misura della differenza di potenziale fra gli elettrodi all'istante della scarica, l' influenza del segno della carica di ciascuno allorchè hanno differente curvatura (fenomeno questo assai più complesso di quanto da molti si crede ancora, come risulta dai casi

(1) *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche*, Mem. della R. Acc. di Bologna, 11 maggio 1876. N. Cimento, serie 2a, t. XVI.

d'inversione da me riscontrati), ebbi occasione di stabilire nuovi fatti e metterne fuori di dubbio altri già conosciuti, dimostranti fra altro l'influenza indicata a titolo del presente paragrafo.

Trovai infatti, che la differenza di potenziale necessaria alla scarica (o come si suol dire brevemente: il potenziale di scarica) dipende a parità di altre circostanze dalla densità dell'elettricità sulla superficie degli elettrodi, nel senso che, se a parità delle altre circostanze si accresce tale densità, il potenziale di scarica diminuisce. Per esempio il detto potenziale è, a parità di distanza esplosiva, tanto più piccolo, quanto minore è il diametro delle sfere funzionanti da elettrodi.

Constatai altresì che il potenziale di scarica diminuisce, se si mette in comunicazione col suolo uno dei due elettrodi. Antecedentemente Wiedemann e Rühlmann, certamente per un difetto di metodo, avevano asserito il contrario. Questo fenomeno si collega col precedente, in quanto che il mettere a terra uno degli elettrodi ha per

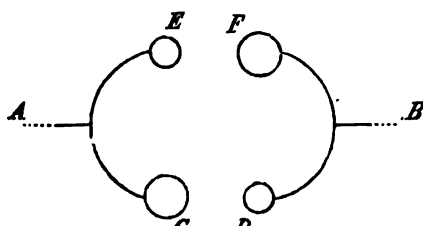



Fig. 1.

risultato l'accrescersi della densità, elettrica sull'altro. Infatti questa densità che dipende anche dalla differenza fra il potenziale del conduttore considerato e quello dei corpi circostanti (zero), diviene naturalmente in tal modo assai maggiore di prima.

Esperienze concludenti possono farsi anche senza misure, coll'antichissimo metodo della biforcazione (fig. 1). Ognuna delle armature A e B del condensatore comunica con due elettrodi, in modo che la scintilla può formarsi o in CD o in EF. Se le due distanze esplosive sono all'incirca eguali, e se D ed E sono piccole palline e C ed F grosse sfere, la scarica ha luogo in EF, se si mette in comunicazione col suolo l'armatura B, ed in CD, se si mette A in comunicazione colla terra. La scarica si forma dunque là ove è isolata la sfera di diametro minore, sulla quale è più pronunciato l'aumento di densità elettrica verificantesi col mettere l'opposto elettrodo in comunicazione col suolo.

Tutte queste esperienze, e molte altre ancora, mi vennero suggerite dal concetto, che la scintilla altro non sia che la fase finale di un processo, durante il quale le particelle elettrizzate (oggi diremo i ioni) acquistano moti di più in più rapidi da un elettrodo all'altro per azione della forza elettrica. L'urto dei ioni esistenti contro le molecole gasose produce nuovi ioni, cosicchè il loro numero aumenta con crescente rapidità, finchè si giunga alla fase finale, in cui la violenza degli urti è tale da dar luogo allo svolgimento della luce. Sembra naturale quindi l'ammettere, che una maggior densità elettrica sugli elettrodi, e quindi una maggiore intensità in una parte del campo elettrico, debba rendere più rapido ed efficace il processo preparatorio della scintilla, con che il fenomeno rimane spiegato.

Effetto simile, quantunque meno pronunciato, osservai con quattro sfere C, D, E, F di uguali diametri, due delle quali D, E formate di un certo metallo, e le altre due C, F di metallo differente. L'influenza della natura degli elettrodi si manifesta in ogni caso ([1]), anche nel prodursi di un effetto di valvola elettrica con elettrodi d'egual grandezza ma di diversa natura. La cosa nulla ha d'inverosimile, giacchè è sommamente probabile che gli elettroni, che i ioni positivi staccano dal catodo in seguito al loro violento urto su di esso, escano in numero diverso e con diverse velocità dai differenti metalli.

§ 3.

Scariche luminose nei liquidi ([2]).

Includendo nel circuito di scarica di un condensatore dell'acqua pura o con qualche sale in soluzione, oppure dell'alcool, dell'etere, ecc. mediante elettrodi metallici che presentino al liquido una superficie di contatto assai limitata, ed inoltre riservando un intervallo per scintilla nell'aria in un punto qualunque della parte metallica del circuito stesso, si ottengono sugli elettrodi ad ogni scarica certe belle apparenze luminose le quali, benchè analoghe a quelle che si osservano nell'aria, presentano uno speciale interesse per la varietà grandissima delle loro forme, dei colori ecc.

Se la distanza che separa i due elettrodi è grande, ognuno di essi produce un fenomeno luminoso distinto. Quello sull'elettrodo positivo consta di rami serpeggianti, che richiamano l'aspetto del pennacchio luminoso d'una punta positiva nell'aria; quello dell'elettrodo negativo, formato da rami più sottili e brevi, ma più numerosi e brillanti, somiglia alla stelletta che si forma sulle punte negative. Se poi si avvicinano abbastanza l'uno all'altro i due elettrodi, oppure si aumenta la lunghezza della scintilla nell'aria (e quindi anche il potenziale di scarica) i due fenomeni luminosi si uniscono, e infine costituiscono una vera scintilla in seno al liquido.

Ha speciale interesse il seguente fenomeno. Due grandi masse liquide, in ciascuna delle quali è immerso uno degli elettrodi, comunicano fra loro mediante un breve e strettissimo canale. Al momento della scarica questo s'illumina, e tale luminosità si prolunga nelle due masse liquide, con diramazioni luminose; quelle rivolte verso l'elettrodo negativo hanno l'aspetto di quelle, che nel caso precedente si osservarono sull'elettrodo positivo, e viceversa. Il fenomeno è dunque in tutto simile ad uno generalmente conosciuto, che si produce quando un tubo ha gas rarefatto a una strozzatura ([3]).

([1]) Nel suo recente libro *Conduction of Electricity through Gases*, il sig. J. J. Thomson, (pag. 353) cadde in equivoco asserendo avere io trovato sempre lo stesso potenziale di scarica con elettrodi di diversa natura.

([2]) *Ricerche sperimentali sulle scariche elettriche.* IIª Memoria. Mem. della R. Acc. di Bologna, 4 febbr. 1877. — N. Cimento, 3ª serie, t. I, pag. 234. — *Sulla fotografia delle scintille elettriche ed in particolare di quelle prodotte nell'acqua.* Rend. della R. Acc. dei Lincei (1885), pag. 459

([3]) Con forti correnti di pila furono da me osservati all'epoca citata (1877) fenomeni luminosi simili a quelli descritti (vedi la Memoria citata), e cioè quei medesimi fenomeni su cui è basato il moderno interruttore di Wehnelt (elettrodo positivo di piccola superficie) e quelli Simon, Caldwell, Turpain (masse liquide comunicanti per mezzo di un piccolo canale).

L'analogia fra queste scariche e quelle nei gas è così evidente, che si è costretti ad ammettere identico nei due casi il meccanismo che le produce. In appoggio di tale opinione sta il fatto dimostrato, dell'aumento di conducibilità elettrica presentato da certi liquidi allorchè sono attraversati dai raggi del radio ([1]). Si dovrà dunque ammettere una ionizzazione per urto anche per i liquidi, ovunque entro di essi il campo elettrico abbia sufficiente intensità, d'onde il crearsi di più in più accelerato di nuovi ioni, in aggiunta a quelli preesistenti nell'elettrolita. E siccome non si tratta più qui della dissociazione elettrolitica spontanea, nella quale il segno della carica d'un ione dipende dalla sua natura chimica (p. es. nel caso dell'acqua il ione idrogeno non è mai negativo), ma d'un fenomeno che può dirsi d'indole meccanica, potrà accadere che, a seconda delle circostanze in cui ha luogo ogni singolo urto, un ione d'una data sostanza abbia indifferentemente l'uno o l'altro segno (p. es. nel caso dell'acqua si formino anche ioni d'idrogeno negativi). Donde la naturale conseguenza del raccogliersi su ogni elettrodo un miscuglio degli elementi di cui il liquido è composto, per esempio un miscuglio d'ossigeno e idrogeno nel caso delle scariche nell'acqua, come coll'esperienza fu da me constatato.

§ 4.

Traiettorie percorse dai ioni.

Convinto, come fui sempre, che i raggi catodici constassero di particelle elettriz- in moto, era naturale che considerassi come effetto di una speciale convezione elettrica ogni fenomeno di scarica. Così, mi spiegavo la scarica da una punta elettrizzata come dovuta ad innumerevoli particelle, elettrizzate dalla punta e da essa violentemente respinte; ciò che corrisponde alla odierna teoria, secondo la quale, avvenendo la ionizzazione per urto in prossimità della punta, tutto lo spazio compreso fra la regione di ionizzazione e la lastra piana funzionante da secondo elettrodo è percorso unicamente da ioni che si dirigono verso di questa, e di egual segno di quello della carica data alla punta.

Era dunque naturale che, conosciuto appena il fenomeno dell'ombra elettrica, osservato da Hittorf e Goldstein e brillantemente dimostrato dal Crookes, intuissi il modo di ottenere un analogo fenomeno nell'aria all'ordinaria pressione per opera di una punta ([2]). Sino dai primi tentativi il risultato previsto si produsse, ed anzi potei ottenerlo in più maniere, di cui ecco le due principali.

a) La punta metallica è verticale e rivolta all'ingiù verso una lastra metallica orizzontale, che fa da secondo elettrodo, mentre fra l'una e l'altra è posta una crocetta di ebanite. Posto sulla lastra un cartoncino liscio su cui fu sparsa una polvere conduttrice, questa, non appena si stabilisce una differenza di potenziale fra i due elettrodi, è scacciata dai luoghi, che la crocetta ripara contro il bombardamento dei ioni partenti dalla punta, mentre il resto della polvere non fa che saltellare leggermente, venendo incessantemente scaricata dai ioni medesimi.

([1]) Rend. della R. Accad. dei Lincei, t. XIV, pag. 207 (1905).

([2]) *Le ombre elettriche*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna, 12 maggio 1881 11 aprile 1882. — Il N. Cimento, 3ª serie, t. II, pag. 123.

b) Si colloca sulla lastra metallica una lastra di ebanite, avente un'armatura sulla faccia inferiore, e, dopo aver fatto scoccare una scintilla fra una sfera comunicante colla punta e l'armatura interna d'un piccolo condensatore carico (di cui l'armatura esterna comunica colla lastra metallica e col suolo) si ritira l'ebanite e si proietta su di essa il noto miscuglio di solfo e minio in polvere.

Ombre elettriche in tutto simili ottenni più tardi per opera, non più di ioni respinti da una punta carica, ma di quelli negativi respinti da un corpo colpito da radiazioni ultraviolette [1], oppure da un filo metallico arroventato [2], o infine per opera dei ioni generati in un gas da una fiamma [3], o dai raggi di Röntgen [4] o da quelli delle sostanze radioattive [5].

Mentre gli elettroni, che emessi dalla superficie del catodo di un tubo di Crookes costituiscono i raggi catodici, si muovono secondo traiettorie sensibilmente rettilinee, altrettanto non può generalmente avvenire per i ioni che percorrono il campo elettrico nell'aria alla pressione ordinaria. Le traiettorie dei ioni restano certamente rettilinee, se gli elettrodi sono grandi lastre parallele; ma in generale la direzione del loro movimento muterà da un istante all'altro per effetto della forza elettrica, che su di essi agisce, e la cui direzione varia da punto a punto. Oltre a ciò si deve ammettere, che ad ogni urto contro altri ioni o contro molecole del gas avvenga una brusca variazione nella direzione e nella grandezza della velocità dei ioni, cosicchè le loro traiettorie avranno certamente la forma di linee spezzate. I singoli tratti continui saranno brevissimi (frazioni piccole di millimetro) nel caso d'un gas alla pressione ordinaria dell'atmosfera; e siccome nel maggior numero dei casi ogni ione perde nell'urto buona parte della velocità, che a partire dall'urto precedente il campo elettrico gli aveva fatto acquistare, così dopo l'urto esso si avvierà, se non esattamente nella direzione della forza elettrica, almeno in una direzione assai poco diversa, di modo che nel suo complesso la linea spezzata percorsa dal ione differirà pochissimo da una linea di forza.

Dimostrai appunto che in tutti i casi di ombra elettrica alla pressione ordinaria, le traiettorie dei ioni coincidono praticamente colle linee di forza del campo elettrico in cui si muovono, ricorrendo a sistemi cilindrici, cioè al caso in cui il campo elettrico è prodotto da lunghi cilindri paralleli o da un cilindro ed un piano, perchè le linee di forza sono ben conosciute (archi di cerchio).

Le esperienze, eseguite successivamente con diversi metodi, confermarono in modo assai preciso quella previsione teorica.

Restavano ad esaminare i casi intermedi fra quello del tubo di Crookes e quello delle ombre alla pressione ordinaria. La lacuna venne colmata mediante esperienze con

(1) *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*, Mem. della R. Acc. di Bologne, 11 novembre 1888; Atti del R. Ist. Veneto, t. VII (1889). N. Cimento, 3ª serie, t. 24, pag. 256, t. 25, pag. 193.

(2) *Sulla convezione elettrica*, Rend. della R. Acc. dei Lincei. 1889.

(3) Ibid.

(4) *Sulla propagazione dell'elettricità nei gas attraversati dai raggi di Röntgen*, Mem. della R. Acc. di Bologna, 31 maggio 1896.

(5) *Esperienze dimostrative sulla radioattività*, Rend. della R. Acc. di Bologna, 29 maggio 1904.

elettrodi formanti ancora un sistema cilindrico, ma contenuti in un recipiente chiuso, entro il quale si poteva rarefare l'aria. La fig. 2 mostra schematicamente l'apparecchio adoperato. Z è un catodo cilindrico di zinco interamente verniciato salvo che lungo una generatrice a, L è l'anodo piano, presso la superficie del quale, e da esso isolati, sono tesi molti fili di platino $f_1, f_2 \ldots\ldots$, che possono successivamente mettersi in comunicazione con un elettrometro, e Q è un disco di quarzo che chiude l'apparecchio, e permette di far giungere su a un fascio di raggi ultravioletti. Per mezzo dell'elettrometro si riconosce ove colpiscono i ioni emessi dalla generatrice a, alla quale si dà ogni voluta posizione mercè una debita rotazione del cilindro Z intorno al proprio asse. Si trovò così che, rarefacendo gradatamente l'aria, le traiettorie, le quali dapprima sono i noti archi di cerchio (per esempio $a\, f_3$), divengono sempre meno incurvate, e tendono a divenire rettilinee per le grandi rarefazioni (1).

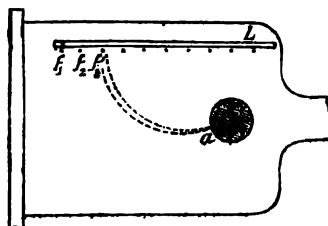



Fig. 2.

E così si può asserire, che lo studio della forma delle traiettorie percorse dai ioni nei gas era già compiuto assai prima che la teoria oggi generalmente accolta venisse ideata, od almeno proposta in maniera abbastanza chiara e completa.

§ 5.

Scintille in un campo elettrico trasversale.

Una serie di esperimenti da me eseguiti nel 1881 (2) valgono a confermare l'esistenza di quel movimento rapidamente accelerato di ioni, che, come si è detto nel paragrafo 2, precede e prepara la scintilla. In quelle esperienze i due elettrodi A, B (fig. 3) fra i quali scoccavano le scintille d'un condensatore, erano collocati fra due grandi dischi paralleli C, D, mantenuti oppostamente carichi permanentemente da una macchina elettrica, che di preferenza era affatto indipendente da quella che serviva alla carica del condensatore.

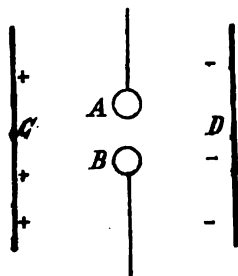



Fig. 3.

In tali condizioni le scintille assumono una forma diversa dalla rettilinea, divenendo spesso sensibilmente incurvate verso C o verso D. Questo cambiamento di forma suol essere accompagnato da uno spostamento sugli elettrodi A e B dei punti di partenza della scintilla. Se mediante l'introduzione d'una colonna di acqua nel circuito si rende la scarica non oscillante e di maggior durata, il fenomeno diviene molto più evidente. Ecco le considerazioni, quasi identiche a quelle che mi fecero prevedere il fenomeno, e che valgono oggi a spiegarlo.

(1) *Sulla convezione fotoelettrica*, ecc., Mem. R. Acc. di Bologna, 27 aprile 1890.
(2) *Spostamenti e deformazioni delle scintille* ecc., Mem. della R. Accademia di Bologna, 12 maggio 1881.

Il movimento dei ioni fra gli elettrodi, che precede la scintilla, non è generalmente simmetrico, e cioè i ioni d'una specie sogliono essere, almeno in una parte dello spazio, più abbondanti di quelli della specie opposta. Si sa, per esempio, che se l'elettrodo A è una punta e B una lastra piana, la ionizzazione per urto ha luogo nella vicinanza di A, e che in quasi tutto l'intervallo AB si muovono soltanto dei ioni di egual segno di A, e da A verso B, sensibilmente lungo le linee di forza. Una analoga dissimetria nel moto dei ioni esisterà, se semplicemente la densità elettrica su A è maggiore che su B, per esempio quando A è isolato e B comunica col suolo, oppure quando la curvatura di A è maggiore di quella di B. Orbene, in tutti questi casi, mentre il campo elettrico trasversale tende a far deviare in sensi opposti i ioni delle due specie, l'azione prodotta su quelli che partono da A sarà preponderante, e nel suo complesso il fenomeno di convezione preparatorio della scintilla subirà uno spostamento verso C o verso D, secondo che la carica di A è negativa o positiva. Si può esprimere tutto ciò anche dicendo, che le traiettorie dei ioni, le quali sono sensibilmente linee di forza, acquistano una nuova forma quando al campo dovuto agli elettrodi A e B si compone quello dovuto ai dischi C e D; la nuova forma è tale da render conto del fenomeno osservato. All'epoca di questa esperienza ammettevo, che l'effetto degli urti fra le particelle in moto fosse soltanto quello di svolgere calore e con ciò preparare il più agevole cammino alla scintilla. Tale sviluppo di calore indubbiamente esiste, e benchè si debba oggi ritenere che non abbia fondamentale importanza, esso non dovrà trascurarsi.

§ 6.

Fenomeni fotoelettrici (¹).

Certe esperienze del Lenard (²), spiegate colla emissione di raggi catodici per parte di metalli elettrizzati negativamente nel vuoto e colpiti da raggi ultravioletti, resero sommamente probabile, che anche nelle antecedenti mie numerosissime esperienze sui fenomeni fotoelettrici, i fenomeni dovessero spiegarsi nella stessa maniera, benchè in molte di quelle esperienze il corpo si trovasse, non già in un gas rarefatto, ma nell'aria alla pressione ordinaria. Soltanto dovrà supporsi che in questo caso gli elettroni non appena emessi dal corpo colpito dalle radiazioni si trasformino, almeno per la maggior parte, in ioni negativi, in seguito al loro congiungersi ad atomi neutri. Basterà dunque sostituire i vocaboli *ioni negativi* a quelli più generici da me adoperati e cioè *particelle elettrizzate* o simili, perchè quegli scritti non recenti esprimano correttamente i fatti in modo consentaneo alla nuova teoria. Senza insistere su questo punto farò notare però che, per quanto mi è noto, le prime misure di velocità dei ioni, o in genere delle particelle trasportanti le cariche elettriche, furono quelle da me eseguite nel corso di quelle ricerche (³). Le velocità (da 55 a 146 metri)

(¹) Mem. della R. Acc. di Bologna, 11 nov. 1888. — Atti del R. Ist. Veneto, t. VII (1889).

(²) Drude's Ann. t. II, pag. 359 (1900).

(³) *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*, II Mem., Atti del R. Ist. Veneto, t. VII (1889).

da me trovate allora sono molto grandi in confronto di quelle misurate più tardi, ma ciò è naturalissimo perchè si riferivano a campi elettrici di grande intensità. Quanto al metodo impiegato, esso consisteva nel fare agire sui ioni in moto una corrente d'aria trasversale di nota velocità, e nel misurare di quanto si spostava il punto di arrivo dei ioni; un tale metodo è dunque quel medesimo, che fu impiegato recentemente al medesimo scopo dal sig. ZELENY [1].

Credo possa presentare qualche interesse un breve richiamo relativo al caso in cui il corpo colpito dalle radiazioni è inizialmente allo stato neutro. Nel corso delle mie ricerche ebbi occasione di stabilire, che un corpo scarico (dielettrico o conduttore) si elettrizzava positivamente per effetto delle radiazioni. Il sig. HALLWACHS confermò questo fatto, che dapprima io avevo attribuito all'effetto Volta fra il corpo in esperienza ed i corpi circostanti.

In seguito a molte esperienze fui condotto alla seguente legge, pel caso in cui il corpo colpito dalle radiazioni sia circondato dall'aria alla pressione ordinaria: *cessa di aumentare la carica positiva del corpo, allorchè la densità elettrica nelle parti colpite dalle radiazioni arriva ad un determinato valore dipendente solo dalla natura del corpo stesso.* Ne risulta, per esempio, che se il corpo è una sfera, il potenziale positivo che esso raggiunge è proporzionale al suo raggio. Ecco come si potrà rendere conto di tutto ciò nella teoria odierna.

Sotto l'azione delle radiazioni che giungono sul corpo, escono dal medesimo degli elettroni con velocità verosimilmente grandissima, e così rimane al corpo stesso una carica positiva. Se il corpo fosse nel vuoto, quegli elettroni costituirebbero veri raggi catodici, i quali rapidamente trasporterebbero a grande distanza la carica negativa; ma nell'aria alla pressione atmosferica gli elettroni divengono tosto ioni negativi, e questi sono esposti a innumerevoli e frequenti collisioni colle molecole neutre, che hanno come conseguenza di diminuire la loro velocità, in modo che parte di essi, attratti dal corpo che si è intanto caricato positivamente, gli restituiscono la carica negativa.

Sarà raggiunto uno stato stazionario quando si avrà compensazione fra gli elettroni emessi e i ioni negativi che ricadono sul corpo. Questa serie di fenomeni, che accadono entro un sottilissimo strato di gas attiguo alla superficie del corpo, è dipendente solo dalla intensità della forza elettrica entro questo strato, e lo stato stazionario finale ha luogo, quando questa forza ha un valore determinato, probabilmente diverso da una sostanza ad un'altra, perchè verosimilmente diversa la velocità è la quantità degli elettroni emessi per secondo.

Siccome ad un determinato valore del campo elettrico presso la superficie del corpo corrisponde un determinato valore della densità superficiale della carica, così la precedente legge rimane spiegata.

Le esperienze che dimostrano questa legge possono variarsi assai; eccone una. Il conduttore colpito dalle radiazioni sia una lastra piana, parallela ad una reticella metallica comunicante col suolo. Allontanando l'un dall'altro i due conduttori, il potenziale positivo, che il primo acquista, cresce in proporzione (entro certi limiti) della

[1] Phil. Trans., t. 195, pag. 193 (1900).

sua distanza dalla reticella. Questo fenomeno non va confuso con quelli di cui si parlerà nel paragrafo 8.

Naturalmente la legge cade in difetto, se la reticella vien posta troppo vicina al corpo, in modo da trovarsi entro il sottile strato di cui si è parlato più sopra. Lo stesso accade con distanze non piccole, se l'aria viene rarefatta, giacchè colla rarefazione lo strato entro cui restano i ioni negativi aumenta di grossezza. Nell'uno e nell'altro caso molti ioni più non ricadono sul conduttore da cui partirono, essendo invece trattenuti dalla reticella, che essi possono allora facilmente raggiungere.

Ecco perchè il potenziale positivo del corpo colpito dalle radiazioni cresce al crescere della rarefazione.

Un fatto, da me annunciato sin dal 1890, trova pure la sua naturale spiegazione (1), quello cioè che un campo magnetico rende meno marcato, o anche fa affatto sparire, l'aumento di effetto che si ottiene mediante la rarefazione. Precisamente come in una classica esperienza fatta assai più tardi dal Thomson, i ioni negativi o gli elettroni per effetto del campo magnetico descrivono curve, che li riconducono al corpo da cui partirono poco prima, cosicchè il campo magnetico limita la carica positiva che il corpo può acquistare.

§ 7.

Distribuzione del potenziale entro i tubi di scarica.

È di grandissima utilità, per la spiegazione dei fenomeni di scarica, il conoscere come vari il potenziale o la forza elettrica lungo il cammino della scarica stessa. Infatti se V ed X sono il potenziale e la forza elettrica in un punto distante x da un estremo della scarica luminosa, preso lungo la scarica supposta rettilinea, la somma delle derivate seconde del potenziale si riduce a $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ossia a $-\frac{\partial X}{\partial x}$, e perciò l'equazione di Poisson dà: $4\pi\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, dicendo ϱ la densità elettrica di volume nel punto considerato. Se quindi si è determinato V oppure X per vari valori di x, si può calcolare ϱ, o almeno vedere qual segno abbia questa quantità, e quindi scoprire se esistano lungo la scarica delle cariche elettriche nel gas, ossia prevalenza di ioni positivi o di ioni negativi.

Credo che le prime esperienze di tal genere siano quelle di Warren de la Rue e Mueller (2), cui seguirono altre di Schuster (3), Crookes (4), e le mie (5), e poi in questi ultimi tempi, quelle di molti altri fisici.

I risultati dei primi sperimentatori non furono concordi, mentre invece riescirono regolarissimi i risultati miei, i quali dimostrarono, per la prima volta in modo scevro da obbiezioni, l'accumularsi di ioni presso gli elettrodi, e più specialmente

(1) *Sulla conversione fotoelettrica*, ecc., Mem. della R. Acc. di Bologna, 27 aprile 1890.

(2) Phil. Trans., t. 174, pag. 477 (1883).

(3) Proc. of the Roy. Soc. t. XLVIII, pag. 541.

(4) Inaugural Address 15th January 1891, Inst. Roy. Engineers.

(5) *Sulla distribuzione dei potenziali presso il catodo*, Mem. della R. Acc. di Bologna, 13 novembre 1892.

di ioni positivi presso il catodo. Va notato poi, che nelle mie esperienze era esclusa ogni influenza disturbatrice per parte delle cariche, che sogliono acquistare le pareti del tubo di scarica. Infatti nel mio apparecchio gli elettrodi erano sferici e concentrici; uno di essi A, generalmente l'anodo (fig. 4), non era altro che la superficie argentata d'un pallone di vetro, mentre l'altro elettrodo C era costituito da una pallina metallica collocata nel centro del recipiente. Una sonda S (filo di platino protetto per quasi tutta la sua lunghezza da un cannello di vetro) mobile a piacere, serviva a determinare il potenziale in vari punti del gas fra i due elettrodi.

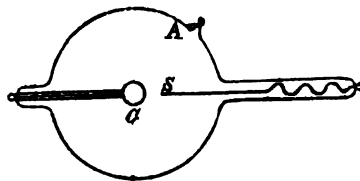



Fig. 4.

Se si adopera un galvanometro, i suoi reofori possono congiungersi: 1° con S e C, oppure: 2° con S ed A. Anche nel secondo caso si arriva a determinare la differenza di potenziale fra S e C, se a quella fra S ed A si aggiunge quella fra A e C, che si determina a parte.

Sperimentando nella seconda maniera si trova, che il potenziale nel gas, partendo da un punto vicinissimo al catodo C e andando verso l'anodo A, comincia col diminuire sino ad una certa distanza, ove presenta un valore minimo, dopo di che cresce nuovamente. Se ne deduce la presenza d'una carica positiva nel gas attorno al catodo. Quivi si accumulano dunque dei ioni positivi.

Sperimentando col 1° metodo il risultato è affatto diverso; ma ciò si spiega agevolmente riflettendo, che quando S e C comunicano insieme per mezzo del galvanometro, anche la sonda S deve funzionare da catodo, e perciò circondarsi di ioni positivi, la cui presenza più non permette di riconoscere quella dei ioni circondanti il catodo.

Basta infatti sostituire al galvanometro un elettrometro, che sia isolato in modo assolutamente perfetto, perchè il primo modo di operare dia lo stesso risultato del secondo.

Riconobbi un tenue affollamento di ioni negativi intorno a C, quando questa pallina funzionava da anodo. La sorgente di elettricità adoperata era una batteria di piccole coppie di Volta.

Le ricerche recenti, nelle quali generalmente con una doppia sonda si misurò la forza elettrica anzichè il potenziale, confermarono ed estesero i miei risultati; ma sarebbe forse desiderabile che venissero ripetute con elettrodi concentrici.

§ 8.

Propagazione dell'elettricità in un gas fra lastre parallele di cui si varia la distanza.

Alle esperienze del precedente paragrafo fui condotto, nel cercare la spiegazione di certi fatti, a prima vista paradossali, che ebbi a constatare durante i miei studi sperimentali intorno ai fenomeni elettrici prodotti dalle radiazioni (ultraviolette, di Roentgen, ecc.). Eccone alcuni (¹).

(¹) *Sulla convezione fotoelettrica*, ecc., Mem. della R. Acc. di Bologna, 27 aprile 1890.

Un recipiente in cui può rarefarsi l'aria, ed in cui trovasi un disco di zinco Z (fig. 5) caricato dal polo negativo di una pila, ha la sua bocca chiusa da un disco di quarzo Q, che permette di far cadere su Z un fascio intenso di radiazioni ultraviolette. Fra Q e Z si trova una reticella metallica mobile R comunicante col suolo, in prossimità della quale è teso un sottile filo metallico F comunicante con un elettrometro. La quantità di elettricità raccolta dal filo in un dato tempo costante, misurerà la corrente fotoelettrica. Variando la distanza fra Z ed R si trova che, entro certi limiti, l'intensità di quella corrente cresce colla distanza suddetta.

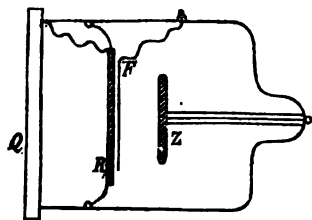



Fig. 5.

Tenuto conto della circostanza che verosimilmente l'anodo in realtà consta, non solo della reticella R, ma anche delle pareti del recipiente, se si assimila il filo F alla sonda S del paragrafo 7, il descritto fenomeno resta spiegato dalla presenza di ioni positivi presso il disco Z.

Se la forza elettromotrice della pila che carica Z è sufficientemente elevata, si realizza il descritto fenomeno anche senza l'intervento delle radiazioni. Inoltre la disposizione sperimentale può semplificarsi, sopprimendo F e raccogliendo colla reticella R la carica negativa; anzi nel caso in cui non si adoperino le radiazioni l'apparecchio può ridursi al seguente (fig. 6) ([1]). Un tubo contenente aria rarefatta porta due elettrodi A, B, per esempio in forma di dischi paralleli, uno dei quali A è mobile. Messo il tubo in circuito con un galvanometro ed una pila di Volta di sufficiente forza elettromotrice (qualche centinaio di coppie), osservai il seguente fenomeno. Se A e B sono vicinissimi non si ha deviazione; questa si produce allontanando abbastanza A da B, cresce fino ad un massimo continuando l'allontanamento, poi nuovamente decresce sino

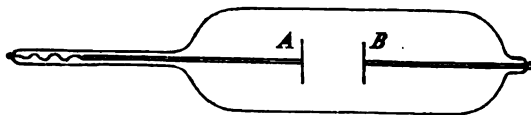



Fig. 6.

a zero, e se la pressione del gas è non troppo piccola, e la forza elettromotrice della pila è appena sufficiente allo scopo, il descritto fenomeno diviene sorprendente pel modo brusco con cui si presenta. Basta allora infatti uno spostamento di meno d'un millimetro dell'elettrodo mobile perchè la deviazione si presenti, arrivi al massimo e di nuovo svanisca. È anche più rimarchevole il fenomeno se al galvanometro si sostituisce un elettrometro o un elettroscopio a foglie d'oro.

Come si vede un tal fenomeno è sostanzialmente identico ad uno osservato più tardi da Peace e più recentemente ancora da Carr ([2]), i quali hanno trovato, che il potenziale di scarica è minimo per una certa piccola distanza fra gli elettrodi, e cresce rendendo tale distanza ancora più piccola.

([1]) Loc. cit., pag. 112.
([2]) J. J. Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*, pag. 356.

Considerando il modo nel quale si passa dalle esperienze del paragrafo precedente a quelle di questo, si è indotti ad attribuire anche gli ultimi fenomeni all'atmosfera di ioni positivi che avvolge il catodo. Infatti è verosimile che, anche in quei casi in cui non si stabilisce in modo durevole la scarica attraverso il gas, un principio di scarica tuttavia abbia luogo, ma cessi ben presto in seguito all'accumularsi dai ioni positivi tutt'intorno al catodo.

Anche le antiche esperienze di HITTORF e GASSIOT, secondo le quali in un gas estremamente rarefatto la scarica preferisce un lungo cammino al diretto passaggio fra elettrodi vicinissimi, avrebbero la medesima spiegazione.

Se non che ecco altri fatti, che sembrano della stessa natura dei precedenti, e dei quali tuttavia si sono date spiegazioni differenti.

Due dischi metallici paralleli posti nell'aria all'ordinaria pressione comunicano, uno col polo isolato d'una pila e l'altro con un elettrometro e, quando si vuole, anche col suolo. Ionizzando l'aria coi raggi X osservai [1] un curioso fenomeno, che confermarono più tardi J. J. THOMSON e RUTHERFORD [2], e cioè che l'intensità della corrente fra i dischi cresce sino ad un certo limite quando si aumenta la loro distanza. Di questo fenomeno si rende conto ammettendo, che la detta corrente sia prossima alla saturazione, cioè utilizzi quasi tutti i ioni, man mano che i raggi X li producono; se così è l'allontanare i dischi introduce fra essi un maggior numero di ioni, e da ciò la maggior intensità della corrente [3].

Un fenomeno simile è stato da me recentemente dimostrato [4], facendo agire i raggi del radio anzichè i raggi X.

Uno dei fatti citati più sopra è più particolarmente simile al precedente, colla differenza che si fanno agire le radiazioni ultraviolette invece dei raggi X, al che si richiede che il disco positivo sia sostituito da una reticella metallica, e coll'altra differenza, che l'aria è più o meno rarefatta. La spiegazione che si dà di tale fenomeno è basata sulla ionizzazione dovuta all'urto dei ioni negativi respinti dal catodo contro le molecole gassose, la quale avviene quando il campo elettrico è abbastanza intenso [5]. Si potrebbe però obbiettare, che il fenomeno fu da me ottenuto anche con campo assai debole (4 a 5 volta di differenza di potenziale).

Come si vede, per fenomeni che sembrano essere fra loro molto affini esistono ancora tre differenti spiegazioni; ma è verosimile che una volta messi così a riscontro fra loro si giunga a scoprire fra essi qualche legame sostanziale, e a trovare per essi una spiegazione più uniforme e completa. Questa dovrà essere tale da rendere conto ancora del seguente fatto, e cioè che quando si fa agire un intenso campo magnetico

[1] *Nuovi studi sulla dispersione prodotta dai raggi di Röntgen*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, 3 maggio 1896. *Sulla propagazione dell'elettricità nei gas attraversati dai raggi di Röntgen*, Mem. della R. Acc. di Bologna, 31 maggio 1896.

[2] Phil. Mag., t. 42 (1896).

[3] J. J. THOMSON, *Conduction of Electricity through Gases*, pag. 13, parag. 13.

[4] *Di alcuni fenomeni osservati nell'aria ionizzata da corpi radioattivi*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, t. XII, pag. 237 (1904).

[5] J. J. THOMSON, loc. cit., pag. 232.

i fenomi anomali descritti in questo paragrafo (o per lo meno quelli in aria rarefatta) tendono a sparire; cosicchè per esempio, nel caso dell'esperienza a cui si riferisce la fig. 6, l'intensità della corrente, quando esiste il campo magnetico, diminuisce regolarmente al crescere della distanza fra gli elettrodi (1). A me sembra che si arrivi alla desiderata spiegazione completa tenendo conto tanto delle spiegazioni date dal Thomson, e cioè dell'effetto che risulta dall'essere minore la ionizzazione per urto dei ioni quando per un motivo qualunque scarseggiano le molecole gassose fra i due conduttori, quanto della spiegazione mia basata sull' ingorgo dei ioni positivi che si accumulano intorno al catodo. Anzi, se non si accettassero le considerazioni svolte in base a questo accumulo di ioni non sarebbe facile, a mio avviso, dar ragione dell'effetio prodotto dal campo magnetico (2).

§ 9.

Scariche elettriche aventi l'aspetto di luminosità in lento moto traslatorio.

Mi preme, per ultimo, richiamare l'attenzione su certe mie ricerche relative ad una forma assai singolare di scariche luminose, le quali si producono adoperando condensatori di grandissima capacità e circuiti con resistenze assai rilevanti costituite da lunghe colonne di acqua (3). Tali scariche si manifestano con una luminosità di forma sferica o sferoidale più o meno allungata o anche avente altre forme, che sorge presso l'anodo, si allontana da questo avviandosi verso il catodo, per svanire ad un tratto prima di averlo raggiunto, dopo essere rimasta visibile per uno o più secondi, tale potendo essere la durata del fenomeno.

(1) *Sulla convezione fotoelettrica*, ecc., loc. cit, pag. 113. — Una mia recentissima esperienza (Rend. della R. Acc. dei Lincei), conferma l' intravvista relazione fra i fatti di cui si è parlato in questo § e quella nota esperienza di Hittorf, la quale si eseguisce con un piccolo tubo contenente due elettrodi filiformi, che quasi arrivano a toccarsi colle loro estremità, ed in cui esiste un ottimo vuoto. Le scariche di un condensatore si formano nell'aria fra due palline comunicanti cogli elettrodi e distanti parecchi centimetri una dall'altra, piuttosto che nel vuoto fra i due fili vicinissimi. Orbene, messo questo tubo fra i poli di una potente elettrocalamita e regolata a dovere la distanza esplosiva nell'aria ho verificato, che eccitando il campo magnetico cessano le scintille, e la scarica si fa entro il tubo, sulle cui pareti appare infatti una vivissima fluorescenza verde. La più naturale spiegazione di questo fatto mi sembra la seguente. Anche quando la scarica avviene fuori del tubo ha luogo entro di questo un inizio di scarica, e cioè l'emissione di elettroni dal catodo, i quali per urto contro le molecole del gas generano dei ioni positivi che si accumulano poi attorno al catodo, come si è detto nel § 7. Il campo magnetico, incurvando fortemente le traiettorie degli elettroni, rende più scarsi i detti urti, e impedisce così la formazione di quell'atmosfera di ioni positivi intorno al catodo, a cui si può attribuire l'effetto di ostacolare la scarica.

(2) Veggasi la precedente nota, nonchè in un numero di quest'anno (1906) dei Rend. della R. Acc. dei Lincei una mia pubblicazione: *Su alcuni fenomeni apparentemente paradossali di passaggio della elettricità attraverso i gas.*

(3) *Sopra una specie di scintille*, ecc., Mem. della R. Acc. di Bologna, 25 gennaio 1891. *Sulle scintille costituite da masse luminose in moto*, Rend. Acc. Lincei, 19 aprile 1891. *Ricerche sperimentali intorno a certe scintille*, ecc., Mem. della R. Acc. di Bologna, 26 aprile 1891. *Nuove esperienze sulle scintille costituite da masse luminose*, ecc. Mem. della R. Acc. di Bologna, 19 maggio 1895.

Qualche volta la luminosità mobile retrocede alquanto prima di sparire, oppure resta per un certo tempo immobile. In certe determinate condizioni [1] la luminosità resta immobile e permanentemente visibile, purchè la sorgente che fornisce la carica al condensatore rimanga in continua azione; cosicchè, mentre è necessaria la grande capacità del condensatore perchè il fenomeno si produca, esso, in questo caso, continua indefinitamente per opera della sola corrente fornita dalla macchina elettrica.

In particolari condizioni sperimentali ogni scarica è *composta* anzichè *semplice*, e cioè consta dell'emissione dall'anodo, non d'una sola, ma di più successive luminosità mobili, le quali in tal caso sono animate da velocità non tanto piccole.

Generalmente il curioso fenomeno, che pel suo aspetto richiama quello delle famose folgori globulari, si produce nettamente a pressioni del gas piuttosto elevate, di uno o più centimetri di mercurio; perciò è da ritenersi, che la luce negativa e lo spazio oscuro del catodo siano confinati nell'immediata vicinanza di questo elettrodo, ciò che del resto chiaramente appare nella maggior parte dei casi.

Ne consegue che la luminosità mobile costituisce o rappresenta la così detta colonna luminosa positiva. Se quindi si vuol ad essa applicare la spiegazione generalmente ammessa, si dovrà dire, che la luminosità mobile è formata là dove gli elettroni provenienti dal bagliore negativo, giungono con sufficiente velocità per ionizzare nuovamente il gas.

Stante la grande resistenza del circuito di scarica la differenza di potenziale fra i due elettrodi seguita ad aumentare, anche dopo che la scarica si è iniziata, ed in causa di questo aumento diviene minore il cammino che devono percorrere gli elettroni, onde il campo elettrico comunichi ad essi la velocità necessaria alla ionizzazione per urto. Si spiega così il moto progressivo della luminosità verso il catodo.

La formazione di successive masse luminose per ogni scarica, costituisce un fenomeno analogo alle scariche intermittenti; può accadere, che al crescere della differenza di potenziale fra gli elettrodi, gli elettroni, che provengono dalla prima luminosità mobile, acquistino la velocità necessaria ad una nuova ionizzazione per urto prima di arrivare all'anodo, d'onde la formazione d'una seconda massa mobile.

Si rende conto così del fenomeno nelle sue linee generali, ma rimangono da spiegare le sue modalità svariate, e certe modificazioni come la seguente. Se il tubo di scarica ha una strozzatura, anche da questa partono delle luminosità, che si dirigono verso il catodo; per cui, come avviene di solito, la strozzatura si comporta come un catodo per la porzione di tubo compresa fra essa e l'anodo, e come anodo per l'altra porzione. Ma sopra tutto rimangono ancora senza spiegazione molte circostanze, per esempio la necessità, o almeno l'opportunità, di grandissime capacità e resistenze, la necessità che la pressione del gas per date capacità, resistenza, dimensioni del tubo, ecc., sia compresa fra certi limiti non molto lontani. Infine rimane a sapersi perchè il fenomeno in discorso si presenti perfetto nell'azoto, in modo un poco meno spiccato nell'ossido di carbonio, e non si manifesti invece distintamente nei molti altri gas messi

[1] Occorre specialmente provocare la scarica col mettere bruscamente in reciproco contatto le palline dello spinterometro, che deve sempre includersi nel circuito, di modo che non rimanga in questo nessun altro luogo in cui avvenga una scarica luminosa, all'infuori del tubo in cui si osserva il fenomeno che si studia.

alla prova. Sarebbero dunque molto opportune nuove ricerche su questo soggetto, e per chi vi si volesse accingere ricorderò, che per ottenere il fenomeno in modo soddisfacente è necessario adoperare un condensatore formato da molte giare o bottiglie di Leida (nel caso mio oltre un centinaio) avente una capacità di circa un microfarad, pur comportando tal condensatore potenziali di scarica corrispondenti a scintille di 2 o più centimetri nell'aria ordinaria.

Per dare al condensatore la dovuta carica non può bastare un rocchetto, anche se è delle più grandi dimensioni, nè una batteria di accumulatori, a meno che non fosse formata da un numero stragrande di elementi. Conviene dunque far uso d'una potente macchina ad influenza, colla quale, quand'anche sia a molti dischi, si richiederà spesso qualche decina di minuti primi per giungere a dare al condensatore una carica sufficiente allo scopo.

Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti.

Memoria del dott. UMBERTO SBRANA

(presentata dal Socio L. BIANCHI ed approvata dal Socio U. DINI).

Quando si escluda la sfera, si trova che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una superficie abbia in ogni punto eguali i due raggi principali di curvatura r_1, r_2, è che coincidano i suoi due sistemi di linee di curvatura. Le superficie che soddisfano a questa condizione sono le rigate isotrope; per esse i due sistemi di linee di curvatura coincidono in quello delle generatrici.

Queste superficie sono integrali dell'equazione a derivate parziali $r_1 = r_2$, che, colle notazioni di MONGE, si scrive:

$$\text{(A)} \qquad 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 = 0,$$

equazione questa che, come è noto, fu integrata da MONGE stesso.

SERRET osservò che fra queste superficie vi sono quelle di una classe, che dipendono da una funzione arbitraria, le quali sono a curvatura costante. Le superficie generali sono state poi studiate da STÄCKEL [1], e brevemente anche da SCHEFFERS [2].

Quelle speciali a curvatura costante si sono presentate al prof. BIANCHI, nelle sue ricerche sulle superficie applicabili sulle quadriche rotonde [3], come collegate alle deformate rigate dell'iperboloide di rotazione ad una falda, e quindi anche alle curve di BERTRAND.

In questo lavoro io stabilisco per le superficie a linee di curvatura coincidenti un metodo di trasformazione. Comincio dall'osservare che esse appartengono alla classe di quelle considerate dal prof. BIANCHI, per le quali la curvatura K, nei parametri u, v delle assintotiche, ha l'espressione:

$$\text{(1)} \qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2},$$

[1] PAUL STÄCKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1897, S. 479; 1902, S. 108.

[2] SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Flächen*. Leipzig, 1902, S. 227-229.

[3] BIANCHI, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*. Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, t. XIV.

con $\varphi(u)$, $\psi(v)$ funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Osservo poi, che il metodo di trasformazione dato dal prof. BIANCHI [1] per queste superficie si può applicare anche a quelle a linee di curvatura coincidenti, e conduce a nuove superficie della stessa specie. Faccio quindi vedere come, per quelle a curvatura variabile, queste trasformazioni si riducano a delle trasformazioni di curve, nelle quali si conserva la lunghezza degli archi.

Colle trasformazioni dette, dalle rigate isotrope a curvatura costante si ottengono superficie della stessa specie; si trova cioè che anche ad esse è applicabile la trasformazione di BÄCKLUND. Quando ci si limiti poi alla considerazione di superficie a curvatura costante, reale, negativa, si trova che le trasformazioni si riducono a quelle di RAZZABONI e DEMARTRES per le curve di BERTRAND.

Le trasformazioni per le superficie generali.

§ 1. Riferiamo una delle nostre superficie S alle sue linee assintotiche u, v; e sieno le $u =$ costante le assintotiche rettilinee, cioè quelle nelle quali coincidono le linee di curvatura, e che costituiscono uno dei sistemi delle linee di lunghezza nulla. Valendosi delle equazioni di GAUSS e CODAZZI, si trova che le due forme differenziali, fondamentali di S hanno i seguenti coefficienti:

$$(2)\quad \begin{cases} E=\dfrac{2\Phi\Phi'}{u+v}+\psi \quad , \quad F=-\dfrac{2\Phi^2}{(u+v)^2} \quad , \quad G=0\,; \\ D=D''=0 \quad , \quad D'=-\dfrac{2\Phi}{(u+v)^2} \end{cases}$$

dove Φ, ψ sono due funzioni della sola u [2]. Inversamente, scelte Φ, ψ in modo arbitrario, le (2) determinano intrinsecamente una delle nostre superficie.

Gli altri elementi di S hanno quindi le espressioni:

$$K=\frac{1}{\Phi^2} \quad , \quad r_1=r_2=-\Phi.$$

Il sistema di equazioni al quale soddisfano le coordinate x, y, z di un punto di una qualsiasi superficie, e i coseni direttori X, Y, Z, della normale, assume per S questa forma:

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v} \;,\; \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}+D'X \;,\; \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\,; \\ \dfrac{\partial X}{\partial u}=-\dfrac{D'}{F}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{ED'}{F^2}\dfrac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad \dfrac{\partial X}{\partial v}=-\dfrac{D'}{F}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

[1] BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II, pp. 74-82.

[2] Cfr. STÄCKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*. Berichte ecc. 1897, S. 482.

La formola $K = \frac{1}{\Phi^2} = -\frac{1}{(i\Phi)^2}$ ci dice che le nostre superficie appartengono alla classe di quelle caratterizzate dalla (1), e per le quali, come abbiamo già detto, il prof. BIANCHI ha dato un metodo di trasformazione. Io mi propongo, modificando il procedimento del prof. BIANCHI, procedimento che non è applicabile a causa della coincidenza dei due sistemi di linee di curvatura, di far vedere che anche per le nostre superficie si hanno delle trasformazioni analoghe. Voglio provare cioè che:

(a) Una superficie S a linee di curvatura coincidenti è falda fuocale di ∞^2 congruenze W, la cui seconda falda è una superficie S_0 della stessa specie, la quale ha, nei punti corrispondenti a quelli di S, la stessa curvatura di questa.

§ 2. Supposta l'esistenza di una di tali congruenze W, le cui falde fuocali S ed S_0 hanno la stessa curvatura $-\frac{1}{(i\Phi)^2}$ in punti corrispondenti, e indicando con σ l'angolo dei piani fuocali, col procedimento generale si trova che deve essere:

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\frac{d\log\Phi}{\partial u}; \tag{3}$$

dalle quali si trae, integrando:

$$1+\cos\sigma = \frac{c}{\Phi},$$

con c costante arbitraria.

Si ha di più che la distanza dei punti limiti deve essere $i\Phi$ e quindi quella dei fuochi $i\Phi$ sen σ.

Ciò posto, consideriamo in ogni punto di S le tre direzioni seguenti: quella della normale, quella della tangente alla linea $v =$ costante, quella della perpendicolare ad ambedue le precedenti. I coseni direttori di esse saranno rispettivamente questi:

$$X \ , \ Y \ , \ Z;$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right), \ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(Z\frac{\partial x}{\partial u} - X\frac{\partial z}{\partial u}\right), \ Z_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(X\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Tenendo conto delle (I) e delle formole:

$$Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v} = -i\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} = -\frac{F}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},$$

si trovano le seguenti:

$$
\text{(II)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{F\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{E}X_1+\frac{\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v}=-\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}X_1+\frac{D'}{\sqrt{E}}X+\frac{\left\{ {12 \atop 2} \right\}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u}=-\frac{F\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{E}X_2-\frac{i\sqrt{E}\,D'}{F}X-\frac{i\left\{ {11 \atop 2} \right\}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial v}=-\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}X_2+\frac{i\,D'}{\sqrt{E}}X-\frac{i\left\{ {12 \atop 2} \right\}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X}{\partial u}=-\frac{D'\sqrt{E}}{F}X_1+\frac{E\,D'}{F^2}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial X}{\partial v}=-\frac{D'}{F}\frac{\partial x}{\partial v}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto P_0 di S_0 corrispondente al punto $P \equiv (x, y, z)$ di S saranno così espresse:

$$
(4)\qquad x_0 = x + i\Phi \operatorname{sen}\sigma(X_1\cos\varphi + X_2\operatorname{sen}\varphi)\,;
$$

e pei coseni direttori X_0, Y_0, Z_0 della normale ad S_0 in P_0 avremo:

$$
(4)^*\qquad X_0 = X\cos\sigma + (X_1\operatorname{sen}\varphi - X_2\cos\varphi)\operatorname{sen}\sigma\,,
$$

nelle quali φ indica l'angolo formato dalla PP_0 con l'orientazione (X_1, Y_1, Z_1).

Le due condizioni:

$$
\sum X_0\frac{\partial x_0}{\partial u}=0\quad,\quad \sum X_0\frac{\partial x_0}{\partial v}=0\,,
$$

quando si osservi che si ha:

$$
\sum X_1\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{F}{\sqrt{E}}\quad,\quad \sum X_2\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{iF}{\sqrt{E}}\,,
$$

si riducono alle seguenti:

$$
(5)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{i\sqrt{E}}{\Phi}\,\frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot\operatorname{sen}\varphi+\frac{F}{iE}\left\{ {11 \atop 2} \right\},\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{F}{\Phi\sqrt{E}}\,\frac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)+\frac{F}{iE}\left\{ {12 \atop 2} \right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Si ha così per φ un'equazione ai differenziali totali tipo Riccati, che è illimitatamente integrabile. Formando infatti la condizione di integrabilità delle (5), col tener presente la formola della curvatura:

$$
K=\frac{1}{\Phi^2}=-\frac{1}{iF}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{iE}\left\{ {11 \atop 2} \right\}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{iE}\left\{ {12 \atop 2} \right\}\right)\right],
$$

e le (3), si trova che è identicamente soddisfatta.

Attribuito alla costante c che comparisce in σ un valore qualsiasi, e integrate le (5), le (4) ci danno ∞^1 superficie che sono falde fuocali di ∞^1 congruenze la cui altra falda è S. Facendo poi variare c, si ottengono ∞^2 superficie trasformate di S, che vogliamo far vedere essere quelle del teorema (a). Infatti se, per mezzo delle (4), (4)*, (II), si calcolano i coefficienti E_0, F_0, G_0; D_0, D'_0, D''_0 delle due forme fondamentali di una S_0 di queste ∞^2 superficie, usando le (3), (5) si trova:

$$E_0 = E \operatorname{sen}^2\varphi + \left[\sqrt{E}\cos\varphi + i\Phi' \frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right]^2,$$

$$F_0 = F(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 + \frac{i\Phi' F}{\sqrt{E}} \frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \quad . \quad G_0 = 0:$$

$$D_0 = D''_0 = 0 \quad , \quad D'_0 = D'(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 + \frac{i\Phi' D'}{\sqrt{E}} \frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Queste ci dicono che le linee u, v sono per S_0 le assintotiche, e che i due sistemi di linee di curvatura coincidono in quello delle $u =$ costante. Quando si osservi poi che si ha: $\frac{D'}{F} = \frac{D'_0}{F_0} = \frac{1}{\Phi}$, e che quindi in punti corrispondenti S ed S_0 hanno la stessa curvatura, si trova che è completamente stabilito il teorema (a).

§ 3°. Sia S_0 una delle trasformate di S, corrispondente al valore k della costante c; diremo che S_0 è dedotta da S con una trasformazione T_k. Ciò posto, si ha il seguente teorema di permutabilità:

Date due trasformate S_1, S_2 di S dedotte da questa rispettivamente con una T_{c_1}, e con una T_{c_2}, risulta determinata in termini finiti una terza superficie S_3 legata ad S_1 con una T_{c_2}, e ad S_2 con una T_{c_1}.

Indichiamo con σ_1, φ_1; σ_2, φ_2 rispettivamente i valori di σ, φ relativi ad S_1, S_2. Ripetendo gli stessi ragionamenti del caso generale [1], si vede che le coordinate x_3, y_3, z_3 di un punto di S_3 e i coseni direttori X_3, Y_3, Z_3 della normale in esso, devono essere espressi dalle formole seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} x_3 = x + \frac{i\Phi}{\lambda}\{\operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) X + \\ \qquad + (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos\varphi_1) X_1 + \\ \qquad + (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\varphi_1) X_2\} \\ X_3 = X\left(1 + \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}[X_1(\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2) + \\ \qquad + X_2(\cos\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1)], \end{cases}$$

con

$$\lambda = \frac{1 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}.$$

[1] Cfr. Bianchi, *Lezioni*, ecc., vol. 2°, pag. 81.

Si vede poi che per verificare tutte le proprietà alle quali deve soddisfare S_2, basta limitarsi a dimostrare che si ha:

$$\sum X_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum X_3 \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0 . \tag{7}$$

Ora per dimostrare ciò, o si può fare il calcolo valendosi delle (3), (II), (5), oppure si può dire così: Le (7) si verificano nel caso generale di superficie la cui curvatura è data dalla (1), usando un certo procedimento. Ora noi possiamo immaginare di stabilire anche in questo caso le formole di trasformazione, con lo stesso procedimento usato per le superficie con un solo sistema di linee di curvatura; avremo così delle formole che si ridurranno alle (3), (II), (5), quando vi si faccia: $\psi(v) = 0$, $\varphi(u) = i\Phi$, $G = 0$. Si comprende poi come, valendosi di queste formole, le (7) debbano necessariamente riuscire verificate in ogni caso, anche quando si facciano le ipotesi particolari suddette. Dal teorema di permutabilità segue, nel solito modo, che una volta conosciute le ∞^2 trasformate di S, per ciascuna di queste l'applicazione delle trasformazioni richiede soltanto calcoli algebrici e di derivazione.

Osserviamo infine come risulti così stabilito, che per gli integrali dell'equazione a derivate parziali (A) esiste un metodo di trasformazione, analogo a quello che si ha per l'equazione da cui dipendono le superficie pseudosferiche.

Trasformazioni di curve.

§ 4. Le trasformazioni trovate, pel caso in cui S non sia a curvatura costante, possono presentarsi sotto un altro aspetto. Perciò basta valersi della costruzione seguente di Stäckel [1] delle più generali superficie con un solo sistema di linee di curvatura:

Si prenda una curva C qualsiasi e si consideri una sua evolvente C_1; con centro in ogni punto di C, si descriva la sfera che passa per il punto corrispondente di C_1. L'inviluppo di questa semplice infinità di sfere è costituito di due falde ciascuna delle quali è una superficie della specie richiesta.

Di qui segue che, se con x_0, y_0, z_0 si indicano le coordinate di un punto mobile su C, date in funzione dell'arco u, e si usano poi le solite notazioni per la curva C, si ha la seguente rappresentazione, pei parametri u, v, della superficie S:

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 - u\alpha + (-\alpha\beta + i\gamma)\,uv \\ y &= y_0 - u\beta + (\alpha^2 + \gamma^2)\,uv \\ z &= z_0 - u\gamma + (-\beta\gamma - i\alpha)\,uv . \end{aligned}\right. \tag{III}$$

Facendo in queste $v = 0$, si ottiene la curva C_1 evolvente di C. Le (III) ci

[1] Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie*, Berichte ecc., 1902, S. 112-113.

forniscono i seguenti valori per gli elementi di S:

$$(8)\quad \begin{cases} E=\dfrac{u^2}{\varrho^2}+\dfrac{u^2v^2}{\varrho^2}(\eta+i\mu)^2+\dfrac{2u^2v}{\varrho^2}\beta-2\dfrac{uv}{\varrho}(\eta+i\mu) \\ F=-\dfrac{u^2}{\varrho}(\eta+i\mu)\ ,\ G=0\ ,\ \dfrac{D'}{F}=-\dfrac{1}{u}\ ,\ K=\dfrac{1}{u^2}\ ,\ D''=0. \end{cases}$$

Ora consideriamo in ogni punto di S la normale, la tangente alla linea $v=\text{cost.}$ la perpendicolare alle prime due; e indichiamone al solito i coseni direttori, rispettivamente con: X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2.

Le coordinate $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ di un punto di una superficie $S^{(1)}$ trasformata di S saranno date da:

$$(9)\qquad x^{(1)}=x+iu\,\mathrm{sen}\,\sigma(X_1\cos\varphi+X_2\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

e i coseni direttori $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ della normale da:

$$(9)^*\qquad X^{(1)}=X\cos\sigma+(X_1\,\mathrm{sen}\,\varphi-X_2\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma;$$

ove φ indica l'angolo formato dalla congiungente due punti $P, P^{(1)}$ che si corrispondono su $S, S^{(1)}$, con la tangente alla linea $v=\text{costante}$ che passa per P, e σ, angolo dei piani fuocali, è dato dalla formola:

$$1+\cos\sigma=\frac{c}{u},$$

con c costante.

Formando per mezzo delle (9), (9)* la condizione:

$$\sum X^{(1)}\frac{\partial x^{(1)}}{\partial u}=0,$$

col tener conto delle formole:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{F}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}X_1+\frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{D}{\sqrt{E}}X,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u}=-\frac{F}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}X_2-\frac{i(ED'-FD)}{F\sqrt{E}}X-\frac{i\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial u}=-\frac{D'\sqrt{E}}{F}X_1+\frac{ED'-FD}{F^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

che si ottengono con lo stesso procedimento col quale si sono trovate le (II), e delle (8), si trova:

$$(10)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{D}{\sqrt{E}}\cot\sigma(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)+\sqrt{E}\,\frac{1-\cos\sigma}{iu\,\mathrm{sen}\,\sigma}\mathrm{sen}\,\varphi+\frac{F}{iE}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}.$$

§ 5. Ora osserviamo che, corrispondentemente alle trasformazioni delle nostre superficie, avremo delle trasformazioni per le curve analoghe a C, luogo dei loro centri di curvatura. Noi vogliamo appunto dare le formole relative a tali trasformazioni. Per questo determineremo tutti gli elementi di S lungo la curva $v = 0$. Troveremo così:

$$(X)_{v=0} = -\alpha \;,\; (Y)_{v=0} = -\beta \;,\; (Z)_{v=0} = -\gamma,$$

$$(E)_{v=0} = \frac{u^2}{\varrho^2} \;,\; (F)_{v=0} = -\frac{u^2}{\varrho}(\eta + i\mu) \;,\; (D)_{v=0} = -\frac{u}{\varrho^2} \;,\; (D')_{v=0} = \frac{u}{\varrho}(\eta + i\mu).$$

Tenendo conto di queste, la (10), tornando ad indicare con φ la funzione della sola u $(\varphi)_{v=0}$, si riduce a questa:

$$\frac{d\varphi}{du} = -\frac{\cot\sigma\cos\varphi}{\varrho} - \frac{i\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\varrho\,\mathrm{sen}\,\sigma} - \frac{1}{T}. \tag{10)*$$

Avendosi poi:

$$(X_1)_{v=0} = -\xi \;,\; (Y_1)_{v=0} = -\eta \;,\; (Z_1)_{v=0} = -\zeta,$$
$$(X_2)_{v=0} = \lambda \;,\; (Y_2)_{v=0} = \mu \;,\; (Z_2)_{v=0} = \nu,$$

le (9), (9)* ci danno le seguenti:

$$(x^{(1)})_{v=0} = x_0 - u\alpha + iu\,\mathrm{sen}\,\sigma(\lambda\,\mathrm{sen}\,\varphi - \xi\cos\varphi),$$
$$(X^{(1)})_{v=0} = -\alpha\cos\sigma - (\lambda\cos\varphi + \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma.$$

Poichè anche per la superficie trasformata di S i due raggi di curvatura sono rappresentati da u, così avremo che le coordinate $x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}$ dei punti della curva trasformata di C saranno date da queste:

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= (x^{(1)})_{v=0} - u(X^{(1)})_{v=0} = \\ &= x_0 - u\alpha(1-\cos\sigma) + u\lambda\,\mathrm{sen}\,\sigma(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) - u\xi\,\mathrm{sen}\,\sigma(i\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

È chiaro geometricamente che se si prendono due punti di C e i due corrispondenti di una sua trasformata $C^{(1)}$, gli archi delle due curve compresi fra queste due coppie sono eguali.

Che u sia anche per $C^{(1)}$ l'arco, si vede osservando che, quando si tenga conto della (10)*, le (11) ci danno:

$$\sum\left(\frac{dx_0^{(1)}}{du}\right)^2 = 1.$$

Possiamo insomma ritenere stabilito che:

Data una curva C, e integrata l'equazione differenziale (10)*, essendo $1 + \cos\sigma = \frac{c}{u}$, con c costante arbitraria, le (11) ci danno ∞^2 curve trasformate di C, ciascuna delle quali corrisponde punto a punto a C, in modo che si conservano le lunghezze degli archi.

È chiaro poi, che per le ∞^2 superficie trasformate di S, corrispondenti alle ∞^2 curve $C^{(1)}$, si avrà la seguente rappresentazione di STÄCKEL pei parametri u, v:

$$x^{(1)} = x_0^{(1)} - u\alpha^{(1)} + (-\alpha^{(1)}\beta^{(1)} + i\gamma^{(1)})\,uv,$$
$$y^{(1)} = y_0^{(1)} - u\beta^{(1)} + (\alpha^{(1)^2} + \gamma^{(1)^2})\,uv,$$
$$z^{(1)} = z_0^{(1)} - u\gamma^{(1)} + (-\beta^{(1)}\gamma^{(1)} - i\alpha^{(1)})\,uv,$$

avendo indicato con $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}$ i coseni direttori della tangente a $C^{(1)}$. In queste formole bisogna osservare però che le $v =$ costante non sono le corrispondenti sopra $S^{(1)}$ delle $v =$ costante sopra S, nella trasformazione.

§ 6. Corrispondentemente al teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie, ne avremo uno per quelle delle curve. Avremo cioè che, prese due curve $C^{(1)}, C^{(2)}$, dedotte da C rispettivamente con una T_{c_1} e con una T_{c_2}, corrispondentemente alle quali si abbiano le due trasformate S_1, S_2 di S, esisterà una quarta curva $C^{(3)}$, corrispondente alla quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità, legata a $C^{(1)}$ da una T_{c_2} e a $C^{(2)}$ da una T_{c_1}. Questa $C^{(3)}$ si avrà in termini finiti, e si vede subito che le coordinate $x_0^{(3)}, y_0^{(3)}, z_0^{(3)}$ di un suo punto saranno date dalle seguenti:

$$x_0^{(3)} = (x^{(3)})_{v=0} - u(X^{(3)})_{v=0},$$

ove $x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}$; $X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)}$ rappresentano rispettivamente le coordinate di un punto, e i coseni direttori della normale in esso di S_3. Dalle formole del teorema di permutabilità per la superficie S_3, formole che sono perfettamente identiche alle (6), tenendo conto anche di quelle trovate nel § 5, si deducono poi queste:

$$(x^{(3)})_{v=0} = x_0 - u\alpha + \frac{iu}{\Omega}\{\alpha \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2) -$$
$$- (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos\varphi_1)\,\xi +$$
$$+ (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\varphi_1)\,\lambda\}$$

$$(X^{(3)})_{v=0} = -\alpha\left(1 + \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2}{\Omega}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\Omega}\{\lambda(\cos\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1) - \xi(\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2)\}$$

ove è:

$$\Omega = \frac{1 - \cos\sigma_1\cos\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}.$$

Trasformazioni per le rigate isotrope a curvatura costante.

§ 7. Facciamo $\Phi =$ costante; si ottengono così quelle speciali superficie con un solo sistema di linee di curvatura, considerate da SERRET, che sono a curvatura costante: $K = \frac{1}{\Phi^2}$.

Dalle nostre considerazioni generali risulta che per queste superficie vale, come per quelle ordinarie, la trasformazione di Bäcklund, la quale conduce a superficie della stessa specie.

Vediamo come si semplificano le formole di trasformazione in questo caso. Posto in luogo di ψ, ψ^2, dalle (2) si traggono per i coefficienti dell'elemento lineare di una di tali superficie S le espressioni:

$$E = \psi^2 \quad , \quad F = -\frac{2\Phi^2}{(u+v^2)} \quad , \quad G = 0 .$$

Dalle (3) segue poi che $\sigma =$ costante. Le (5) si riducono, quando si ponga:

$$2\Phi \frac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} = q ,$$

alle seguenti:

$$(5)^* \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= \frac{2\psi}{iq} \operatorname{sen}\varphi + \frac{\psi'}{i\psi} + \frac{2}{i(u+v)} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \frac{q}{\psi(u+v)^2} (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) . \end{aligned} \right.$$

La seconda delle (5)* integrata ci porge:

$$e^{-i\varphi} = \frac{iq}{\psi(u+v)} + \tau(u) ,$$

essendo $\tau(u)$ una funzione arbitraria della sola u. Tenendo conto di questa, la (5)* ci dà per τ l'equazione differenziale:

$$\tau' = \frac{\psi}{iq}\tau^2 - \frac{\psi'}{\psi}\tau - \frac{\psi}{iq} ,$$

la quale, quando si prenda per nuova funzione: $\mathfrak{T} = \psi\tau$, diviene:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{du} = \frac{\mathfrak{T}^2 - \psi^2}{iq} .$$

§ 8. Come abbiamo già avuto occasione di osservare, il luogo dei centri di curvatura di una superficie con un solo sistema di linee di curvatura, è una curva. Questa curva, come risulta dalla costruzione di Stäckel del § 4, può assumere una forma qualsiasi. Ora una proprietà caratteristica delle speciali superficie a curvatura costante è questa:

La curva luogo dei centri di curvatura è di lunghezza nulla (Minimalcurve) [1], cioè tale che le sue coordinate x, y, z soddisfano all'equazione:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 .$$

[1] Per ciò che concerne queste curve immaginarie cfr. Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie*, Berichte etc., 1902, S. 101-108.

Inversamente, presa una qualsiasi Γ di tali curve, la semplice infinità di sfere aventi i centri nei punti di Γ, e raggio eguale ad $R =$ costante ha per inviluppo una rigata isotropa, la cui curvatura K è costante ed eguale a $\frac{1}{R^2}$ (1).

Segue da ciò che:

Le trasformazioni per le superficie a curvatura costante, di cui abbiamo parlato nel § 7, danno luogo a delle trasformazioni per le curve di lunghezza nulla dello spazio, le quali, se non sono rettilinee hanno la seguente nota rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - \tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau \ , \ y = \frac{i}{2}\int (1 + \tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau \ , \ z = \int \tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau,$$

con $\mathfrak{F}(\tau)$ funzione arbitaria di τ.

§ 9. Limitandoci al caso delle superficie a curvatura costante, negativa, reale, è facile vedere che: Le trasformazioni del § 7 hanno un'interpretazione geometrica reale, poichè esse si riducono a quelle di Razzaboni e Demartres per le curve di Bertrand.

A ciò si giunge, ricordando la seguente costruzione che il prof. Bianchi ha dato per le più generali superficie della specie considerata (2):

Presa una coppia $(C, \overline{C})$ di curve di Bertrand coniugate, cioè aventi comuni le normali principali, si conduca per ogni punto di una di esse C, e nel piano osculatore all'altra $\overline{C}$, la coppia di rette isotrope. Ciascuna di queste rette genera una superficie, i cui due sistemi di linee di curvatura coincidono nel sistema delle generatrici isotrope, e che è a curvatura costante.

Supporremo che le coordinate: x, y, z di un punto P di C sieno espresse in funzione del suo arco u, e adopereremo poi per C le solite notazioni. Supporremo poi che le sue curvature $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ sieno legate dalla relazione:

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\varrho} - \frac{\cos c}{T} = \frac{1}{k}, \tag{12}$$

ove k e c sono due costanti. Ciò posto si ha che le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto della coniugata $\overline{C}$, e gli altri suoi elementi $\alpha_1, \xi_1, \lambda_1 \dots$ analoghi a quelli di C si esprimono nel seguente modo:

$$\text{(12)*} \qquad x_1 = x + k \operatorname{sen} c\,\xi \ , \ \alpha_1 = \alpha \cos c + \lambda \operatorname{sen} c \ , \ \xi_1 = -\xi,$$
$$\lambda_1 = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \ \text{ ecc.}$$

Da queste formole, e dalla costruzione del prof. Bianchi segue che per le coordi-

(1) Stäckel, Berichte etc. 1902, S. 114-116.
(2) Bianchi, *Teoria delle trasformazioni* ecc., Memorie della Società dei XL, ser. 3a, t. XIV.

nate $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dei punti di una delle rigate isotrope dette S si ha la seguente rappresentazione pei parametri u, v:

$$\dot{x} = x + v(\alpha_1 + i\xi_1) = x + v[\alpha \cos c - i\xi + \lambda \operatorname{sen} c]. \tag{13}$$

Le (13) ci forniscono poi i valori seguenti pei coseni direttori $\dot{X}\,\dot{Y}\,\dot{Z}$ della normale, e per i coefficienti delle due forme fondamentali di S:

$$\tag{14} \begin{cases} \dot{X} = -\frac{iv}{k}\alpha - \left(\frac{1}{\cos c} + \frac{iv}{k}\operatorname{tg} c\right)\lambda + \left(i \operatorname{tg} c - \frac{v}{k\cos c}\right)\xi \\ E = 1 + \frac{2iv}{\varrho} - \frac{v^2}{k^2} \quad , \quad F = \cos c \quad , \quad G = 0, \\ D = -\frac{iv^2}{k^3 \cos c} + \frac{i \operatorname{tg} c}{\varrho} - \frac{2v}{k\varrho \cos c} \quad , \quad D' = \frac{i}{k} \quad , \quad D'' = 0. \end{cases}$$

La curvatura K di S è data da:

$$K = \frac{D'^2}{F^2} = -\frac{1}{k^2 \cos^2 c}.$$

Le formole analoghe per l'altra rigata isotropa avente per direttrice C si ottengono dalle precedenti, cambiando in esse i in $-i$.

§ 10. Per verificare quanto abbiamo asserito sulla equivalenza delle nostre trasformazioni per le superficie considerate, con quelle di Razzaboni e Demartres per le curve di Bertrand, cominciamo dal ricordare che quest'ultime consistono in ciò [1]:

Sia data una curva C di Bertrand. Scelto un angolo arbitrario σ costante, si prenda per φ un integrale dell'equazione differenziale.

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\cos c}{\varrho} + \frac{\operatorname{sen} c}{T} + \frac{\operatorname{sen} c - \cos\sigma \cos\varphi}{k(\cos c + \operatorname{sen}\sigma)}.$$

Le formole:

$$x' = x + k\cos\sigma\,[\alpha \cos c \operatorname{sen}\varphi + \xi \cos\varphi + \lambda \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi], \text{ ecc.,} \tag{15}$$

ci danno le coordinate x', y', z' dei punti di una curva C' di Bertrand, le cui curvature sono legate dalla relazione (12).

In questo modo, poichè nei secondi membri delle (15) compaiono due costanti arbitrarie, dalla curva C se ne deducono ∞^2 della stessa famiglia.

Per gli altri elementi $u', \alpha', \xi', \lambda' \ldots$ di C' analoghi a quelli di C si trovano i seguenti risultati. Posto:

$$\Delta = 1 + \operatorname{sen}\sigma \cos c - \cos\sigma \operatorname{sen} c \cos\varphi,$$

[1] Pei risultati riportati in questo paragrafo cfr. Razzaboni, *Un teorema del sig. Demartres generalizzato*, Atti del Reale Istituto Veneto, anno 1900-1901, t. LX, parte 2ª.

si ha:

$$\frac{du'}{du} = \frac{\Delta}{\cos c + \operatorname{sen}\sigma}.$$

Sussistono poi le formole:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{1}{\Delta}[\cos c + \operatorname{sen}\sigma - \cos\sigma\cos\varphi(\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma)]\,\alpha + \\ \qquad + \dfrac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c)\,\xi + \cos\sigma\cos\varphi\,\lambda \\ \xi' = \dfrac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}[\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma]\,\alpha + \\ \quad + \dfrac{1}{\Delta}[\cos\sigma\cos\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) + \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)]\,\xi - \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\lambda \\ \lambda' = -\dfrac{\cos\sigma}{\Delta}[\cos c\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c\cos\sigma + \cos\varphi]\,\alpha + \\ \qquad + \dfrac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)\,\xi + \operatorname{sen}\sigma\,\lambda. \end{cases}$$

§ 11. Consideriamo una delle curve C' trasformate di C, e indichino $\overline{C'}$ e $\overline{C}$ le rispettive curve di Bertrand coniugate. Sieno S_1, S_2 le due rigate isotrope aventi $\overline{C}$ per curva direttrice; ed S'_1, S'_2 le analoghe per C'. Faremo vedere che: S_1 ed S'_1 sono falde fuocali di una congruenza W, sono quindi trasformate di Bäcklund l'una dell'altra.

Per giungere a questo risultato, cominciamo dall'osservare che tenendo conto delle (12)*, le (13) e le (14) ci dicono che per le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto di S_1, e per i coseni direttori X_1, Y_1, Z_1 della normale in esso avremo le seguenti espressioni coi parametri u, v:

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 = x + k\operatorname{sen} c\,\xi + v(\alpha + i\xi), \\ X_1 = -\dfrac{1}{\cos c}\left(\operatorname{sen} c + \dfrac{iv}{k}\right)\alpha - \left(i\operatorname{tg} c - \dfrac{v}{k\cos c}\right)\xi + \lambda. \end{cases}$$

Gli elementi analoghi x'_1, y'_1, z'_1 ; X'_1, Y'_1, Z'_1 di S'_1, a causa delle (13), (14), saranno così espressi pei parametri u, v';

$$(18)\quad \begin{cases} x'_1 = x' + v'[\alpha'\cos c - i\xi' + \lambda'\operatorname{sen} c], \\ X'_1 = -\dfrac{iv'}{k}\alpha' - \left(\dfrac{1}{\cos c} + \dfrac{iv'}{k}\operatorname{tg} c\right)\lambda' + \left(i\operatorname{tg} c - \dfrac{v'}{k\cos c}\right)\xi', \end{cases}$$

ove α', ξ', λ'... sono quelli dati dalle (16).

Vediamo ora di trovare le condizioni alle quali debbono soddisfare v, v', affinchè la retta che unisce il punto $P \equiv (u, v)$ di S_1, col punto $P' \equiv (u, v')$ di S'_1 tocchi in P, P' rispettivamente S_1, S'_1. Queste condizioni che si scrivono così:

$$\sum X_1(x'_1 - x_1) = 0 \quad , \quad \sum X'_1(x'_1 - x_1) = 0,$$

si riducono, tenendo conto delle (15), (16) e delle (17), (18), ad un'unica, bilineare in v, v', della forma:

$$Avv' + Bv + Cv' + D = 0,$$

ove A, B, C, D sono funzioni della sola u. Questa relazione fa corrispondere ad ogni punto P di S_1, un punto P' di S'_1, in modo che la retta PP' tocca in P, P' rispettivamente S_1 ed S'_1.

Vediamo dunque che effettivamente S_1, S'_1 sono le due falde fuocali di una certa congruenza, e siccome su di esse le generatrici $u =$ costante, ossia le assintotiche di uno dei sistemi, si corrispondono, così questa congruenza è W, c. d. d.

Ora se indichiamo con S, S_2 e con S', S'_2 le due coppie di rigate isotrope relative rispettivamente alle curve $C, \overline{C'}$, risulta subito da quanto precede che S, S' sono legate da una trasformazione di Bäcklund, e che identica cosa accade per $S_2 . S'_2$.

Se ora immaginiamo di far variare C' in modo che essa assuma le forme delle ∞^2 trasformate di Razzaboni della C, è chiaro che le ∞^2 superficie S' corrispondenti saranno tutte le trasformate di Bäcklund della S. E ciò prova quanto asserivamo al principio del § 9 sull'equivalenza delle due trasformazioni.

§ 12. Si possono osservare alcune altre proprietà del sistema delle otto superficie relative alle curve $C, C', \overline{C}, \overline{C'}$. Intanto abbiamo veduto che S, S_1, S_2, S_3 sono legate rispettivamente ad S', S'_1, S'_2, S'_3 da una trasformazione di Bäcklund.

Facciamo ora vedere che S_1, S_2 sono legate ad S da una di tali trasformazioni. Basterà perciò che ci si valga dello stesso procedimento usato per le due superficie S_1, S'_1. Ora usando le (13), (14) nelle quali si cambi v in v', relative ad S; e le (17) relative ad S_1, si trova che le condizioni:

$$\sum X_1(\dot{x} - x_1) = 0 \quad , \quad \sum \dot{X}(\dot{x} - x_1) = 0$$

si riducono all'unica relazione bilineare in v, v':

$$\frac{i}{k}\left(1 + \frac{1}{\cos c}\right) vv' + v \operatorname{tang} c + v' \operatorname{tang} c - ik \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\cos c} = 0. \tag{20}$$

Mentre per mezzo delle (13), (14) ove al solito si ponga v' in luogo di v, e di quelle relative ad S_2:

$$x_2 = x + k \operatorname{sen} c\,\xi + v(\alpha - i\xi)$$

$$X_2 = -\frac{\alpha}{\cos c}\left(\operatorname{sen} c - \frac{iv}{k}\right) + \left(i \operatorname{tg} c + \frac{v}{k \cos c}\right)\xi + \lambda$$

che si ottengono dalle (17) cangiandovi i in $-i$, si trova che le altre condizioni:

$$\sum(\dot{x} - x_2) X_2 = 0 \quad , \quad \sum(\dot{x} - x_2)\dot{X} = 0$$

coincidono nell'unica:

$$\left(\frac{i}{k} - \frac{i}{k \cos c}\right) vv' - v \operatorname{tg} c + v' \operatorname{tg} c - ik \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\cos c} = 0. \tag{21}$$

Di qui segue appunto nel solito modo che SS_1, SS_2 sono coppie di falde fuocali di due congruenze W. Si ha poi manifestamente che anche S_3 è legata ad S_1, S_2 da due trasformazioni di Bäcklund.

Indicando con σ_1, σ_2 gli angoli dei piani fuocali per le due congruenze pseudosferiche, aventi rispettivamente SS_1, SS_2 per superficie fuocali, si trova, usando le (20), (21), che:

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma_2 = \sum \dot{X} X_1 = \sum \dot{X} X_2 = -\frac{1}{\cos c}.$$

Poichè cambiando i in $-i$ non cambia $\cos c$, così vediamo che S, S_1, S_2, S_3 formano una quaterna del teorema di permutabilità, essendo S_1, S_2 legate rispettivamente ad S, S_3 da una B_σ, con σ dato dalla relazione:

$$\cos\sigma = -\frac{1}{\cos c}.$$

Conseguenza analoga si trae subito per la quaterna S', S'_1, S'_2, S'_3.

Sarebbe poi facile vedere, per mezzo delle formole trovate, che la trasformazione che lega ciascuna superficie della prima quaterna alla corrispondente della seconda è una B_τ, essendo τ lo stesso per tutte e quattro le coppie. Le due quaterne dette possono quindi dedursi l'una dall'altra con una trasformazione B_τ. A complemento di queste considerazioni diremo poi che il prof. Bianchi ha dimostrato, che se con la costruzione di Bioche si costruiscono le quattro deformate rigate $\sum$, $\sum'$, $\overline{\sum}$, $\overline{\sum'}$ dell'iperboloide di rotazione ad una falda, relative alle quattro curve C, C', $\overline{C}$, $\overline{C'}$, si ha che $\sum'$, $\overline{\sum}$; $\sum$, $\overline{\sum'}$ sono falde fuocali di due congruenze W.

Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche, generali di grado superiore al quarto; raccolto, ordinato e pubblicato a cura del prof. E. BORTOLOTTI.

(Lavoro presentato dal Socio V. CERRUTI ed approvato dal Socio U. DINI)

Fra le carte che ancora ci rimangono del matematico modenese PAOLO RUFFINI (¹), esiste una serie di lettere, relative ai giudizi che i matematici del suo tempo fecero sulle scoperte della insolubilità di equazioni di grado superiore al quarto, e delle proposizioni fondamentali della teoria dei gruppi di operazioni.

Non deve far meraviglia, leggendo queste lettere, la incredulità, la prevenzione onde furono accolte scoperte, così importanti da cambiare addirittura indirizzo agli studî algebrici; quando si rifletta che, dal giorno in cui SCIPIONE DAL FERRO trovò la soluzione delle equazioni del terzo grado, non sforzo di ingegno, nè improbità di travaglio si risparmiarono, per giungere alla generale soluzione delle equazioni algebriche; e che l'opera del RUFFINI, intesa a mostrare la vanità di quegli sforzi, veniva alla luce quando appunto la meta pareva più prossima (²).

Meraviglierà piuttosto la grandezza d'animo di quel misconosciuto precursore, la saldezza dei suoi convincimenti, ed il fervore che pose nel difendere e nel divulgare le sue idee e le sue opere.

In queste lettere lo vediamo anzitutto chiedere, con fermezza dignitosa, alla *Accademia di Francia*, un giudizio decisivo sulle sue scoperte, che una frase del rapporto, letto all'imperatore NAPOLEONE nella seduta del 6 febbraio 1808 del Consiglio di Stato, sullo stato delle scienze, delle lettere e delle arti, e sul loro progresso dal 1799, pareva voler mettere in dubbio (³).

(¹) Sono conservate nella *Biblioteca della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena*, cui furono donate dal pronipote avv. LUIGI RUFFINI.

(²) L'aspettazione dei matematici di quel tempo è espressa, con linguaggio immaginoso, dal MONTUCLA, nella sua *Histoire des Mathématiques*, con le note parole: *Les dehors de la place sont enlevés de toutes parts; mais renfermé dans son dernier réduit, le problème s'y défend encore en désespéré. Chaque nouvel effort pour l'y forcer, rencontre de nouveaux retranchemens plus redoutables que les précédens. Quel sera le génie heureux qui l'emportera d'assaut, ou le forcera de capituler?* (Tome III, pag. 18).

(³) Documenti dal I al III. Le opere che il RUFFINI aveva pubblicate erano le seguenti:

I. *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione delle equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto* (Bologna, 1799).

Leggiamo, non senza sconforto, gli argomenti che quegli accademici, accamparono per esimersi dal giudicare, fors'anco dal leggere, le opere del RUFFINI [1] e vediamo questi, non stanco nè sfiduciato, senza aspettare che il manoscritto fosse tornato in patria, rivolgersi alla *Società Reale di Londra* [2], e, non pago delle vuote frasi di plauso quivi riscosse, dar nuova opra, nel semplificare e ricomporre le sue dimostrazioni; fino a ridurle a quella forma, che per semplicità e chiarezza non fu più superata, e che per lungo tempo, con altro nome, fu data a modello nelle scuole e nei testi [3].

Poi, interrogare e spronare tutti i dotti del tempo, dal GAUSS e dal CAUCHY al DE ZACH ed al PASQUICH, senza che le sue insistenti premure, e gli uffici di mecenati illustri, riuscissero a smuovere la pigrizia dei dotti e la prevenzione degli studiosi.

II. *Della soluzione delle equazioni algebriche determinate particolari di grado superiore al quarto* (Mem. Soc. It. delle Scienze, Tomo IX, 1802).

III. *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo* (stesso volume).

IV. *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto e lettera Abbati* (Tomo X, 1803).

V. *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* (Memoria coronata dalla Soc. It. delle Scienze, a. 1804).

VI. *Risposta ai dubbi propostigli dal Socio G. I. Malfatti* (Tomo XII, a. 1805).

VII. *Riflessioni intorno al metodo proposto dal Socio Malfatti* (stesso volume).

VIII. *Della insolubilità delle equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto, qualunque metodo si adoperi* (Ist. Naz., Tomo I, 1807).

IX. *Alcune proprietà generali delle funzioni* (Soc. It. delle Scienze, Tomo XIII, 1807).

Il giudizio su queste opere è riassunto nella frase seguente:

... *Mr.* RUFFINI *entreprit de prouver qu'il est impossible.*

Questo passo, fu interpretato nel senso più sfavorevole al RUFFINI. Lo rileviamo, oltre che dalla minuta della lettera al DELAMBRE, più oltre riportata, dalle frasi seguenti di una lettera del PAOLI al RUFFINI, stampata nel vol. I, serie III, delle Memorie dell'Acc. di Sc. di Modena:

« ... Anche quella parola *entreprit,* porge l'idea di un tentativo più tosto infelice che for« tunato, e convengo che Ella non possa esserne contento. Ma non è sperabile che al di là dai « monti vogliano render giustizia agli italiani; è abbastanza se ci accordano qualche piccola cosa. « Credo però che Ella farebbe bene, se profittando di qualche opportunità esponesse di nuovo la « sua dimostrazione, diradandone per quanto è possibile le materie in una prima prova, e riser« bandosi a completarla con riflessioni ulteriori: oppure spezzandola in tanti teoremi separati, dal« l'unione dei quali venga poi a formarsi la dimostrazione. Forse con questo compenso Ella otter« rebbe che fosse letta dai francesi, giacchè fin qui è chiaro che non l'hanno letta, spaventati forse « dalle sue apparenti complicazioni.

« Condoni queste riflessioni alla stima ed amicizia che Le professo ed al mio affetto per l'onor « nazionale... ».

(1) Documenti dal IV all'XI.

(2) Documenti dal XII al XVI.

(3) Il BURKHARDT, nel suo studio: *Paolo Ruffini e i primordi della teoria dei gruppi* (tradotto da E. PASCAL nel tomo XXII della serie II, *Ann. di Matematica*) dimostra che la dimostrazione data dal RUFFINI nella sua forma ultima, non è sostanzialmente diversa da quella che molti anni dopo fu divulgata col nome del WANTZEL.

Non senza vantaggio alla storia della scienza, sarà, spero, la pubblicazione di questa parte del carteggio: segnatamente delle lettere del marchese Rangoni, e di quelle di A. Cauchy.

Le prime, per le notizie che ci danno dei matematici tedeschi; le ultime, perchè tolgono ogni dubbio, relativo alla discendenza dalle opere di Ruffini delle idee e delle proposizioni che segnarono l'inizio della teoria dei gruppi di operazioni e che, per lungo tempo attribuite al Cauchy, anzi annoverate fra le scoperte sue più insigni (1), furono dal Burkhardt (2) restituite al loro primo scopritore.

Il Cauchy, che nei suoi scritti non accenna al Ruffini, aveva egli, di propria divinazione, rintracciato quelle idee e trovato quei risultamenti? La domanda non è oziosa, perchè vediamo il nome di Ruffini presto cader nell'oblio, e le sue idee invadere e rinnovare tutti i rami della scienza matematica; ma la risposta ci è data dallo stesso Cauchy, che in quelle lettere dichiara e dimostra di aver piena conoscenza delle opere di Ruffini.

E fu, senza alcun dubbio, per non incorrere in quella preventiva disapprovazione, onde allora si gratificavano i tentativi del Ruffini, e per il timore di non essere con questi accomunato (3), che egli evitò di citare la fonte d'onde aveva tratto quei suoi risultamenti (4).

Ho disposto il carteggio in ordine cronologico (5), completando le lettere con le minute di quelle scritte dal Ruffini.

Queste minute, quasi sempre senza data nè indirizzo, le rintracciai sfogliando i quaderni di appunti, o cercando di mettere ordine nei pacchi di carte manoscritte.

Ivi, mischiate alla rinfusa (6), ho anche rinvenuto le lettere che qui saranno pubblicate, e moltissime altre di grande interesse per la storia della scienza, che, ordinate per autori e per data, sono ora conservate nella Biblioteca dell'Accademia di Modena, e delle quali spero di pubblicare fra breve un catalogo completo.

Ho anche avuto la fortuna di ricostruire i manoscritti autografi di quasi tutte le opere di Ruffini, e di raccogliere molte osservazioni dello stesso R. e d'altri, sulle opere medesime. Materiale prezioso per una ristampa delle opere complete di Ruffini; quando gl'italiani sentiranno il dovere di riparare all'ingiusto oblio, nel quale per un secolo lasciarono quel sommo geometra, il maggiore, dopo il Lagrange, che essi possano vantare nella prima metà del secolo XIX.

Poche e brevi note esplicative ho aggiunto alle lettere, per se stesse chiarissime; ho creduto tuttavia opportuna la pubblicazione delle due Appendici.

(1) Cfr. Valson, *La vie et les travaux du Baron A. Cauchy*, Paris, 1868, vol. 1°, pag. 49.

(2) Cfr. loc. cit.

(3) Timore non ingiustificato, come si vedrà leggendo il Rapporto dato nella Appendice *A*.

(4) Cfr. Burkhardt, loc. cit.

(5) Qualche lieve trasposizione è giustificata dalla opportunità di non disgiungere lettere di uno stesso autore, o relative ad uno stesso argomento.

(6) Questo disordine le ha salvate dalla rapacità dei cacciatori di autografi. Sono invece sventuratamente andate perdute quelle che il Ruffini teneva in maggior conto e che aveva raccolte in una cartella con scrittovi sopra: *Carteggio con uomini illustri*. L'avv. L. Ruffini, ricorda di aver visto quella cartella, e che, fra le altre, conteneva lettere di Laplace e di Lagrange.

La prima contiene il *Rapporto sulla Memoria di* CAUCHY: « *Essai sur le calcul des fonctions symétriques...* » ed è, in qualche modo, un documento ufficiale del giudizio che quei matematici facevano, e dell'opera del RUFFINI, e del genere di studî che da quell'opera prese origine.

La lettura di tale rapporto (¹) determinò il RUFFINI a pubblicare la sua Memoria: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche* e, come le prime XVI lettere del carteggio si aggirano intorno al giudizio di DELAMBRE del 1808, le ultime possono dirsi tutte provocate da quello del LEGENDRE del 1813.

La seconda *Appendice* contiene due minute di lettere di RUFFINI al LAGRANGE, che non avrei potuto mettere nel testo, senza allentare lo stretto legame che unisce le lettere quivi pubblicate, ma che si riferiscono esse pure allo stesso argomento, e la cui importanza niuno vorrà disconoscere.

La lettera di GIUNONE, ad esse aggiunta, serve solo a stabilire la data approssimativa della seconda di quelle minute, e dell'epoca in cui LAGRANGE venne in possesso dell'opera di RUFFINI.

I. — *Minuta di una lettera di* PAOLO RUFFINI *al Sig.* DELAMBRE *Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia.*

(manca la data).

Nel rapporto presentato a S. M. I. e R. sopra lo stato attuale delle matematiche ho veduto che Ella si è compiaciuto di nominarmi, dicendo che io ho *intrapreso* di dimostrare l'impossibilità della soluzione generale delle Equazioni Algebriche di grado superiore al 4°. Attribuisco ciò ad alto onore per me e le ne rendo i più vivi ringraziamenti, e le ne protesto la più sincera riconoscenza. Siccome però io mi lusingo di avere *non solamente intrapreso a dimostrare* l'indicato Teorema, ma di *averlo dimostrato realmente*: e siccome dalle note aggiunte dal Sig. Lagrange nell'ultima edizione del suo libro « De la Résolution des Eq.ⁿᵉ numériques », parmi vedere che questo sommo matematico non è punto persuaso dell'accennata dimostrazione (²), mi è venuto in pensiere di presentare il Teorema medesimo a codesto Istituto acciocchè venga esaminato e graziosamente pronuncii sopra la verità della cosa.

(¹) Di ciò parlerò più diffusamente in una nota alla lettera XVI, ivi pubblicherò ancora alcune varianti, inedite, alla prefazione della Memoria di RUFFINI.

Fra le carte di R. trovai *due* copie manoscritte di quel Rapporto, delle quali una (lettera XVII) gli fu inviata dal marchese Rangoni.

(²) Non trovo nelle Note di quell'opera nessuna frase che giustifichi simile deduzione; nella INTRODUZIONE invece trovasi la frase: « *et on peut assurer d'avance que quand même on* « *parviendrait à résoudre généralement le cinquième dégré et les suivans, on* « *n'aurait par là que des formules algébriques, précieuses en elles-mêmes, mais très peu utiles* » ... alla quale parmi che qui il R. si riferisca.

So che l'Istituto nulla vuol pronunciare sulle cose già pubblicate; ma la Memoria che a tal fine penserei di spedire sarà in qualche maniera nuova: mi sono occupato di simile argomento più volte; considerando ora la soluzione algebrica ed ora una qualunque anche trascendentale, ma la dimostrazione che presenterei in adesso, sarebbe più semplice delle precedenti, benchè da loro dedotta, e potendosi, posti i principi già stabiliti dal Sig. Lagrange intorno alla permutazione delle radici, considerare quasi come elementare, ha così una condizione nuova per cui mi sembra che l'Istituto potrà avere la compiacenza di pronunciare su di essa senza deviare dalle sue costituzioni. Prima però di spedirla, sonomi preso l'ardire d'interrogar Lei, acciocchè si degni consigliarmi se deggio presentarla o no: conosco abbastanza la sua bontà e gentilezza, onde essere sicuro, che si compiacerà di rispondermi e dirmi come mi deggio regolare.

Mi sono presa la libertà di scriverle in lingua Italiana sapendo dalla Sua gentilissima inviata alla nostra Società Italiana delle Scienze, quanto a Lei aggradisca la nostra lingua.

Perdoni il disturbo che le reco, e con la più alta stima ed ossequioso rispetto mi rasssegno

---

II. — *Carlo Testi* [1] *al Professor Ruffini membro della Legion d'onore.*

« L'Istituto riceve memorie ancorchè non iscritte in Francese, e ne prende co-
« gnizione; vengono tosto rimesse alla rispettiva classe: ma fate sentire al Sig. Ruf-
« fini che in matematica se non sono cose d'importanza, e di molta solidità non
« occorre esporsi, perchè piuttosto le mettono in ridicolo, e lo stesso La Grange è
« il primo, colla sua flemma, a trovare tutto poco degno d'attenzione. In Chimica
« e Matematica qui ci considerano poco [2], e si dolgono che a noi quasi non sian
« noti i libri, e le scoperte nuove, e che fra noi si discuta ciò che da molto tempo
« è stato altrove deciso ».

Questa è la risposta che ho avuta da Parigi, della quale Ella userà colla solita di Lei prudenza.

[1] Senatore, uomo politico modenese, era allora addetto alle relazioni estere presso il Ministero degli affari esteri in Milano.

[2] Questa opinione era allora divisa da molti: nel t. I, pag. 5 della *Histoire de l'Ac. R. des Sciences* si legge: *enfin le renouvellement de la vraie philosophie a rendu les Académies de Mathématique et de Physique si nécessaires qu'il s'en est établi aussi en Italie, quoique d'ailleurs ces sortes des sciences ne regnent guère dans ce pays-là*... E, nelle note della grande geografia del Guthrie, il Lalande scriveva che di quel tempo l'Italia *non vantava un uomo superiore, salvo che nella musica.*

L'affermazione relativa al Lagrange è interamente gratuita.

Forse è un po esagerata, ma in fondo la credo vera.
Sono con tutta la stima

Casa, 18 luglio 1806 (¹).

Suo affmo
C. Testi.

FORIS { Al Sig. Professore
Ruffini
Membro della Legion d'onore
S. R. M. }

III. — *Minuta di una lettera di* Paolo Ruffini *al Segretario dell' Istituto* Delambre.

(manca la data).

Monsieur,

Per parte del Sig. Senatore Testi ho avuto il riscontro alla lettera, che io mi presi la libertà di scriverle, e giacchè Ella dice, che posso presentare a codesto Istituto la nota Memoria, e presentarla anche scritta in Italiano; ciò faccio attualmente, e prego Lei vivamente a volermi riscontrare la decisione dell' Istituto medesimo. Il ritardo ha fatto sì, che ho potuto eseguire e aggiungere delle riflessioni ulteriori intorno alla soluzione delle Equazioni di 3° e 4° grado, e che la Memoria ha per così dire cambiato di aspetto, ed ha cambiato di titolo. *Qualunque sia per essere il sentimento dell' Istituto, sappia Ella bene che io non cerco che la verità; e che esso sarà per me sempre onorevole.*

Troppo giuste sono le lodi che Ella dà al metodo del Sig. Budan (²) di sciogliere le Equ. numeriche; avrei però desiderato che avesse Ella avuta occasione di vedere la Memoria che sopra lo stesso argomento presentai già alla nostra Società Italiana, che da essa riportò graziosamente il premio e che fu poi stampata nel 1804 fuori degli Atti. Coincido col sig. Budan nella maniera di fare le trasformazioni successive e nel servirmi dei decimali: il metodo poi che propongo nella terza parte è bensì affatto diverso dal metodo di Budan, e appoggiato a dei principii molto più difficili e complicati dei principii semplicissimi, a' quali si appoggia quello di Budan; però nell' uso pratico lo trovo sufficientemente spedito: confesso inoltre che in questa terza parte per la fretta con cui l' ho formata, ho affastellato troppe cose (³).

(¹) Data evidentemente sbagliata, dovrebbe essere 1808.

(²) Si riferisce al brano già citato al rapporto storico del 1808.

(³) La Memoria cui qui accenna il Ruffini ha per titolo: *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado.* Memoria del dott. Paolo Ruffini, pubblico professore di matematica sublime in Modena. (Modena presso la Società Tipografica, 1804). Questa Memoria vinse il premio di zecchini sessanta proposto dalla Società dei XL con programma del 19 luglio 1802 *a chi meglio ed interamente esponesse il metodo più breve, cioè men faticoso, per trovare le radici numeriche di una equazione di qualunque grado.*

Quella del Budan è posteriore, fu stampata nel 1807.

La prego perdonarmi questa piccola digressione che la circostanza di scriverle mi ha eccitato a fare. Frattanto col più ossequioso rispetto e la più profonda venerazione mi dò l'onore di dirmi...

Al Segretario dell'Istituto Delambre.

IV. — *Institut de France, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.*

Paris, le 18 [1]

L'un des Secrétaires perpétuels de la Classe.

« M. La Grange, Legendre et La Croix ont été nommés Commissaires pour examiner le Mémoire de Monsieur Ruffini.

« M. Moscati [2] avait promis de lui annoncer la remise de son Mémoire à la « Classe des sciences de l'Institut ».

In aggiunta a queste righe di pugno del Sig. Delambre può lo scrivente Montecuccoli [3] assicurare il Sig. Cav. Prof. Ruffini che la sua memoria, stata presentata all'Istituto nella seduta del giorno 5 corrente Aprile, è attualmente presso il Senatore Conte La Grange che l'ha fatta vedere allo scrivente insieme colla lettera accompagnatoria del Sign. Ruffini. Sembra peraltro a chi scrive che il Sig. La Grange, forse perchè distratto da altre occupazioni, non sarà così sollecito a presentare il suo rapporto.

Si lusinga il Montecuccoli di essere iscusato pel suo ritardo a dare questo riscontro; ma non potendo disporre liberamente di sè stesso negli scorsi giorni, dedicati all'equipaggio della Consorte [4], alle funzioni di Corte ed alle Presentazioni e Visite... (*parola illeggibile*) ha dovuto necessariamente differire quella a Mr. Delambre, che è stato gentilissimo ed ha invitato il Montecuccoli ad intervenire alle Sedute private della Classe di Scienze.

Lo scrivente coglie questo incontro per riconfermare al Sig. Cav. Professore i sentimenti della più distinta stima e sincera amicizia e per raccomandargli Raimondino [5] ad ogni sua occorrenza.

Parigi, 15 Aprile 1810.

Complimenti di mia moglie che fa le stesse raccomandazioni.

(1) Manca la data.

(2) Pietro Moscati, medico e fisico insigne. Fu Presidente del Direttorio della Repubblica Cisalpina, in quel tempo era consultore del Vice Re e Direttore Generale della Pubblica Istruzione nel Regno d'Italia.

(3) Patrizio modenese discendente dal famoso capitano Raimondo Montecuccoli, era podestà di Modena ed addetto alla corte dell'imperatore.

(4) Madama Franco, dama d'onore dell'imperatrice.

(5) Figlio del Marchese Montecuccoli.

P. S. Sempre più si conferma la probabilità che sia incinta S. M. l'Imperatrice la quale è soggetta a frequenti sconcerti di stomaco. Anche l'Imperatore ha una costipazione. Ieri sono partiti per Compiègne il Medico Primario ed il Chirurgo ostetricante. Al ritorno delle primarie cariche italiane che sono andate a Compiègne per fare la corte alle LL. MM., si saprà se sia differito o sospeso il viaggio stabilito a Ancona per vedere i lavori del canale di S. Quentin (*sic*).

V. — *Institut de France, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.*

Paris, le 27 Juin 1810.

L'un des Secrétaires perpétuels de la Classe.

« J'espère voir aujourd'hui même M^r^. Lagrange. Je le prierai d'accélérer le rap-
« port. J'aurai l'honneur de communiquer la réponse à Monsieur Le Comte de Mon-
« tecuccoli.

« Je le prie d'agréer l'hommage de mes sentimens distingués » [1].

VI. — *Institut de France, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.*

Paris le 19 avril 1811.

Le Secrétaire perpétuel pour le Sciences Mathématiques à Monsieur Paolo Ruffini.

Monsieur,

D'après l'autorisation que vous m'aviez donnée j'ai redemandé votre Mémoire sur la solution algébrique des Equations, aux Commissaires qui vous avoient été donnés par la classe des Sciences dans sa séance du cinq Avril 1810, il était entre les mains de M. Lagrange.

Les délais de ce grand géomètre, l'espèce de répugnance qu'il montrait à prononcer sur une question aussi difficile, m'ont fait juger qu'il ne feroit jamais son rapport et les autres membres de la Commission m'ont déclaré qu'ils se garderaient bien d'émettre une opinion quand Mr Lagrange n'avoit pas arrêté la sienne ou qu'il hésitoit à la manifester [2]. En conséquence j'ai repris le mémoire et je suis prêt à vous le renvoyer

[1] Questo biglietto, scritto su carta intestata del Segretario dell'Istituto Francese, è di pugno del Delambre.

[2] Esaminando le lettere che seguono, ci persuaderemo che, per quel che riguarda il Lagrange non si può accettare questo giudizio del Delambre. Il Lagrange, che conosceva le implacabili e piccine guerricciole accademiche (chi vuol essere edificato su cotesto punto legga la sua corrispon-

per la voye que vous voudrez bien m'indiquer. Car j'ai malheureusement égaré votre dernière lettre et je ne me souviens pas même si elle contenait quelques instructions à cet égard.

Agréez l'assurance de la considération très distinguée avec laquelle j'ai l'honneur d'être.

Monsieur,

Votre très humble
et très obéissant serviteur
DELAMBRE.

FORIS { A Monsieur
Monsieur Paolo Ruffini
Professeur de Mathématiques à l'école du génie
à
Modène
Italie.

---

denza col D'ALEMBERT, op. di LAGRANGE, vol. XIII), allora sui settantacinque anni e già presso alla tomba, benchè persuaso della bontà dei ragionamenti del R., (v. lettera XII di GAULTIER DE CLAUBRY del 1 agosto 1811 nelle pag. seguenti) non volle impegnarsi in una questione, in cui avrebbe avuto contrari, non solo i più influenti fra i suoi colleghi, ma l'universale opinione dei matematici del suo tempo, e si astenne dal pronunziare alcun giudicio.

Questo silenzio fu male interpretato, ed il nome di LAGRANGE chiuse la strada ad ogni opposizione del R. Il LAGRANGE era infatti riverito ed amato, specialmente dagli italiani, ed era nota la sua imparzialità e giustizia, di cui qui amo citare un esempio assai caratteristico:

« Le Mémoire intitulé *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes* suivit « de près; l'examen en fut renvoyé à LAGRANGE. Tout, dans cette Oeuvre nouvelle devait intéresser « l'auteur de la Mécanique analytique, non lui plaire; on y proposait en effet, une route directe pour « atteindre, sans aucun postulatum, le but qu'il s'était proposé dans son bel Ouvrage. Quel que fut « son esprit de justice, Lagrange devait aborder un tel examen avec quelque prevention: c'était « dans son domaine, en quelque sorte, qu'on voulait innover et ouvrir une voie nouvelle. Le Mémoire « de Poinsot s'imprimait dans le *Journal de l'École Polytechnique*; il en porta les épreuves à « Lagrange qui dans des *Notes marginales* renvoyées peu de temps après, éléva, pour condamner « la tentative nouvelle, les objections les plus subtiles. Un jugement motivé et tombé de si haut devait « sembler sans appel; Poinsot sans se décourager, et acceptant la discussion sur le terrain étroit « où elle se présentait, répondit sur les marges mêmes à côté des critiques de Lagrange; sans « multiplier le discours, il y oppose phrase à phrase, rend mot pour mot en quelque sorte, sans s'écarter « de la politesse due, mais sans aller au dela, et en homme qui attentif à la vérité seule ne prétend « s'incliner que devant des arguments décisifs. La réplique fut immédiatement renvoyée, et le lendemain de bonne heure, en sortant de sa classe, Poinsot, un peu ému peut être, se présentait « chez l'auteur de la Mécanique Analytique. La conversation fut longue et LAGRANGE, il faut le « croire, n'en conserva pas mauvais souvenir car, moins d'un an après, il faisait prier Poinsot de « venir le voir. — *J'ai appris*, lui dit-il, *qu'on allait créer des inspecteurs généraux de l'Université,* « *et j'ai écrit aussitôt à* M. de Fontanes *que vous deviez en être*; *mais, s'il le faut, j'irai trouver* « *l'empereur, qui ne me refusera pas* ». Cfr. *Notice sur Louis Poinsot par* J. Bertrand. Journal des Savants, n. de juillet 1872).

Del resto un altro fra i commissari non si peritò punto di emettere la sua opinione, e completamente sfavorevole al RUFFINI, sia privatamente al GAULTIER DE CLAUBRY (lettera XII), sia in un pubblico rapporto all'Istituto di Francia (v. Appendice *A*).

VII. — *Paolo Ruffini a Delambre.*

Monsieur,

Il m'a été bien dégoûtant, qu'aucun de la Commission ait eu la complaisance de lire mon Mémoire, ou d'en faire le rapport: mais il faut avoir patience. Je vous prie de remettre ce Mémoire a S. E. Mr. le Comte Marescalchi (1).

J'ai l'honneur de vous assurer mon éstime la plus profonde et de me dire... (2).

VIII. — *Institut de France, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.*

Paris, le 18 Mai 1811.

Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences Mathématiques.

Monsieur,

Je conçois parfaitement que vous soyez peu satisfait du peu d'empressement qu'ont témoigné pour votre Mémoire deux des Commissaires qui vous avoient été donnés. Vous ne pouvez pourtant vous dissimuler que l'opinion la plus généralement répandue est que s'il est impossible d'avoir une solution complète des équations algébriques il ne soit aussi bien difficile de démontrer clairement cette impossibilité que tout le monde croit sentir. Quel que fût le parti qu'eussent embrassé vos Commissaires, il leur fallait un travail très considérable soit pour motiver leur approbation, soit pour réfuter votre démonstration. Vous connoissez assez le prix du tems pour concevoir aussi la répugnance qu'ont la plupart des géomètres pour s'occuper longtemps des travaux les uns des autres; et si par hasard ils ne s'étoient pas trouvées de votre avis, ils auroient eu besoin d'être animés par un motif bien puissant pour entrer en lice avec un géomètre aussi savant et aussi exercé. Je me sens donc porté à les excuser et j'espère même que vous rendrez justice à leurs sentimens.

Agréez ceux de le haute estime avec laquelle j'ai l'honneur d'être

Monsieur,

Votre très humble
et très obéissant serviteur
Delambre.

(1) Federico Marescalchi, bolognese, fece parte del direttorio esecutivo della repubblica cispadana; membro della consulta di Lione (1801), usò la sua influenza per fare eleggere Bonaparte presidente della repubblica italiana. In quel tempo era a Parigi ministro delle relazioni estere.

(2) Senza data e senza firma.

IX. — *Institut de France, Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.*

Paris, le 18 Mai 1811.

Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques, à S. E. M. le Comte De Marescalchi, Ministre des Relations Extérieures du Royaume d'Italie.

Monsieur le Comte,

Je prens la liberté d'adresser à V. E. un Mémoire que M. Paolo Ruffini, de Modène, avait envoyé à l'Institut et qu'il redemande, avec la confiance que vous voudrez bien le lui faire parvevir.

M. Ruffini est un Géomètre distingué qui jouit d'une grande estime parmi les Géomètres de l'Institut. S'ils n'ont point voulu prendre parti ni pour ni contre dans la question très difficile qu'il a traité, c'est encore un hommage qu'ils ont rendu aux connaissances et à la réputation du Géomètre de Modène.

Agréez les sentimens respectueux etc.

Signé

Delambre.

X. — *Regno d'Italia.*

Parigi, li 22 Maggio 1811.

Marescalchi, Ministro delle Relazioni estere, al Signor Professore Paolo Ruffini, Membro dell'Istituto del Regno d'Italia, della Legion d'Onore, e Cavaliere dell'Ordine della Corona di ferro.

Signor Professore Stimatissimo,

Il Segretario perpetuo della prima Classe di questo Istituto per le Scienze Matematiche, Sig. Delambre, mi ha trasmesso per Lei un piego raccomandatomi con premura.

L'ho affidato per più di sicurezza e di sollecitudine al Sig. Barone Colonnello Giflenga, Aiutante di campo del Principe Vice-Re partito ieri con missione di S. A. I. per Milano dove lo rimetterà al comune nostro amico, Sig. Conte Testi.

Mi faccio un piacere di parteciparle la lettera del Sig. Delambre che accompagnava il suddetto piego e che trovo ripiena di espressioni per Lei le più gentili e le più giuste.

La prego di aggradire i sentimenti della mia perfetta stima, e considerazione.

A. Marescalchi.

XI. — *A. S. Eccellenza il Sig. Conte* MARESCALCHI *Ministro degli Affari Esteri*

Modena, a dì 5 Giugno 1811.

PAOLO RUFFINI.

Eccellenza,

Rendo a V. E. i più vivi ringraziamenti tanto per la gentile premura, che si è data di spedire al Sign. Con. Senat°. Testi l'involto consegnatole da M. Delambre, quanto pel graziosissimo pensiero di mandarmi copia della lettera a Lei scritta da M. Delambre.

Questi veramente in tal lettera si esprime verso di me troppo favorevolmente, e mi veggo troppo onorato dai membri dell'Istituto Francese: confesso però che avrei amato che Eglino avessero avuta la compiacenza di esaminare la Memoria, che avevo loro inviata, e di riferire sopra di essa; ciò non ostante, quando a V. E. accaderà di vedere M. Delambre, la prego ad avere la degnazione di esporgli essere io al sommo riconoscente per la sua gentilissima lettera, e per quella opinione troppo onorifica che Egli ed i suoi Colleghi hanno verso di me e che io so di non meritare.

V. E.. mi onora col titolo di Cav. dell'ord°. della Corª. di Ferro; ma la prego avvertire non essere io già decorato di quest'ordine.

Rinnovando a V. E. i miei più sinceri ed ossequiosi sentimenti di riconoscenza mi dò l'onore di protestarle la mia più profonda stima e venerazione.

PAOLO RUFFINI.

XII. — *G.* GAULTIER DE CLAUBRY *all'Illmo Sig. Dr. PAOLO RUFFINI, Professore di Matematiche Sublimi al Liceo di Modena.*

Illmo Signore,

ho ricevuto pochi giorni fa la sua onorevole lettera del... [1]

Non le ho risposto subito ricevuto la sua pregma volendo informarmi della cosa di cui m' incaricò.

Ho veduto M. De La Grange, gli ho dimandato, senza parlare di Lei, se aveva veduto e se si rammentava una memoria matematica di M. Ruffini.

Mi rispose che l'aveva letta, che la trovava buona ma pure che, trattando di una materia difficilissima e non dando prove abbastanza certe delle cose che avanzava l'autore, non volendo eccitare querela fra questi Matematici dell'Istituto, non aveva voluto pubblicare il suo giudizio e che perciò aveva restituita la memoria al Segretario Mr. Delambre.

Ho parlato dopo a Mr. La Croix che conosco un poco, mi disse non aver avuto mai conoscenza di questa memoria, e che non poteva perciò dirmene niente.

[1] Manca l'indicazione della data

Mi indirizzai allora a Mr. Legendre che è stato nominato Commissario per la sua memoria. Mi ripetè la medesima cosa detta già da M. De La Grange oltre di che mi disse trovare che la maniera colla quale l'autore voleva trattare la questione da lui esposta, non poteva assolutamente servire a ciò che aveva voluto provare (1). Che d'altronde non volendo avere nessuna querela con l'Autore nè eccitarne fra i matematici, preferiva non dir niente della memoria.

Tutti e due si sono accordati nel dire che stimano molto l'Autore e che trovano la memoria molto buona ma non assai concludente da decidere certamente la questione.

Ho fatto ciò che è stato nel mio potere per informarmi di tutto ciò che la riguarda: spero che giudicherà solamente delle mie intenzioni, mi fa pena di non aver potuto darle una risposta più aggradevole.

Quanto ai libri di lei che Le ho detto aver veduto all'Istituto, sono opere di matematiche stampate e che possiede la Biblioteca della Società, molto ricca in libri stranieri. Le aveva proposto di mandare le sue nuove opere per arricchire questa Biblioteca, e perchè sono persuaso che i membri per le matematiche sarebbero molto contenti di possederle. I libri stampati che si mandano all'Istituto non sono giudicati dai membri, ma sono piazzati nella biblioteca per uso degli studiosi. Ella consideri se vorrà mandarne due esemplari dopo la ragione che le ho esposta.

Se avesse qualche volta bisogno di alcuna cosa a Parigi, mi troverà sempre disposto a servirla, la prego di credermi etc. etc.

Parigi, il 1° d'Agosto 1811.

G. Gaultier Claubry
speziale dell'Ospizio di carità.

P. S. La prego, quando mi farà l'onore di scrivermi, di non scordarsi di mandarmi le sue lettere all'indirizzo di Mr. Godefroy employé à l'administration des Postes au Bureau d'arrivée Rue J. J. Rousseau + Paris.

Il mio signor Padre e mio fratello Emmanuele (2) m'incaricano di presentarle i suoi doveri, e quest'ultimo la prega di rammentarla sempre ai Signori Fabriani e Ferrari.

FORIS
Illmo Signore
Signor Dott. Paolo Ruffini
Professore di Matematiche Sublimi
al Liceo di Modena
In Modena Italia
Modena

(1) Si noti che quella Memoria è, salvo qualche modificazione formale, quella stessa che il R. stampò nel 1813 col titolo: *Riflessioni intorno alle soluzioni delle equazioni algebriche* e contiene la dimostrazione, che per lungo tempo attribuita al Wantzel, fu sempre considerata come la più facile e la più convincente del teorema di Ruffini.

(2) Charles-Emmanuel Simon Gaultier de Claubry, nato a Parigi il 25 XII 1785, morto il 24 XII 1855, seguì l'esercito di Napoleone e fece le campagne dal 1809 al 1814; e ne uscì poi col grado di chirurgo maggiore (3° regg. tiragliatori granatieri della guardia). Scrittore reputato di scienze mediche, fu aggregato in esercizio presso la facoltà di Parigi dal 1823 al 1828. Conobbe a Modena il Ruffini, questi per mezzo suo entrò in corrispondenza epistolare col fratello, scrittore di questa lettera: chimico di buona fama, professore poi alla scuola di farmacia e membro del consiglio di Sanità di Parigi, era allora, come qui si vede, speziale all'Ospizio di carità.

XIII. — *Carlo Testi a Paolo Ruffini.*

Sig. Cavaliere Pregiatissimo,

Milano, 7 Agosto 1811.

Ieri l'altro dal Sig. Panigada, e jeri dalla Posta ho ricevuta la Memoria e la di Lei lettera gentilissima coll'altra acclusa per il Signor Banks (1).

Il tutto sarà rimesso a Parigi a Madama Bird (2) quando vi sia giunta; Essa partì Giovedì scorso e le Sig. Tini andarono ad accompagnarla fino alle isole Borromee ove è seguita la dolorosa separazione proseguendo la prima il loro (*suo?*) viaggio per il Simplon, e ritornando qui le seconde ove giunsero Lunedì mattina.

La Memoria ritornata da Parigi (3), sarà da me consegnata alla Sign.... (*parola illeggibile*) la quale sta bene e mi ingiunge di salutarla. Io la ringrazio frattanto delle gentili espressioni di cui vuol ossermi cortese, e la prego ad aggradire i sentimenti della distinta stima ed amicizia coi quali mi protesto

Suo
Carlo Testi.

FORIS { Al Signor Professor Ruffini
Cav. del R. Ordine della Corona di ferro
e della Legion d'Onore
Modena.

XIV. — *C. Bird a Paolo Ruffini.*

Bath, 23 Marzo 1814.

Stimatissimo Signore,

Sono veramente mortificata di non aver potuto prima d'ora rispondere alla sua lettera ma spero VS. mi scuserà quando ne avrà intesa la ragione. Al mio arrivo a Londra mi feci una premura di portare in persona la sua Memoria a Sir Joseph Banks il quale osservandone il contenuto mi disse che i membri della Società capaci d'intenderla erano allora alla Campagna e che per conseguenza passerebbe qualche tempo prima che potesse darmi una risposta. Difatto erano passati parecchi mesi quando ricevei un biglietto di Sir Joseph nel quale mi diceva che quelli de' suoi colleghi a cui aveva fatto leggere

(1) Sir Joseph Banks, presidente della Società Reale in Londra.

(2) Questa signora, il cui nome si trova spesso anche nel carteggio del Senatore Testi (in questo archivio di Stato) era tenuta, si vede, in gran conto, e le erano affidate importanti missioni. Non sono riuscito, non ostante le più minute ricerche, a trovar nessun cenno biografico.

(3) Quella cui si riferiscono le lettere di Delambre stampate nelle pagine precedenti. La Memoria non era ancora ritornata a Modena, e già il Ruffini si adoperava per provocar su di essa il giudizio della Reale Società di Londra.

il manoscritto del D.r Ruffini l'approvavano molto. Io però non essendo soddisfatta di questo risposi a Sir Joseph per ringraziarlo della sua comunicazione e per esprimergli all'istesso tempo il mio desiderio d'ottenere una risposta a VS. diretta che contenesse l'approvazione della Società. A questo non avendo ricevuto risposta veruna e dovendo lasciar Londra consegnai ad un amico la sua lettera insieme con la nota di Sir Joseph e la mia risposta, e lo pregai di vedere se per mezzo di un suo amico che ha un fratello nell'Accademia non sarebbe possibile d'avere una risposta soddisfacente.

Ho finalmente una nota del Segretario dell'Accademia a Lei diretta e che per non esporre al rischio di perdersi copierò fedelmente per ora per sua soddisfazione riservandomi a farle avere l'originale in tempo più opportuno [1].

. . . .

. . . .

Gradisca Lei que' (*saluti*) della mia famiglia e mi creda sempre

Sua dev.ma serva
C. Bird.

XV. — *Thomas Young a Ruffini a Modena.*

Monsieur,

La Société Royale a reçu le Mémoire que vous avez eu la bonté di lui envoyer sur la Resolution des Equations; et je suis chargé de vous en rendre ses remercimens.

L'usage de la Société ne lui permet pas de prononcer son opinion sur aucun ouvrage qu'on lui adresse; mais les particuliers qui ont vu votre Mémoire en ont été très satisfaits, et ils sont d'avis que vous avez réussi à démontrer ce que vous vous êtes proposé d'établir.

Je suis Monsieur

Votre très humble
et très obéissant serviteur
Thomas Young M. D.
Secr. de la S. R. pour la corr. étr.

Londres Somerset Place
17 Mars 1814.

[1] L'originale di quella lettera non è più fra le carte di Ruffini. Una nota sulla carta che avvolge la lettera sopra riportata dice: *1833 Giugno* « Si è levato una lettera del Segretario del« l'Istituto di Scienze in Inghilterra diretta a Paolo Ruffini ed è stata data al Sig. Antonio Gan« dini di Modena per far parte della di lui Raccolta di lettere d'uomini celebri. ».

Esiste la copia fatta da Madama Bird, e di quella mi sono qui giovato, non avendo ragione di ritenerla diversa dall'originale.

La collezione Gandini è stata, in parte, depositata presso la biblioteca Estense, dove inutilmente ho cercato quel documento.

XVI. — *Paolo Ruffini à M.r Thomas Young, M. D. Secrét. de la Soc. Roy. pour la Corr. Etrang. Somerset Place à Londres.*

Aveva io inviata a cotesta Società Reale la mia Memoria avente il titolo Riflessioni intorno alla soluzione delle Equazioni generali, nell'anno 1812 ([1]).

Il lunghissimo tempo che è trascorso dacchè aveva io spedita la mia Memoria a cotesta R. S.a mi mise il sospetto che essa si potesse essere perduta; a questo sospetto altro timore scientifico si aggiunse e quindi mi determinai di rendere pubblica questa Memoria: ciò realmente ho fatto formandone un opuscolo col fare nello scritto precedente alcuni cambiamenti, coll'aggiungervi alcune note, ed una seconda parte. Dopo tutto questo m'è pervenuta pochi giorni sono copia della Sua pregiatissima lettera, venendomi nel tempo medesimo accennato che non mi si spediva l'originale acciocchè non andasse perduto e che mi si spedirebbe in seguito.

Da questa lettera veggo che quei membri della Società i quali hanno avuta la bontà di leggere il mio scritto l'hanno approvato; rendo perciò a loro i miei ringraziamenti e li rendo insieme a Lei che ha avuta la compiacenza di comunicarmi il loro sentimento; e sonomi creduto in dovere di spedire costì sei copie dell'Opuscolo quivi stampato, pregandola di ritenerne una per sè e di consegnare le altre in mio nome alla Società Reale, la seconda al Sig. Presidente dell'Accademia, la terza al Sig. Segretario ordinario e le altre due ai Sigg. Membri che hanno avuta la compiacenza di leggere la Memoria.

Lusingomi, che le ragioni sovraesposte mi scuseranno presso cotesta Società, se ho pubblicata quella Memoria che aveva ad essa offerta.

Ringraziandola nuovamente mi dò l'onore di rassegnarmi con la più profonda stima e rispetto ([2]).

([1]) La memoria partì da Modena nell'Agosto del 1811 (lettera n. XIII di C. Testi), ma la persona cui era stata raccomandata (M.me Bird), si formò alcuni mesi a Parigi prima di recarsi a Londra. Ciò risulta da alcune lettere che sarebbe troppo lungo riprodurre.

([2]) Ho trovato anche una traduzione, molto libera, in lingua francese di questa minuta, di pugno del Ruffini, con la data 7 luglio 1814.

Nel tempo che passò, dalla consegna del manoscritto a M.me Bird, alla data di questa ultima lettera, accadde un fatto, cui qui accenna il Ruffini con la frase: *altro timore scientifico*, che determinò il Ruffini a dare alle stampe la sua memoria. Voglio accennare alla pubblicazione del Rapporto letto nella seduta del 12 aprile 1813, dell'Istituto di Francia, sulla Memoria di Cauchy « *Essai sur le calcul des fonctions symétriques...* ». (V. *Appendice* A). Un passo di quel rapporto conteneva una esplicita riprovazione dell'opera del Ruffini e dei metodi di cui egli si serviva. Non solo infatti ivi si dichiarava, che le conclusioni del R. non erano generalmente ammesse, ed apparivano fondate sopra ragionamenti troppo vaghi; ma si concludeva l'esame della Memoria del Cauchy, tutta informata sulle opere del Ruffini, osservando essere tale genere di questioni *d'un moindre intérêt*, tanto da non accordare l'approvazione della Classe, se non in riguardo ai meriti che l'Autore si era acquistato con le sue precedenti ricerche sulla eguaglianza dei poliedri.

Noto di volo, che i biografi di Cauchy fanno invece, e con ragione, rilevare la grande importanza di quella Memoria.

XVII. — *G. M. Rangone* (1) *a Paolo Ruffini*.

Signor Dre Pr.ñe mio Stño,

Dalla gentilissima di Lei lettera del 5 maggio da me soltanto nel penultimo ordinario ricevuta, intendo avere codo mio nipote a Lei consegnata la cartuccia riguar-

---

Leggiamo infatti nel Valson (*La vie et les travaux du Baron A. Cauchy*, tomo I, pag. 49) ... « Cauchy pubblia en effet un nouvau Mémoire de la plus haute portée, sur le calcul des fonc« tions symétriques et sur le nombre des valeurs dont les fonctions sont susceptibles. Il convient « de le mentionner d'une manière toute particulière, parce qu'il a donné à Abel la base même de « la démonstration sur l'impossibilité de la resolution algébrique de l'équation du cinquiéme degré, « et qu'il a provoqué les belles recherches de MM. Bertrand et Serret sur la théorie si délicate « des valeurs des fonctions.... ».

C'è bisogno di ricordare che il Ruffini, già aveva percorso anche tutta la strada, che tanti anni più tardi ricalcò l'Abel? Egli, che aveva coscienza della esattezza delle sue deduzioni e del valore delle sue scoperte, non appena ebbe notizia di quel rapporto (*Notizie sulla vita e sugli scritti di Paolo Ruffini*, Modena, tip. Camerale, 1824, pag. 23): «..... intimamente persuaso « siccome egli era di aver ragione, non si sgomentò punto e cercò diremo così lo spirito degli ana« listi e di dar l'ultimo assalto alla loro pigrizia. Riprese quindi in mano l'argomento delle Equa« zioni, riepilogò ed illustrò quanto antecedentemente aveva scritto su tale materia, e pubblicò il « tutto sotto il titolo di *Riflessioni intorno alla soluzione delle Equazioni Algebriche* (Modena, 1813).

La Memoria che aveva inviata a Parigi nel 1809 ed a Londra nel 1811 formò la base di codesto opuscolo, nella prefazione del quale si legge:

«.... ma so pur'anche non potersi dire giammai eccessivamente esatto chi desidera di togliere « la taccia di *troppo vaghi a certi ragionamenti, i quali da alcuni benchè insigni geometri, non « sono stati forse approfonditi abbastanza*, e desidero così, che venga generalmente ammessa una « Proposizione, qual'è l'insolubilità delle Equazioni algebriche generali di grado superiore al 4°, « le quali da alcuni non si considera come vera, o almeno non si considera come finora bastevol« mente provata (Discorso Preliminare, pag. VII, VIII).

Qui il manoscritto porta la seguente aggiunta, soppressa nella stampa per una mala consigliata prudenza:

« L'analogia dell'argomento m'eccita a rammemorare quivi l'enunciato di una proposizione « esistente nel rapporto sulla Memoria di M. Cauchy inserito nel n. 114 del Monitore di Francia « 1813 la quale *mentre viene esposta siccome mia, si annuncia in un modo da me certamente non « usato, e la quale sotto quei tali termini coi quali si propone è assolutamente falsa.*

Nel citato rapporto si dice: « M. Ruffini *fait voir, que si l'on supposait les valeurs d'une « fonction de plus de quatre lettres égales trois à trois, ou quatre à quatre, il s'en suivrait né« cessairement, qu' elles seraient toutes égales entr'elles, ou toutes égales deux à deux*. Ora si « prenda per esempio la funzione $x' x''^2 + x' x'''^2 + x''' x'^2 - \frac{x^{\text{IV}}}{x^{\text{V}}}$. È questa formata con più di

---

(1) Gherardo di Bonifacio Rangone (1744-1815) di antica famiglia modenese fu educato a Vienna nel collegio di Savoia, ed ebbe fama di uomo colto nelle scienze matematiche. Fu a Modena consigliere di Stato e ministro fino al 1796. In quest'anno si recò a Venezia, poi a Vienna, per fuggire la invasione francese. Lasciò morendo i suoi importanti e numerosi manoscritti alla Biblioteca imperiale di Vienna. Nel tempo in che egli risiedette a Modena, costituì, con sede nel suo palazzo, una privata accademia di scienze. Molte interessanti sue lettere, oltre quelle che qui pubblichiamo, si trovano fra le carte Ruffini.

dante il rapporto fatto della memoria di Cauchy [1] e da questa pure intendo che trattasi soltanto d'uno dei di Lei teoremi che Cauchy ha bensì generalizzato, ma senza, per quanto sembra, applicarlo alla Teoria delle Equazioni, come mi era stato supposto. Ho ben presente la lettera del Sig. Pietro Abbati [2] e quant'altro relativo all'argomento si truova nelle Memorie della Società Italiana, che con mio rincrescimento sento essere cessata [3]. In queste parti il Calcolo puro non si coltiva tanto, la scienza è ardua e il frutto è più di gloria, che d'utile; per altro sarei ingiusto se non dicessi che molto e bene si studia, e singolarmente si procura di applicare alla pratica tutte

---

« quattro lettere perchè contiene le cinque $x' x'' x''' x^{\text{iv}} x^{\text{v}}$; inoltre conserva per la forma della « funzione, il proprio valore sotto la permutazione della x' nella x'', della x'' nella x''' e della x''' « nella x', onde i suoi 1. 2. 3. 4. 5 = 120, valori provenienti da tutte le permutazioni fra le $x' ... x^{\text{v}}$, « sono tra loro eguali a tre a tre.

« Dunque in conseguenza dell'esposto enunciato gl'indicati 120 valori dovrebbero essere tutti « uguali fra loro, o fra loro uguali a due a due; ma è falsa tanto l'una come l'altra di queste « osservazioni, come ognuno può vedere agevolmente da sé medesimo, risultando da tutte le permu- « tazioni fra le $x' ... x^{\text{v}}$, non più e non meno di $\frac{120}{3} = 40$ valori tutti fra loro diseguali.

« Dunque è falsa ancora la proporzione, come vien pronunciata nell'indicato rapporto.

Ed alla pag. VI, dopo le parole: « ... *l'argomento del 3° ed ultimo Capo* » si legge la seguente variante:

« Chiunque avrà compiacenza di seguirmi in queste riflessioni, potrà agevolmente riconoscere, « che l'oggetto lor principale è quello di assegnare una nuova dimostrazione dell'Impossibilità di « risolvere esattamente le Equazioni generiche di grado superiore al 4°, assai più breve e più sem- « plice delle altre da me pubblicate precedentemente (Teor. delle Equ. Soc. It. delle Sc. T. 9° — « Mem. Ist. Ital. Tom. 1°) e di confermare insieme, coll'osservare, che i principi stessi, i quali « dimostrano l'insolubilità delle Equazioni di grado superiore, dimostrano poi la solubilità delle « Equazioni di grado al 4° inferiore.

« Il Ch. Delambre, nel suo rapporto storico sopra il progresso delle scienze matematiche « dopo il 1789 e pubblicato nel 1808, dice:

« Les Mémoires de M. Lagrange sur la resolution complette des Equations littérales, en rédui- « sant le Problème à ses moindres termes avoient montré combien il est encore difficile.

« M. Ruffini entreprit de prouver qu'il est impossible.

« *Appena veduta questa proposizione, nella lusinga in cui era di avere non solo intrapreso « a provare, ma di avere provata realmente simile impossibilità*, presi ad esaminare i razio- « cini; e le basi, su cui si...

[1] Qui si accenna appunto al rapporto fatto dalla Commissione: Carnot-Legendre-Poisson, di cui si è parlato nella nota precedente.

[2] Pietro Abbati Marescotti, matematico modenese, contemporaneo del Ruffini, ha contribuito, insieme con questi, alla dimostrazione di alcuni dei teoremi fondamentali della teoria dei Gruppi di Sostituzioni. (Cfr. nel tomo X delle Memorie della Società it. delle Sc. una lettera di P. Abbati e P. Ruffini). Nel carteggio di R. ho trovato una lettera e alcuni brani di lettere di Abbati, dalle quali veramente pare doversi inferire che gli studi che egli faceva, fossero sviluppi di questioni, che lo stesso R. gli proponeva, e ciò risolverebbe la questione che il Burkhardt ha proposta (pag. 212), di ricercare cioè *se si debba attribuire al R. anche la ispirazione del contenuto principale del lavoro dell'amico suo* Abbati.

[3] Nel fatto non era cessata; ma si temeva assai che dovesse cessare. Le pratiche fatte dal Ruffini e dal Cagnoli per salvare la Società, risultano dai documenti e dalle lettere che ancora si conservano fra le carte di R. e che mi sembrano di grande importanza per la storia di questa illustre Società.

le cognizioni teoriche, e ciò in ogni ramo di scienza dalla Chimica sino alla Meccanica; e veramente ne sortono con frequenza applicazioni di gran prò e presto si diffondono. È bensì a delersi che la diversità della lingua le confini almeno per lungo tempo alla Germania d'onde nasce non di rado che altrove si cercano tuttavia e si danno per novità cose che qui sono già conosciute e praticate.

Vedo poi che a Lei non deve esser nota la memoria di La Place, intorno alla quale avrebber pur volentieri saputo il di Lei giudizio persone per Lei piene di stima: ma forse le tant'altre Lei (*sic*) occupazioni non Le lascian tempo da spendervi intorno. La ringrazio delle nuove che mi dà di S. M. Stanislaa, la quale è stata molto afflitta per la perdita che abbiamo fatto della sorella e zia rispettiva; della qual perdita per altro abbiam motivo di consolarci nei sentimenti di pietà, rassegnazione e religione nei quali è spirata.

Se mai potessi in alcuna cosa servirla, si prevalga di me liberamente, ben certo di farmi un piacere con darmi occasione di quella ben dovuta sincera stima con cui mi segno

Vienna, 26 Giugno.

Dev. Obb^mo^ Serv^e^
G. M. RANGONE

FORIS { À Monsieur
M. le Docteur Rufini (*sic*)
Professeur de Mathématiques
et Chev. de la Légion
d'Honneur
à
Modène.

XVIII.' — *Il Mse* RANGONE *a P.. R.*

Sig. Prof. Pr.ñe Stim^mo^,

Non mi diffonderò a spiegarle gl'impedimenti, pei quali non prima d'ora ho potuto rispondere al gentilissimo di Lei foglio del g^no^ 11 scorso.

Comincierò dunque, dopo averle chiesto scusa del non volontario ritardo, dal ringraziarlo (*sic*) del dono pregievolissimo, che col mezzo dei nostri Modenesi ho ricevuto, e che mi è sembrato un gran lavoro e fatto con vedute proprie ad esaurire l'argomento e porre in piena luce la verità. Quindi venendo al di Lei desiderio di avere il giudizio di alcuno dei più celebri matematici di Germania, La pregherò a riflettere se convenisse di accompagnare l'opuscolo con una lettera ch'Ella potrebbe scrivere in latino, e poi mandarmi senza indirizzo. Propongo di scrivere una lettera e di richiedere con qualche istanza il favore da Lei bramato, perchè sento non essere cosa facilissima l'ottenerlo; ma domandandolo direttamente e con qualche calore una persona del suo merito, crederei che lo dovesse conseguire. Aggiungo poi di mandar le lettere senza indirizzo, e perchè finora non so la dimora precisa di Gauss, e perchè si possa fare coi termini e titoli convenienti, e perchè l'altra, o le altre si

possano dirigere a chi meglio si crederà, avuto riguardo non solo al credito della persona ma eziandio alla compiacenza che se ne può sperare. Tre sono i soggetti che qui avrei in veduta: Bürg autore delle celebri tavole lunari; Pasquich ora astronomo a Buda, e a Lei già noto, suppongo, e di cui in ogni caso potrebbe prendere qualche idea da un'opera di lui che tempo fa mandai al M. Luigi mio nipote; e il prof. Gerstner di Praga, che si è fatto un nome con diverse opere pregievoli. Per Bürg ho anzi per buona sorte un amico di lui, che mi si è offerto, e spererei di poter anche aver qualche ufficio presso Pasquich, e quando le piacesse di sentirli entrambi io intanto passerei a Bürg il mio esemplare.

Forse si sarà smarrita una lettera, che già tempo (*sic*) scrissi al M. Luigi pregandolo a sentire da Lei, se costì sia noto un nuovo metodo di calcolo che chiamano *facoltà* (1): dico nuovo perchè non lo credo finora molto diffuso, benchè fino dal 1799 Kramp ne facesse uso nella sua opera: *Analyse des Réfractions* etc., per una facoltà adunque intendesi il prodotto di fattori che procedono in serie aritmetica: p. es. $a, a+r \,.\, a+2r, \ldots a+(m-1)r$: si segna così $a^{m/r}$, e si legge: a elevato alla facoltà m, di r. Gliene replico ora la notizia supponendo che non le dispiaccia di averla, se pur si tratta di novità.

Sono con la più sincera stima

Di Lei Sig. Prof^r. Prñe Sti^mo

Vienna, 13 Marzo 1814.

Div^mo Serv^e
G. Ms. Rangone.

FORIS { À Monsieur
M. Le Docteur Ruffini
Professeur de Mathématiques
à
Modène.

XIX. — *Il Mse G. Rangone a Paolo Ruffini.*

Signor. Prof^e Prñe mio Stmo,

In fretta rispondo alla gentilissima sua del 10 corrente: le ragioni che adduce per non iscrivere le lettere ponno avere il loro peso, ed io m'accingerò ad appagare il Lei (*sic*) desiderio. Quanto al Sig. Bürg qui presente, spererei anche di saperne il parere per mezzo di qualche comune amico. Cercherò pure di trovarlo di Gauss, *al quale se mando sens'altro l'opuscolo forse appena giungerò a sapere se l'abbia ricevuto.*

Se truovo mezzo per Pasquich tenterò anche questo, ed essendo esso, come saprà, astronomo a Buda, non mi dovrebbe riuscire tanto difficile.

(1) Fra le carte di R. c'è uno studio, appena abbozzato, nel quale si trovano le più importanti proprietà formali di coteste facoltà.

Mi conservi la sua amicizia, e mi creda immutabilmente
Di Lei Sign. Prof. Pñe Stm^{mo}

Vienna, 27 Aprile 1814.

D.^{mo} O. Serv^{o}
G. M. Rangone.

FORIS { A Monsieur
Mr. le Professeur
Ruffini
à
Modène }

XX. — *Giovanni Pasquich al M.se G. Rangone.*

Illustrissimo Signor Marchese!

Il prezioso dono degli Opuscoli del Signor Ruffini, intitolati: *Teoria generale delle Equazioni*; e *Riflessioni intorno alla Soluzione delle Equazioni algebriche generali*; che Vostra Signoria Illustrissima si è compiaciuta di farmi, mi fù dal nostro impareggiabile Signor conte di Backers regolarmente trasmesso; egli è un sicuro pegno della di lei parzialità a mio riguardo, che mi consola ed onora tanto più, quanto meno io la meritavo; e perciò mi obbliga alla più viva riconoscenza e gratitudine, di cui desidero che Vostra Signoria Illustrissima restasse (*sic*) sempre fermamente persuasa.

Ho già letto, benchè frettolosamente, tutti tre [1] componimenti con quella impazienza ed avidità, che mi doveva inspirare la fama dell'eccellente Autore; la scelta degli articoli, ordine lucidissimo, brevità, chiarezza e solidità nei ragionamenti sono quelle qualità invidiabili, da me senza difficoltà osservate, che bastano ad assicurarci del distintissimo eminente luogo del Signor Ruffini tra li rinomati Matematici. L'oggetto però principale delle riflessioni intorno alla soluzione delle Equazioni algebriche generali, ed il modo con cui lo tratta il Signor Ruffini, esige e merita d'essere pienamente approfondito da chi intraprende di decidere delle da lui proposte dimostrazioni sopra l'insolubilità delle Equazioni algebriche di grado superiore al 4°; ma questo appunto è un lavoro di cui tutte le circostanze, come della mia salute, così anche dell'obbligazione di soddisfare a moltissimi inevitabili doveri, mi rendono totalmente incapace; perciò prego Vostra Signoria Illustrissima, non già di perdonarmi, ma di compatirmi, se mi astengo da quel determinato giudizio, che forse da me aspettava; ogni altro comando, che non superi le mie forze, mi servirà di occasione a darle i più sicuri contrassegni di riconoscenza, rispetto, stima e venerazione, con cui sono e sarò sempre suo

Buda, li 2 di Dicembre 1814.

Ossequientissimo Servitore
Giovanni Pasquich
Direttore della Specola.

[1] Questo *tre* forse si riferisce al numero dei volumi; poichè la *T. delle Equ.* è in due volumi (V. lettera seguente).

XXI. — *Il Mse Rangone a P. Ruffini.*

Sig. Prof. Prñe mio Stim^mo^

Ricevei al tempo debito il gentilissimo di Lei foglio del 19 Ottobre, al quale non risposi avendolo considerato esso stesso come una risposta all'ambasciata che per mezzo di Suor Stanislaa Le aveva fatto fare.

Non ho per altro mancato di far l'uso indicatomi dei diversi esemplari della *Memoria* e ne ho mandato uno anche al celebre Pasquich unendo pure una copia della *Teoria* affinchè giudicar meglio potesse avendo tutto sott'occhio.

Dall'annessa lettera da lui scrittami Ella vedrà l'esito delle mie premure, anche il Sig. Bürg mi ha fatto dire le più belle cose del mondo, ma senza dare un giudicio: non credo per altro che in tutti sia un pretesto la mancanza di tempo per leggere ed esaminare quell'opera. Vedremo se alcun altro, cui ho trasmesso esemplari, sarà più compiacente: di Gauss finora nulla.

Mi comandi e mi creda sempre quale in fretta mi segno

Di Lei Sign^e^ Prof. Pñe Stim^mo^

Vienna 7 Dec. 1814

Obb^o^. Serv^e^
G. M. Rangone.

FORIS
À Monsieur
M. le Docteur Ruffini
Professeur de Mathématiques
à
Modène.

XXII. — *Il M.^se^ G. Rangone a Paolo Ruffini.*

Signor Prof. Prone Stim.^mo^

Ricevo il gentilissimo suo foglio del 22 scaduto, e con lei pienamente convengo; ma i nostri letterati tedeschi sono singolari. Essi non voglion far nulla per nulla, o per dir forse meglio si carican e sopracarican tanto, che non avanza loro tempo e nemmen volontà di far altro. Ogni lavoro, quando si tratta di uomini come Pasquich, Gauss, etc. vien loro tosto e ben pagato, e però quando non trattasi o di cose che devano necessariamente studiare per la cattedra e per necessaria erudizione, o per far un estratto che vien loro pagato, non sì facilmente si inducono a far fatica e meno poi a dare un sentimento che senza un serio studio non potrebbero veramente dare: in una parola non vogliono compromettersi per timore di dover poi sostenere la loro opinione, e perciò perdere un tempo che per essi sempre frutta.

Di Pasquich per altro devo dirle, ch'egli ora si truova straordinariamente occupato per la erezione della Specola in Buda, egli poi deve essere provetto negli anni, e di più accusa poca salute. Certo Hirsch che aveva impugnata la Teoria si è ritrattato in un'opera stampata a Berlino (¹), a quanto mi riferisce in un viglietto la celebre Signora astronoma e calcolatrice Baronessa Matt; il titelo dell'opera non l'ho presente, ma forse lo truoverò prima di chiudere la lettera. Intanto gradisca che Le ricambi di tutto cuore i Lei voti e che Le ripeta l'espressione di quella ben distinta sincerissima stima con cui rimango

Vienna, 13 gennaio 1815.

Di Lei Sig. Prof. Pne Stim.mo
G. Rangone.

P. S. Mi rallegro molto della lettera di Londra, che non poteva essere diversa; Ella vede per altro, che neppur gl'inglesi si sono voluti nominare: parmi bensì che tutti abbiano torto, perchè si tratta di dimostrazione, e se una cosa si giudica dimostrata, qual difficoltà a dirlo?

XXIII. — *Il M.se Rangone a Paolo Ruffini.*

Sign. Prof.re Pron. Mio Stim.mo,

Ricevo il gentilissimo Lei (*sic*)foglio del 16 corrente pel noto argomento della memoria, e appunto nello scorso ordinario ne avevo io scritto al Mse Luigino (²) nipote. Quanto poi ora da Lei intendo. aveva già appresso a poco immaginato, sapendo che quei corpi Accademici non sogliono mai dare questi giudicii (³).

Mi reca bensì grandissimo piacere l'intendere il sentimento di lode ed approvazione espresso dai letterati inglesi ai quali il segretario per la corrispondenza estera ha comunicato la memoria di Lei. Vedremo, se da Bürg sarà possibile ricavar qualchecosa, ma in ogni caso non sarà che dopo le vacanze. *Ora solamente è partito l'invoglio per Gauss*, avendo dovuto aspettar l'occasione di farglielo capitar franco, mentre senza questa avvertenza si correva pericolo, che il libro non fosse mai riscosso. Da tre o quattro mesi è qui morta una coltissima signora più che dilettante di Astro-

(¹) Non ho potuto trovare quest'opera. Nell'*Handbuch* von Egen (besonders in Beziehung auf die Sammlung von Meier Hirsch) stampato a Berlino nel 1820, in una rassegna dei tentativi fatti per la risoluzione generale delle equazioni, dopo menzionato il Lagrange, si dice: So weit ist man also in der allgemeinen Auflösung der Gleichungen gelangt. Ob wir weiter kommen werden? Manche glauben es nicht, und haben sogar versucht die Unmöglichkeit dieses Weiterskommens zu erweisen (vol. I, p. 210).

(²) Luigi Rangone, fu ministro di economia ed istruzione del duca di Modena e presidente della Società Italiana delle Scienze.

(³) Si riferisce alla Società Reale di Londra, ed alla lettera di T. Young.

nomia, che in sua casa aveva un osservatorio, e corrispondeva con Bode di Berlino ed altri classici astronomi.

Essa era suocera del mio medico D.r Cappellini, ed essendomi valso di lui per aver notizie delle critiche fatte alla di Lei opera, essa mi fece rispondere, che il S. Ruffini, aveva dimostrato il suo assunto, e che anche qualcaltro professore che prima era di contrario sentimento si era ora ritrattato: questa signora, morta di anni 52, si chiamava la Bar.sa Matt (1).

Credo che mio nipote le comunicherà un foglio, che gli trasmetto col ritorno dei Deputati di Reggio. Gradisco sommamente le notizie che mi dà di cotesta mia figlia, che sento ora libera costantemente dalle sofferte affezioni di petto; mi unisco a Lei pienamente nel credere, che la tranquillità d'animo e la grazia della vocazione abbiano molto coadjuvata la natura in questa guarigione. Per amor del Cielo scusi il pessimo scritto, e lo sconcio della lettera, ma ora non mi sarebbe possibile di rifarla.

Con sincera e ben distinta stima

Vienna, 1 Giugno (2).

S. D.mo Ser.re
G. M. Rangone.

FORIS { À Monsieur
M. le Docteur Ruffini
Professeur de Mathématiques
à
Modène

XXIV. — *L. A. Cauchy a Paolo Ruffini.*

Monsieur,

Un de mes amis, qui a le bonheur d'être compté parmi les vôtres (3) m'a fait espérer que vous voudriez bien accueillir favorablement quelques recherches sur le nombre des valeurs que les fonctions peuvent acquérir, et sur la théorie des équations, deux objets dont vous vous êtes occupé avec tant de succès.

Permettez-moi de saisir avec empressement cette occasion de vous témoigner le désir que j'avais depuis longtemps de faire votre connaissance et de vous dire aussi la satisfaction que j'ai éprouvé, en apprenant qu'un géomètre si distingué est en même temps un des défenseurs les plus zelés de l'immatérialité de l'âme, et de cette sainte religion qui seule peut nous procurer un bonheur véritable en ce monde et dans l'éternité. Veuillez bien agréer à ce sujet mes félicitations bien sincères, et accueillir avec bonté

(1) Non sono riuscito a trovar nessun cenno biografico di cotesta baronessa Matt, ricordata anche nella lettera precedente.

(2) Manca l'anno.

(3) Gaultier de Claubry (v. lettera XII).

la demande que j'ose vous faire d'une petite place dans votre amitié, ainsi que l'hommage de la haute considération avec laquelle je suis,

Paris, ce 17 Octobre 1815.

Monsieur

votre très humble
et très obéissant serviteur
A. L. CAUCHY
Ingénieur des P.^{tes} et Ch.

FORIS
À Monsieur
Monsieur Paolo Ruffini
professeur de mathématiques trascendantes,
membre de la légion d'honneur, de l'institut
national, de l'académie de la religion Catholique
etc.
A Modène,

XXV. — *Paolo Ruffini ad A. Cauchy.*

(Brano di minuta)

Votre lettre et le beau don de vos oeuvres très estimables m'ont surpris; parceque je ne suis rien, et je ne mérite aucune chose.

Je vous en proteste la plus vive et la plus sincère reconnaissance, et je remercie M. Gaultier pour le bien qu'il m'a procuré de votre correspondance.

Avant de recevoir votre présent, je vous avais envoyé un exemplaire de mes « Riflessioni sulla risoluzione delle equazioni », et cela parceque ayant vu que vous, avec beaucoup de sagacité, de savoir et d'avancement dans la science, avez traité la théorie des permutations entre les racines des équations algébriques, j'ai voulu vous donner un signe de mon estime, et en même temps, j'aurais desiré que vous eussiez eu la bonté de lire ces Réflexions et de me dire sur elles votre sentiment.

Je considère pour moi très honorable l'amitié que vous vous daignez m'offrir, et à laquelle j'aimerais pouvoir correspondre en quelque manière. J'ai le plaisir de vous féliciter pour avoir été nommé Membre de l'Académie des Sciences.

XXVI. — *A. L. Cauchy a Paolo Ruffini.*

Monsieur,

J'ai reçu la très aimable lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, et je m'empresse d'y repondre. Je suis impatient, je l'avoue, de me justifier á vos yeux sur un point qui peut être facilement éclairci. Votre mémoire sur la rèsolution générale des équations est un travail qui m'a toujours paru digne de fixer l'atten-

tion des géomètres, et qui, à mon avis, démontre complètement l'insolubilité algébrique des équations générales d'un dégré supérieur au quatrième. Si je n'en ai pas parlé dans mon cours d'analyse, c'est que, ce cours étant destiné aux éléves de l'école Royale Polytechnique, je ne devois pas trop m'écarter des matières indiquées dans les programmes de l'école.

C'est pour la même raison que je n'ai rien dit, ni de la résolution algébrique des équations binomes donnée par M. Lagrange, ni de la détermination du nombre des racines réelles dans les équations de tous les degrés, à l'aide de certaines fonctions rationnelles des coefficients, lesquelles sont l'objet d'un mémoire que j'ai inséré dans le journal de l'école Polytechnique. Mais dans un autre mémoire, que j'ai lu l'année dernière à l'Académie des Sciences, j'ai cité votre travail, et après avoir rappellé que vos démonstrations établissent l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations, j'ai présenté des méthodes propres à donner les racines sous la forme d'intégrales définies (1).

J'ajouterai que votre travail sur l'insolubilité algébrique des équations est précisément le titre que j'ai fait valoir dernièrement en votre faveur auprès de quelques membres de l'académie, lorsqu'il s'est agi de nommer un correspondant pour la section de géométrie.

Je vous remercie d'avance de votre nouvel ouvrage, dont vous avez eu la bonté de me promettre un exemplaire, et que je crois devoir être fort utile. Je suis entiérement de l'avis de ceux qui vous ont conseillé de l'entreprendre. Lié depuis longtemps avec l'auteur que vous réfutez (2) et lui ayant même des obbligations, je ne lui ai jamais caché mes sentiments ni mes principes; et dans l'introduction de mon cours d'analyse, où je lui rends d'ailleurs toute justice, j'ai formellement énoncé, comme vous avez pu le voir, qu'on ne devoit point essayer d'*attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral.* Monsieur Gaultier (3) est en ce moment absent de Paris. Mais l'exemplaire que vous lui destinez, lui sera fidèlement remis, et lui fera, je n'en saurais douter, un très sensible plaisir.

Veuillez bien agréer, je vous prie, le nouvel hommage de la considération très distinguée avec laquelle j'ai l'honneur d'être,

Monsieur,

votre très humble
et très obéissant serviteur
A. L. Cauchy.

Arceuil près Paris, ce 20 Septembre 1821.

FORIS {
À Monsieur
Monsieur le Chevalier Paolo Ruffini
membre de la Société Italienne des Sciences, et
professeur de mathématiques appliquées à l'école
du génie et de l'artillerie, etc.
à
Modène.
}

(1) Mem. de la Classe 1813-15. (Anno 1818) pag. 177.

(2) Laplace.

(3) Gaultier de Claubry già nominato.

XXVII. — *Il Barone* DE ZACH *a* PAOLO RUFFINI.

Monsieur le Chevalier,

J'ai mille excuses à vous faire, de ce qu'ai (*sic*) rétardé si longtems à répondre à votre obligeante lettre du 22 Octobre de l'année passée, et de vous remercier pour le précieux ouvrage que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Mais la faute n'est pas tout à fait de mon côté, car je ne sais par quel accident le paquet a été si longtems en chemin, avant de m'avoir été remis. Recevez donc, Monsieur le Chevalier, l'expression de ma plus vive reconnaissance pour ce cadeau, qui a un double prix pour moi, car outre l'importance de l'ouvrage, il me prouve l'honneur du souvenir que vous avez bien voulu conserver de moi.

Quant à moi, je n'ai pu oublier celui d'avoir fait votre connaissance personnelle lors de mon passage par Modène; je n'ai qu'à regretter, que le tems ne m'ait permis alors de profiter plus longtems de votre société interessante et instructive, que j'aurais été bien jaloux de cultiver. Je me rappelle fort bien de vous avoir parlé alors de l'opinion de M. le Prof. Paoli, sur votre théorème, relativement à l'insolubilité des équations algébriques générales du degré superieur au 4^{me}, mais depuis ce tems là, j'eus le plaisir de revoir deux fois M. Paoli, la dernière fois en 1815, et il m'a dit alors, la même chose que ce qu'il vous a écrit, qu'il était parfaitement convaincu et satisfait de votre démonstration (1). C'est bien dommage que M. le Prof. Canterzani (2) n'ait pas survécu à votre démonstration, car je crois qu'à l'époque que (*sic*) vous l'avez pubbliée, en 1813, ce célèbre Professeur était déjà mort. S'il vivait encore, ii n'y a pas de doute qu'il se serait également rendu à vos raisons.

J'ai pris la liberté de vous faire addresser ma correspondance astronom.... et géogr..., non pas à cause de l'intérêt de cet Ouvrage; que (*sic*) plutôt pour vous donner une preuve, M. le Chevalier, de l'estime profonde que vous m'avez inspiré, et du souvenir que j'en ai conservé, et que je conserverai toujours. J'espère par conséquent Monsieur, que vous voudrez bien agréer favorablement ce petit témoignage de la haute considération que je vous porte, avec laquelle je ne cesseroi d'être,

Monsieur le Chevalier,

Votre très humble
et très obéissant serviteur
Le Baron DE ZACH.

Gênes, le 13 Février 1819.

M. le Chev. Ruffini à Modena.

FORIS { All'Ill.mo il Sig. Caval. Paolo Ruffini
Professore di Matematica Applicata nella
R. Scuola del Genio e di Artiglieria etc.
Modena.

(1) Nella lettera a RUFFINI del 24 giugno 1814, dice egli infatti: *Posso* ADESSO *assicurarla che sono pienamente persuaso della sua dimostrazione*... (Mem. Acc. Sc. di Modena, serie III, vol. I, pag. 115).

(2) SEBASTIANO CANTERZANI (Bologna 1734-1819) Matematico di buona fama; fu membro pensionario dell'Istituto Italiano e presidente dell'Istituto pontificio. Aveva ideato una grande opera sulla Teoria delle equazioni; ma questa restò incompiuta, e pubblicò solo alcune memorie sugli immaginari, sul caso irriducibile e sul cosidetto regresso delle serie.

XXVIII. — *Minuta di una lettera di P. Ruffini, al barone di Zach.*

(manca la data)

Eccellenza,

Rendo a V. E. i più vivi ringraziamenti e protesto la più grande riconoscenza pel suo eruditissimo Giornale che ha avuto ed ha costantemente la gentilezza di graziosamente spedirmi.

Siccome però ho riscontrato in esso alcuni articoli, i quali confesso che non posso approvare, perchè o lesivi a torto di un Corpo Religioso troppo rispettabile, o contenenti massime e espressioni non le più misurate o le più pure; sonomi finalmente creduto in dovere di esporre all'E. V. questo mio sentimento; ogniqualvolta avessero a contenersi in detto giornale anche in avvenire articoli somiglianti, la mia coscienza m'obbliga a pregarla di non mandarmelo. Son certo che V. E. riflettendo seriamente e da filosofo vero e religioso alla cosa non vorrà punto offendersi nè disprezzare questa mia lettera, poichè dichiaro con tutta verità essere dettata dalla intenzione la più pura ed essere io costantemente verso di Lei dotato della più proprofonda stima e venerazione.

Al Barone di Zach.

APPENDICE A.

Moniteur n. 114. 24 Avril 1813.

Institut Impérial de France — Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.

Rapport sur un Mémoire de M. CAUCHY, *ingénieur des Ponts et Chaussées, intitulé: « Essai sur le calcul des fonctions symétriques »; lu dans la séance du lundi 12 Avril.*

« M. Cauchy comprend sous la dénomination commune de fonctions symétriques « deux espèces de fonctions; les unes ne changent ni de valeur ni de signe par les « permutations des lettres qui les accompagnent, les autres conservent toujours la « même valeur, mais peuvent changer de signe en vertu de ces permutations. Il nomme « les premières fonctions permanentes, et les secondes fonctions alternées; et son « objet est de donner des moyens généraux d'exprimer sous differentes formes; ou, « ce qui revient au même, de transformer les unes dans les autres quantités de ces « deux espèces. Il parvient pour cela à un grand nombre de formules, qu'il exprime « par des notations particulières, et qu'il nous serait impossible de faire connaître « dans notre rapport.

« Pour en donner une idée, observons, par exemple, que le calcul des fonctions « symétriques des racines d'une équation en fonction de ses coefficiens, dont plusieurs « géomètres se sont occupés, se rapporte aux transformations des fonctions permanentes, « et présente une application des formules de M. Cauchy. Les dénominateurs des « valeurs générales des inconnues, qui résultent de l'élimination dans les équations « du 1er dégré, sont des fonctions symétriques alternées, car ces expressions changent « de signe sans changer de valeur, quand on y permute les quantités qu'elles ren- « ferment.

« M. Cauchy s'est donc aussi occupé, comme nous l'avons dit dans le rapport « sur le mémoire de M. Binet [1], des formules que celui-ci a considerées sous le nom « de *résultantes*, et les théorèmes relatifs aux produits de ces quantités, que nous « avons cités, sont la partie commune des deux mémoires. M. Cauchy a donné de plus « une règle nouvelle pour former ces résultantes et pour determiner à l'inspection « de deux termes, et sans être obligé d'écrire tous les autres, s'ils doivent être affectés « du même signe ou de signes contraires.

« Les fonctions symétriques permanentes ou alternées, résultent en général de la « réunion de tous les termes differens qui se déduisent par des permutations des

[1] JACQ. PH. BINET (1786-1856) fu professore di meccanica alla *École Polytechnique* di Parigi.

« lettres d'une même fonction non symétrique. En examinant sous ce point de vue la « formation des fonctions symétriques, et en cherchant à déterminer le nombre des « termes qui les composent, M. Cauchy a été conduit à traiter la question impor- « tante du nombre des valeurs dont les différentes espèces de fonctions sont sus- « ceptibles.

« Mais avant d'analyser cette partie de son mémoire, il ést nécessaire de rap- « peler ce qu'on avait déja trouvé sur le même sujet.

« Dans ces derniers tems M. Ruffini et d'autres géométres italiens [1] se sont « beaucoup occupés de la question dont nous parlons; les résultats de leurs recher- « ches sont consignés dans les *Mémoires de la Société Italienne* et dans un traité « sur la résolution générale des équations pubblié en 1799 par M. Ruffini.

« Le but de l'auteur était de démontrer l'impossibilité de cette résolution pour « les dégrés supérieurs au 4^{me}. *Mais quoique cette conclusion ait parue fondée sur « des raisonnemens trop vagues, et n'ait pas été généralement admise*, il n'en est « pas moins vrai, qu'on trouve dans son Ouvrage des théorèmes curieux sur le nombre « des valeurs des fonctions. M. Ruffini démontre qu'il n'existe pas des fonctions de « cinq ou d'un plus grand nombre de lettres, dont le nombre des valeurs distincts « résultant des permutations de ces lettres, puisse être compris entre 2 et 5. Ainsi « quelque soit le nombre des lettres, il existe des fonctions qui n'ont qu'une seule « valeurs et d'autres qui n'en ont que deux; ce sont les permanentes et les fonctions « alternées; mais si le nombre des lettres passe 4, il n'y a aucune fonction qui ait « seulement ou deux, ou trois valeurs distinctes.

« À la fin de son memoire sur les équations, Vandermonde enonce ce même « résultat sans démonstration, et uniquement pour le cas des fonctions de 5 lettres. « M. Ruffini est le prémier, que nous sachions, qui l'ait demontré, et étendu aux « fonctions d'un plus grand nombre de lettres. Son raisonnement s'appuie sur ce « principe évident, que si une fonction reste la même pour une certaine permutation « entre les lettres qu'elle renferme, elle ne changera pas davantage en y répetant « cette permutation autant de fois qu'on voudra; et en partant de là il fait voir « que si l'on supposait les valeurs d'une fonction de plus de 4 lettres égales trois « à trois, ou quatre à quatre, il s'ensuivrait nécessairement qu'elles seraient toutes « égales entre elles, ou toutes égales deux à deux.

« En suivant la même marche, M. Cauchy est parvenu à un théorème plus gé- « néral qui comprend celui de M. Ruffini. Il démontre qu'il n'existe aucune fonction « d'un nombre quelconque de lettres, dont le nombre des valeurs distinctes soit com- « pris entre deux et le nombre premier immédiatement inférieur ou égal à celui des « lettres. Par exemple, des fonctions de 11 ou de 12 lettres, ne peuvent, d'après ce « théorème de M. Cauchy, avoir moins de 11, et plus de 2 valeurs distinctes.

« Des fonctions de 13, 14, 15, ou 16 lettres, ne peuvent admettre un nombre « de valeurs qui tombe entre 2 et 13, et ainsi de suite.

[1] Notevole questa indeterminazione. Toltane una lettera di Abbati al Ruffini pubblicata nel vol. X, niun'altra ricerca di questo genere ivi è stampata, che non sia dello stesso Ruffini.

« Il donne aussi plusieurs autres règles pour déterminer le nombre des valeurs « des fonctions, et pour en former qui soient susceptibles de certains nombres de va- « leurs, non compris entre les limites d'exclusion qu'il a assignées.

« M. Cauchy a précédemment communiqué à la classe un mémoire sur l'égalité « des polyèdres composés des mêmes faces, qui a obtenu son approbation, et dont « l'un de nous (M. Legendre) a fait passer les résultats dans ses éléments de géo- « métrie (dern. édit.).

« *Les questions qui font l'objet de ses nouvelles recherches sont sans doute « d'un moindre intérêt, mais on y retrouve de nouvelles preuves de la sagacité « et du talent qu'il a montré dans le mémoire que nous nous sommes plûs à « rappeler.*

« Nous pensons donc que ces recherches sont dignes de l'approbation de la classe, « et méritent d'être imprimées dans le recueil des savans étrangers.

« Carnot
« Legendre
« Poisson rapporteur ».

APPENDICE B.

Minuta di una lettera di Paolo Ruffini *a* Luigi Lagrange (1).

Níuno à diritto più di Voi, Citt° Rip°, sopra il libro, che unitamente alla presente mi prendo la libertà di spedirvi.

Il pregio maggiore di questo, quello si è di essere ornato di quasi tutte le più insigni vostre scoperte intorno alle Equazioni algebriche determinate registrate negli Atti della Accademia di Berlino. Nello scrivere questo libro ò avuto bensì in animo principalmente di esporre la dimostrazione della impossibilità della soluzione delle Equazioni algebriche determinate di grado superiore al 4°, ma appoggiandosi questa ai principii da Voi stabiliti nelle vostre due meravigliose Memorie, che esistono negli Atti sovraccennati per gli anni 1770, 1771, ò pensato pregio dell'opera l'esporre questi principii medesimi riducendoli opportunamente al mio libro, e prendendomi l'ardire di farvi qualche piccola addizione. Questi principii stessi mi ànno condotto a dimostrare la necessità del caso irreducibile per le Equazioni di 3° grado, a fare delle riflessioni intorno alla eliminazione delle incognite, ed a promuovere delle viste intorno alle Equazioni riducibili a grado inferiore: di più avendo io determinato una formula delle funzioni, che serve alla dimostrazione di non pochi Teoremi, e avendo fatta qualche altra riflessione, ò voluto tutto insieme pubblicare; e veggendo che si era così formata gran parte di una Teoria di Equazioni, ò pensato ben di compierla, e affine di renderla pregievole l'ò perfezionata adornandola con molte delle vostre principali scoperte sulle Equazioni.

È vero che ò tralasciato il vostro bellissimo metodo di sciogliere per approssimazione le Equazioni algebriche determinate, e la dimostrazione vostra pel Teorema che occupa nel mio libro il n° 51; ma riguardo al metodo di soluzione per serie mi perdonerete se ò amato di esporne uno che io credo per nuovo, e che a me sembra dover riuscire piuttosto facile nella esecuzione. Confesso essere questo tuttora imperfetto, sì per l'intralcio dei raziocinii che lo stabiliscono, come per non determinarsi il grado di approssimazione; vi prego però di riflettere, che avendolo io ritrovato con qualche sollecitudine, mentre il libro stava attualmento stampandosi, non dispero che con maggior considerazione non se ne possa determinare l'approssimazione, e così rendere vantaggioso. Riguardo poi al Teorema del n° 51, la riflessione da voi fatta rapporto alle radici imaginarie nel vostro egregio libro (2) De la Résolution des Équations numériques, era stata fatta anche da Noi, e quindi tralasciando la vostra, sono ricorso piuttosto all'altra dimostrazione, dipendente dalla legge di continuità. Anzi, non credo, che possa prescindersi da una tal Legge: Difatti fra le due quantità, le

(1) Manca la data; certo anteriore al 1802.

(2) Nota 1.

quali sostituisconsi in luogo della x, non v'à altro rapporto fuorchè quello di disuguaglianza, e così fra i due risultati, che nascono dalla sostituzione, altro rapporto non esiste se non se quello della contrarietà dei segni. Dunque non essendo fra tali quantità altro legame, che quello, che dipende dalla legge di continuità, potremo noi nell'assegnare la dimostrazione prescindere da una simile legge?

Quando ò scritto e fatto stampare il mio libro, non aveva veduto nè i vostri bellissimi libri « *Théorie des fonctions analytiques* »; « *De la Résolution des Equations numériques de tous les degrés* » nè il Clairaut ristampato a Parigi, nè il La Croix. Nel libro « De la Résolution...... », che ò avuto soltanto due giorni fa, posso dire di non aver letta per anche che la Nota al Teorema I; dell'altro poi « Théorie des Fonctions... » ne ò letta una porzione, ed è per me cagione di onorevole compiacenza il vedermi in qualche maniera incontrato con Voi nel metodo che io tengo per determinare la formula delle Funzioni del mio Capo 1° col metodo tenuto da Voi nello sviluppo della funzione $f(x+i)$.

Avrei bramato di farvi tenere il presente libro molto prima d'ora, ma non ò potuto. Frattanto vi prego dargli un'occhiata, e amerò di sentire con quella sincerità, che so adornare il vostro bell'animo, se mai mi sono ingannato nelle mie proposisizioni, principalmente se ò esposte male e male ridotte le vostre dimostrazioni, e scoperte, se gli ultimi capi possono riuscire di qualche giovamento, avvertendo che ò scritto l'antepenultimo principalmente affinchè mi servisse per una Teoria di curve ([1]), e se finalmente il mio libro è un libro inutile.

Vi prego di perdonarmi tanta libertà e tanto disturbo e attendendo con ansietà un vostro riscontro, il quale qualunque sia per esser sarà sempre per me pregevolissimo, vi auguro insieme e protesto.

P. S. Troverete il libro pieno di errori; ma vi prego attribuir questi e alla natura del libro medesimo, e all'essersi questo stampato lontano dall'Autore ([2]).

Au Cit.ⁿ Louis Lagrange
Membre de l'Institut National
Rue Fromenteau n° 4.
à
Paris

Minuta di una lettera di Paolo Ruffini *a* Luigi Lagrange ([3]).

Sul dubbio che non abbiate ricevuto un mio libro intitolato « Teoria generale delle Equazioni » che mi presi tempo fa l'ardire di spedirvi, ve ne mando al presente, o Cittadino rispettabilissimo, un'altra copia, e ve la mando, affinchè abbiate la com-

([1]) Cfr. la Memoria: *Della classificazione delle curve algebriche a semplice curvatura* (Soc. dei XL, tomo XVIII, pp. 69, 269).

([2]) A Bologna, nella stamperia di S. Tommaso d'Aquino.

([3]) La lettera del Giunone, che farà seguito a questa minuta, permette di stabilire l'epoca approssimativa in cui fu scritta.

piacenza di darle un'occhiata, e di accennarmi in seguito il vostro sentimento. Dal discorso preliminare vedrete ciò, che mi à eccitato principalmente alla pubblicazione del presente libro, e quali sono le cose, che ò creduto dotate di qualche novità. Se mi sono ingannato in qualche dimostrazione, se mai ò esposta qualche cosa che abbia creduta nuova e che tale realmente non sia, se infine ò formato un libro inutile, vi prego vivamente a manifestarmelo con tutta sincerità; avvertite che quando diedi alla stampa il mio libro, non avea ancora veduto le vostre Opere veramente eccellenti: « Théorie des Fonctions Analytiques (1) », « De la Résolution des Équations numériques » (2) nè gli altri libri che espongono quanto avete voi in questo scoperto e pubblicato: avvertite, che gli ultimi Capi del mio libro furono da me scritti con troppa sollecitudine, mentre si stava attualmente stampando, e sembra a me pure, che essi meritino una riforma qualunque; però questo siasi, son certo, che non potrà il Pubblico che aggradire di vedere raccolte molte delle principali scoperte sulle Equazioni del Matematico dell'Europa, di Voi, Immortale Lagrange, mi dispiace soltanto, che nell'espor queste, le avrò rese oscure, e mal combinate. Desidero ardentemente che ciò non sia; e desidero insieme, che non vogliate voi sdegnare questo mio lavoro; in attenzione frattanto di vostro pregiatissimo riscontro, mi dò l'onore di protestarvi, e augurarvi insieme.

Au Cit^n Louis Lagrange
Membre de l'Institut National
Rue Fromenteau n.° 4
à
Paris

G. Giunone (3) *a Paolo Ruffini.*

Rispettabile Cittadino,

Son già trascorsi diversi giorni da che mia sorella Luigia ha rimesso al Citt° Serra il mandato, di cui ella mi parla nel pregiatissimo foglio del 7 andante marzo. Io vivo nella certezza che a quest'epoca pertanto le debba essere pervenuto: ad ogni buon fine mi sono dato la premura di comunicare la di Lei lettera alla sorella, affinchè ne spedisca un altro, qualora dubiti che il primo siasi smarrito.

(1) Paris 1798.

(2) Paris, Prairial a. V.

(3) Era questi un funzionario del ministero delle relazioni estere, specialmente addetto alle spedizioni, il cui nome spesso ricorre nei documenti di quell'epoca.

Delle sei copie del Libro, che consegnai al Librajo Agnelli, una ne venne ritirata, per di Lei ordine dal Citt° Paradisi [1] onde spedirla al Cittadino Lagrange; tre sono state vendute; di una se ne attende a giorni il riscontro, se lo sia, o no; e la sesta rimane tuttora presso il Librajo. Se delle copie esitate ella ne desidera l'importo, io mi farò carico di ritirarlo, e di farglielo pervenire colla prima favorevole occasione. Io non ho trascurato di rendermi dal Citt° Agnelli a sollecitarne la vendita, e se questa non venne totalmente effettuata ella deve assicurarsi che non proviene dall'essermi scordato della commisione di cui mi ha onorato.

Aggradisca i sentimenti di stima, e di rispetto coi quali mi dico

Milano, 11 Marzo 1802. Anno 1°.

Suo umillmo obbmo Serv.
GIUSEPPE GIUNONE.

FORIS { Al Cittadino
D. Paolo Ruffini
Modena

[1] Conte GIOVANNI PARADISI, reggiano (1760-1826). Geometra di qualche valore, ha una *Ricerca sulle vibrazioni delle lamine elastiche*. Partigiano convinto di Napoleone, ebbe vita molto travagliata. Fu della Consulta di Lione (1801), membro e presidente del senato italiano dal 1809. Spogliato poi delle sue cariche politiche, rimase a Milano per qualche tempo, presidente dell'Istituto. Si ritirò infine al paese natale dove passò gli ultimi giorni di sua vita.

Sopra le superficie algebriche di bigenere uno.

Memoria di FEDERIGO ENRIQUES

(presentata dal Socio G. CASTELNUOVO ed approvata dal Socio V. CERRUTI)

Nel 1896 mi si è presentata la superficie del 6° ordine F_6 passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro come primo esempio di superficie di genere $p_g = p_a = 0$, non razionale. Ho osservato che, pur mancando le superficie aggiunte d'ordine 6 — 4, si ha una superficie *biaggiunta* d'ordine 2 (6 — 4), costituita dal tetraedro nominato, e che le analoghe superficie biaggiunte conducono in generale per $p_g = 0$ a delle curve invarianti, cui si addice il nome di « *bicanoniche* »; quindi il numero delle curve bicanoniche linearmente indipendenti costituisce un nuovo invariante delle superficie « il *bigenere* » ecc.

L'importanza del bigenere risulta subito dal teorema di CASTELNUOVO per cui « le superficie di genere $p_a = p_g = 0$ e di bigenere $P_2 = 0$ sono razionali ».

Ora, dopo il primo esempio della sestica F_6, altri esempî si sono presentati di superficie non razionali di genere 0; ma da questi la sestica F_6 si distingue per le seguenti proprietà:

1) è una superficie regolare di genere 0 e bigenere 1, cioè

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = 1 ;$$

(si ha invece $P_2 > 1$ in un esempio di CASTELNUOVO e in alcuni piani doppi che io ho successivamente costruiti);

2) la superficie biaggiunta non sega la superficie fuori della curva doppia, cioè la curva bicanonica ha l'ordine 0; (un esempio di superficie, per cui $p_g = p_a = 0$ $P_2 = 1$, dotata di curva bicanonica d'ordine > 0, viene addotto al n. 8 di questa Memoria.

Ebbene, le proprietà suddette caratterizzano la sestica F_6 dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Questo è il resultato fondamentale ottenuto nella presente Memoria.

Possiamo determinarlo più precisamente nei seguenti enunciati:

Perchè una superficie regolare di genere 0 *e bigenere* 1 ($p_g = p_a = 0$ $P_2 = 1$) *abbia la curva bicanonica d'ordine* 0, *basta che sia il trigenere* $P_3 = 0$ (*o il sestigenere* $P_6 = 1$) *anzichè* $P_3 > 0$ (e $P_6 > 1$).

Le superficie per cui

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1$$

si possono trasformare in superficie del 6° ordine passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro.

Queste superficie posseggono in generale un gruppo discontinuo di infinite trasformazioni birazionali in se stesse, onde i loro sistemi lineari di dato genere si distribuiscono in serie discontinue ecc. (cfr. n. 20).

I.

I plurigeneri delle superficie F di bigenere 1.

1. Si abbia, nello spazio ordinario, una superficie F di un certo ordine n. Senza restringere la generalità, agli effetti dell'ordine di questioni che stiamo trattando, possiamo supporre che la F sia dotata soltanto di curva doppia χ e di un numero finito di punti tripli, tripli anche per la curva.

Ricordiamo la definizione dei caratteri invarianti fondamentali della superficie [1].

Il *genere geometrico* p_g è il numero delle superficie d'ordine $n-4$, linearmente indipendenti, che passano per la curva doppia χ di F (superficie *aggiunte* a F).

Il *genere aritmetico* p_a è l'espressione aritmetica del numero anzidetto calcolato in base alle *formule di postulazione* di Nöther.

Il *bigenere* P_2 (o semplicemente P) è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $2n-8$, che passano doppiamente per la curva χ (superficie *biaggiunte* a F).

Il *trigenere* P_3 è il numero delle curve linearmente indipendenti sezioni di F colle superficie d'ordine $3n-12$ che passano doppiamente per la χ e toccano le due falde di F per essa (superficie *triaggiunte* a F) ecc.

Le nostre ipotesi fondamentali sono

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = 1.$$

In tali ipotesi (adoperando eventualmente una trasformazione birazionale) si può supporre che la superficie F sia ridotta a non contenere *curve eccezionali*, cioè curve immagini di punti semplici sopra una superficie trasformata [2].

Facciamo questa supposizione semplificativa.

Essendo $p_g = 0$ mancano su F curve *canoniche* (sezioni di superficie aggiunte d'ordine $n-4$), mentre, per l'ipotesi $P_2 = 1$, si ha *una* curva *bicanonica*, sezione

[1] Cfr. Enriques, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (t. X, serie III di queste Memorie, 1896).

[2] Cfr. Enriques, *Introduzione* citata, n. 42; e Castelnuovo ed Enriques, Annali di Mat., serie 3ª, t. VI, 1901.

di una superficie biaggiunta d'ordine $2n-8$. Designando con π il genere delle sezioni piane della superficie F, l'ordine della curva bicanonica sarà

$$4\pi - 4 - 2n,$$

essendo

$$2\pi - 2 \geq n.$$

Valutiamo il genere della curva bicanonica di F.

A tal fine ricordiamo che dato su F un qualsiasi sistema lineare $|C|$, p. es. quello delle sezioni piane di F, resta definito un sistema lineare *aggiunto* $|C'|$, un *secondo aggiunto* $|C''| = |(C')'|$ ecc.; il sistema canonico (nel nostro caso inesistente) verrebbe dato da

$$|C' - C|,$$

il sistema bicanonico da

$$|C'' - C| = |2C' - 2C| \text{ ecc.}$$

Esprimiamo il genere π' di $|C'|$, come se questo sistema fosse la somma di $|C|$, di genere π e grado n, e di un sistema canonico di genere $p^{(1)}$; si avrà

$$\pi' = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n.$$

Il numero

$$p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n,$$

nonostante la mancanza di $|C' - C|$, esprime un invariante di F, indipendente dalla scelta di $|C|$; ciò risulta dalla *relazione fondamentale* fra gli aggiunti di due sistemi $|C|$ e $|K|$:

$$|C + K'| = |C' + K|.$$

L'invariante $p^{(1)}$ prende il nome di *genere lineare virtuale* della superficie (¹). Si trova poi che il grado di $|C'|$ vale

$$n' = p^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n.$$

Ora se si può valutare il genere e il grado di $|C''|$ e quindi anche i caratteri analoghi di $|C'' - C|$; si trova che il genere della curva bicanonica $|C'' - C|$ vale

$$3p^{(1)} - 2,$$

e il suo grado

$$4p^{(1)} - 4.$$

Nel caso $(n = 2\pi - 2)$ in cui si abbia una curva bicanonica d'ordine 0,

$$|C''| = |C|,$$

(¹) Cfr. Enriques, *Introduzione* citata, n. 41.

risulta

$$p^{(1)} = 1.$$

In ogni caso poichè $|C''|$ contiene $|C|$ si trova

$$p^{(1)} \geq 1.$$

Poniamo che sia

$$n < 2\pi - 2.$$

Partendo da un sistema $|C|$ irriducibile, si ha la dimensione di $|C'|$

$$r' \geq p_a + \pi - 1$$

e

$$r' \leq p_g + \pi - 1,$$

cioè, nel nostro caso ($p_a = p_g = 0$),

$$r' = \pi - 1;$$

parimente la dimensione di $|C''|$ è

$$r'' = p^{(1)} - 1 + 3(\pi - 1) - n.$$

Il sistema $|C''|$ sega su una C generica una serie $g_{4\pi-4-n}$ non speciale ($n < 2\pi - 2$), quindi la dimensione del sistema bicanonico vale

$$P_2 - 1 \geq p^{(1)} - 1.$$

Siccome si ha per ipotesi

$$P_2 = 1,$$

si deduce

$$p^{(1)} \leq 1,$$

quindi, ricordando la diseguaglianza $p^{(1)} \geq 1$, si deduce

$$p^{(1)} = 1.$$

Si conclude che *il genere lineare della superficie* F ($p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$) *vale in ogni caso*

$$p^{(1)} = 1;$$

questo è anche il genere (virtuale) della curva bicanonica di F, supposta d'ordine > 0

$$(2\pi - 2 > n).$$

2. Il valore del genere lineare $p^{(1)}$ non permette di distinguere i due casi che una superficie F può presentare, cioè il caso

$$n < 2\pi - 2$$

in cui vi è una effettiva curva bicanonica d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0,$$

e il caso

$$n = 2\pi - 2$$

in cui codesta curva ha l'ordine 0; e, quindi per ogni sistema $|C|$ è

$$|C''| = |C|.$$

La distinzione si ottiene valutando i plurigeneri successivi della superficie.

Nel caso

$$n = 2\pi - 2 \ , \ |C''| = |C|,$$

si ha anche

$$|C^{IV}| = |C''| \text{ ecc.},$$

quindi tutti i plurigeneri d'ordine pari sono uguali ad 1:

$$P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1 ;$$

invece

$$|C'''| = |C'| \text{ ecc.}$$

quindi

$$p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0.$$

Consideriamo invece il caso

$$n < 2\pi - 2,$$

in cui si ha una curva bicanonica K d'ordine

$$4\pi - 4 - 2n > 0.$$

Costruiamo il sistema aggiunto a $|K|$, valendoci di un sistema ausiliario $|C|$; si avrà

$$|K'| = |K + C' - C|,$$

dove

$$|K| = |C'' - C|$$

e perciò

$$|K'| = |C''' - C|.$$

Calcoliamo la dimensione di $|C'''|$, e teniamo conto che esso sega su una C una serie non speciale; segue così che la dimensione di $|K'|$ è

$$P_3 - 1 > 0.$$

Si ha dunque su F almeno una curva tricanonica K', d'ordine $3(\pi - 1) - 3n$; similmente si trovano le successive curve i canoniche, per $i = 4, 5 \dots$.

Pertanto i plurigeneri della superficie valgono

$$P_i > 0 \quad \text{per} \quad i > 1.$$

Ma è interessante di provare che, almeno per $i = 6$, risulta di più

$$P_6 > 1,$$

e si hanno quindi su F infinite curve sesticanoniche, ellittiche o composte di curve ellittiche.

Consideriamo le due curve

$$2K' \quad e \quad 3K;$$

esse appartengono ugualmente al sistema sesticanonico

$$|C^{VI} - C|,$$

e sono distinte, altrimenti K dovrebbe comporsi di parti contate due volte le quali entrerebbero tre volte in K' e formerebbero perciò una curva canonica di F.

Si deduce così che le due curve sesticanoniche suddette determinano un fascio, quindi il sestigenere di F vale

$$P_6 > 1;$$

per conseguenza

$$P_8 > 1 \ , \ P_9 > 1 \ldots P_{12} > 2 \text{ ecc.}$$

Ci riserviamo a portare fra poco un effettivo esempio di superficie per cui

$$p_g = p_a = 0 \qquad P_2 = P_3 = 1 \ , \ P_6 > 1 .$$

Intanto raccogliamo le conclusioni dell'analisi precedente:

Le superficie F *di genere* 0 *e bigenere* 1 ($p_a = p_g = 0 \ , \ P_2 = 1$) *possono avere una curva bicanonica d'ordine* 0, *o di ordine* > 0; *nel primo caso tutti i plurigeneri valgono* 0 *o* 1, *e precisamente*:

$$p_g = P_3 = P_5 = \cdots = 0 ,$$
$$P_2 = P_4 = P_6 = \cdots = 1 ;$$

nel secondo caso si ha:

$$P_i \geq 1 \quad per \quad i > 1 ,$$

ed in particolare

$$P_6 > 1;$$

cioè esiste sulla superficie un fascio di curve (ellittiche) *sesticanoniche.*

In tal modo restano distinti i due casi. Notiamo anzi che

Le superficie regolari di genere 0 *e bigenere* 1 *con curva bicanonica d'ordine* 0 *sono caratterizzate semplicemente dai valori*

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1 ,$$

donde $p_g = 0$; *oppure dai valori*

$$p_a = p_g = 0 \ , \ P_6 = 1 ,$$

da cui segue come conseguenza $P_2 = 1$.

3. Rechiamo ora un esempio di superficie per cui

$$p_a = p_g = 0 \qquad P_2 = 1 \qquad P_6 > 1 .$$

Si abbia nel piano una curva irriducibile C_3, e designamo con z il suo integrale di 1ª specie, con $2\varpi, 2\varpi'$ i periodi di questo. Consideriamo una retta C_1, la quale segherà la C_3 in tre punti; la somma dei valori di z in questi punti può supporsi nulla rispetto ai periodi:

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si determinino ora su C_3 6 punti $z_4, z_5, \dots z_9$ per modo che sia p. es.

$$z_4 + z_5 + \cdots + z_9 \equiv \frac{2\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Sarà pure

$$\sum_1^9 z_i \equiv \frac{2\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi'),$$

e quindi i 9 punti $z_1 \dots z_9$ costituiranno i punti base tripli per un fascio di curve (ellittiche) C_9 d'ordine 9 (Halphen).

Ora nella costruzione precedente non è vietato di prendere

$$z_4 \equiv z_5 \ , \ z_6 \equiv z_7 \ , \ z_8 \equiv z_9 \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi')$$

essendo p. es.

$$z_4 + z_6 + z_8 \equiv \frac{\varpi}{3} \quad (\text{mod. } 2\varpi, 2\varpi').$$

Si otterrà in tal modo una C_9 irriducibile con 9 punti tripli su C_3, di cui tre appartengono a C_1, e sei si distribuiscono in tre coppie di punti infinitamente vicini.

Ciò posto consideriamo il *piano doppio che ha come curva di diramazione* $C_1 + C_9$.

Le sue curve canoniche dovrebbero venire rappresentate da coniche passanti per i sei punti $z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_8$, spezzate quindi in C_1 e in una retta per z_4, z_6, z_8; ma questi tre punti non sono allineati (non essendo $z_4 + z_6 + z_8 = 0$), quindi

$$p_g = p_a = 0.$$

Si ha invece una curva bicanonica rappresentata sul piano dalla $C_1 + C_3$, seconda aggiunta alla curva di diramazione $C_1 + C_9$; dunque il bigenere vale

$$P_2 = 1.$$

All'infuori della retta eccezionale C_1, la curva C_3 è immagine doppia di una curva bicanonica, la cui aggiunta ha per immagine semplice la C_9 di diramazione le curve del 9° ordine, costituenti il fascio di Halphen determinato da C_9, rappresentano doppiamente le curve sesticanoniche della superficie.

Si noti che l'esempio addotto non si trova fra i piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$ che ho determinati nel 1898 [1], perchè ivi ho supposto la curva di diramazione spoglia di componenti eccezionali.

[1] Rend. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. VII, pp. 234, 253.

II.

Proprietà generali dei sistemi lineari sopra le superficie F.

Nel seguito di questa Memoria ci riferiremo alle superficie F per cui

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1,$$

dotate dunque di *una* curva bicanonica d'ordine 0. E considereremo sopra F sistemi lineari *virtualmente privi di punti base*, sicchè parlando del sistema completo determinato da una curva si sottintenderà che questo non debba avere alcun punto base assegnato.

Richiamiamo qui e completiamo le proprietà generali dei sistemi lineari di curve tracciati su F.

4. Anzitutto (cfr. I):

Ogni sistema lineare $|C|$, *irriducibile o no, di genere virtuale* $\pi \geq 1$, *ammette un sistema aggiunto* $|C'|$ *di dimensione* $\geq \pi - 1$ *che ha lo stesso genere e lo stesso grado di* $|C|$. *Il sistema* $|C|$ *è a sua volta l'aggiunto di* $|C'|$, *cioè*

$$|C''| = |C|.$$

I doppi dei due sistemi $|C|$ *e* $|C'|$ *sono equivalenti:*

$$|2C'| = |(2C)''| = |2C|.$$

Quindi il grado di un sistema $|C|$ *di genere* π (≥ 1) *vale*

$$n = 2\pi - 2.$$

5. *Ogni sistema lineare completo* $|C|$, *irriducibile o no, di genere virtuale* $\pi \geq 1$, *ha la dimensione*

$$\geq \pi - 1.$$

(teorema di Riemann-Roch per la superficie F).

Ogni sistema $|C|$, *irriducibile completo di genere* $\pi > 1$, *ha la dimensione*

$$r = \pi - 1,$$

e non maggiore.

La prima parte del teorema si deduce subito dal fatto che $|C|$ è aggiunto a $|C'|$.

Per dimostrare la seconda parte si consideri la serie (*caratteristica*) $g^{r-1}_{2\pi-2}$ segata su una C dalle altre C; il doppio di questa serie è la serie bicanonica $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$ di C, ma la serie stessa differisce dalla serie canonica, non essendo $|C| = |C'|$. Dunque la $g^{r-1}_{2\pi-2}$ è una serie non speciale, e perciò

$$r \leq \pi - 1,$$

donde (n. 5)

$$r = \pi - 1.$$

6. *Ogni sistema lineare irriducibile di genere virtuale $\pi > 1$, dotato di punti base multipli, è sempre contenuto in un sistema completo di curve dello stesso ordine privo di punti base o dotato soltanto di punti base semplici.*

Secondo il n. 5 il sistema dato è contenuto in un sistema completo $|C|$ (virtualmente privo di punti base), di dimensione $r = \pi - 1$. Ora se $|C|$ ha un punto base $i$plo, il genere effettivo delle C vale

$$\pi_1 = \pi - \frac{i(i-1)}{2},$$

e la serie caratteristica che rimane, tolte le i^2 intersezioni fisse di due C, è una

$$g_{2\pi-2-i^2} = g_{2\pi_1-2-\frac{i(i+1)}{2}},$$

speciale o non speciale; ma se

$$i > 1,$$

la dimensione di questa serie vale

$$r - 1 < \pi_1 - 1$$

e

$$\pi_1 < \pi,$$

quindi

$$r < \pi - 1,$$

contro il n. 5.

7. *Se un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere virtuale $\pi > 1$, dotato di punti base semplici, non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, il sistema si compone di curve iperellittiche e vi sono* d u e *punti base, i quali risultano doppi per la g'_2 appartenente alla* C *generica.*

Suppongasi che $|C|$ abbia $s \geq 1$ punti base semplici $A_1 A_2 \dots A_s$. Sopra una C generica, la serie caratteristica $g^{\pi-2}_{2\pi-2}$, tolti i punti fissi, dà una $g^{\pi-2}_{2\pi-2-s}$ speciale, che si ottiene dunque come residua di un gruppo di s punti $B_1 B_2 \dots B_s$ dalla serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$; si ha così

$$g^{\pi-2}_{2\pi-2-s} = g^{\pi-2}_{2\pi-2} - \sum_1^s A \equiv g^{\pi-1}_{2\pi-2} - \sum_1^s B.$$

Per il teorema di Riemann-Roch il gruppo $\sum B$, presentando una sola condizione ai gruppi canonici che debbono contenerlo, appartiene ad una serie lineare g^{s-1}_s di dimensione $s - 1$; ma poichè il genere π di C è > 1, si deve avere

$$s = 1 \quad \text{o} \quad s = 2.$$

Supposto $s = 1$ $(A_1 = A, B_1 = B)$ si ha

$$g^{\pi-2}_{2\pi-2} - A \equiv g^{\pi-1}_{2\pi-2} - B;$$

ma

$$2g^{\pi-2}_{2\pi-2} \equiv 2g^{\pi-1}_{2\pi-2},$$

quindi

$$2A \equiv 2B.$$

I punti A e B essendo distinti, sono punti doppi di una g_2^1 appartenente a C; ma allora sopra la curva iperellittica C, la serie

$$g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B$$

contiene ancora come punto fisso il punto B, il quale risulta dunque un nuovo punto base pel sistema |C|; ciò contraddice all'ipotesi $s = 1$.

Suppongasi $s = 2$. Si ha

$$g_{2\pi-4}^{\pi-2} = g_{2\pi-2}^{\pi-2} - A_1 - A_2 = g_{2\pi-2}^{\pi-1} - B_1 - B_2 ,$$

e la coppia $B_1 + B_2$ appartiene ad una g_2^1 colla quale risulta composta la $g_{4\pi-4}^{\pi-2}$.

La coppia $A_1 + A_2$ non appartiene alla suddetta g_2^1, ma

$$2(A_1 + A_2) \equiv 2(B_1 + B_2) ,$$

quindi la quaterna $2A_1 + 2A_2$ si compone di due coppie di g_2^1, e però A_1 , A_2 sono punti doppi di questa g_2^1.

Resta così dimostrato l'asserto: la C generica è iperellittica, i punti base sono *due* e sono doppi per la g_2^1 appartenente a C.

Si può notare di più che le C passanti per un punto generico della superficie passano di conseguenza per un altro punto, coniugato al primo su ciascuna C.

In questa categoria di sistemi rientrano in particolare i *fasci di curve di genere due* (di cui dimostreremo poi l'esistenza), i quali hanno giusto due punti base.

8. Passiamo ora a studiare le *curve ellittiche* tracciate su F, ed i loro sistemi.

In base al n. 4 si hanno anzitutto i teoremi:

Ogni curva C *di genere* (*virtuale*) 1 *ha almeno una curva aggiunta* C', *che non ha punti comuni con* C.

Le curve 2C *e* 2C' *appartengono ad un medesimo fascio lineare di curve ellittiche.*

Distinguiamo pertanto due specie di curve ellittiche irriducibili C che possono appartenere ad F:

α) Curve C *isolate*, aventi *una* aggiunta C' pure isolata.

β) Curve C di un fascio, che (per il n. 4) ha il grado 0 ossia è privo di punti base.

Consideriamo sopra F un fascio di curve ellittiche irriducibili |C|; vi sarà almeno una curva C' aggiunta a questo fascio, la quale non sega in alcun punto le C.

Se C' fosse irriducibile si dedurrebbe

$$|C| = |C'|$$

contro l'ipotesi che il genere di F sia

$$p_g = 0 .$$

La C' sarà dunque una curva composta; designeremo con $C_1 , C_2 \ldots$ le parti di C' che appartengono a curve C diverse fra loro. Ora si ha

$$|2C'| = |2C_1 + 2C_2 + \cdots| = |2C| ,$$

quindi la curva

$$2C_1 + 2C_2 + \cdots$$

si può riguardare anche come composta mediante due C. Affinchè ciò accada, appartenendo $C_1, C_2 \ldots$ a diverse C, deve essere

$$2C_1 = C$$
$$2C_2 = C,$$

e la C' deve comporsi di due sole curve:

$$C' = C_1 + C_2.$$

Segue poi che

$$|C_2 + C_1'| = |(C_1 + C_2)'| = |C''| = |C|,$$

quindi

$$C_1' = C_2,$$

e

$$C_2' = C_1.$$

Come conclusione si ha:

Un fascio di curve ellittiche irriducibili C, *sopra* F, *ammette una sola curva aggiunta composta di due parti di genere* 1, *isolate,* C_1 *e* C_2, *le quali sono aggiunta l'una all'altra. Le curve* C_1, C_2 *contate due volte costituiscono due curve particolari del fascio* $|C|$.

9. Concludiamo l'esame delle proprietà generali dei sistemi lineari tracciati su F, determinando *tutti i sistemi lineari completi irriducibili.*

La questione viene risoluta dal seguente teorema:

A prescindere da componenti fisse sopprimibili senza diminuire il genere del sistema, i soli sistemi completi riducibili di genere virtuale > 0 *che possano esistere su* F *sono quelli composti colle curve ellittiche (irriducibili) di un fascio e con una bisecante (irriducibile) di genere* 0.

Occorre esaminare due casi di riducibilità che un sistema $|C|$ può presentare ([1]), cioè il caso in cui le parti variabili delle C sieno irriducibili e quello in cui esse si compongano colle curve d'un fascio.

1° caso. — Sommiamo ad un sistema lineare irriducibile $|C_1|$ di genere π_1 (≥ 1) una curva C_2 di genere π_2 (≥ 0) secante le C_1 in i (≥ 0) punti. Si ottiene allora un sistema di genere

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

e quindi di dimensione

$$\geq \pi - 1.$$

Ora se $\pi_1 > 1$, la dimensione di $|C_1|$ vale $\pi_1 - 1$ (n. 5), e quindi il sistema completo $|C_2 + C_1|$ risulterà più ampio del sistema riducibile $C_2 + |C_1|$ che contiene C_2 come parte fissa, ogniqualvolta sia $\pi > \pi_1$.

([1]) Cfr. la mia citata *Introduzione*, n. 5.

In altri termini se il sistema completo $|C_2 + C_1|$ contiene C_2 come parte fissa, questa può essere soppressa senza diminuire il genere del sistema. (Una discussione approfondita mostrerebbe che questo caso è possibile soltanto per $\pi_2 = 0$, $i = 0, 1$).

Suppongasi ora

$$\pi_1 = 1,$$

cioè $|C_1|$ sia un fascio di curve ellittiche; esaminiamo quali curve C_2 possono sommarsi al fascio senza ampliarlo, in guisa da ottenere un sistema completo riducibile $C_2 + |C_1|$, che contenga C_2 come parte fissa.

In primo luogo C_2 può essere parte di una qualche C_1 ($i = 0$); ma allora il genere di

$$|C_1 + C_2|$$

vale

$$\pi = 1.$$

Se C_2 non è parte di una C essa sega in due punti almeno le C_1, poichè incontra almeno in un punto le due componenti della C_1' che raddoppiate costituiscono due particolari C (n. 8).

Si ha dunque

$$i \geq 2.$$

Affinchè la dimensione di $|C_2 + C_1|$ risulti uguale a quella del fascio $|C_1|$ deve aversi

$$\pi - 1 = 1 + \pi_2 + i - 2 = 1,$$

cioè

$$i = 2 \ , \ \pi_2 = 0;$$

come nell'enunciato, la C_2 deve essere una curva di genere 0 bisecante le C_1.

È poi chiaro che se ad un sistema di genere due, composto colle curve ellittiche di un fascio e con una bisecante razionale, si somma un'altra curva per modo da aumentare il genere del sistema, si ottiene un sistema completo più ampio (di dimensione ≥ 2).

2° caso. — Consideriamo sopra F un fascio di curve irriducibili C_1 di genere $\pi_1 \geq 1$, e formiamo il sistema multiplo $|rC_1|$ dove $r > 1$.

Se $\pi_1 > 1$, due C_1 si segano in $2\pi_1 = 2 \geq 2$ punti, e quindi il genere di $|rC_1|$ vale

$$\pi_r > r + 1$$

e la sua dimensione è

$$> r;$$

il sistema completo $|rC_1|$ è dunque un sistema irriducibile più ampio di quello composto coi gruppi di r curve del fascio $|C_1|$.

Se $\pi_1 = 1$, $|rC_1|$ è il sistema ∞^r composto dei gruppi di r curve del fascio $|C_1|$ ed ha il genere

$$\pi_2 = 1.$$

Una curva C_2 la quale non sia parte di una C_1 sega le C_1 in due punti almeno (vedi 1° caso) e quindi le rC_1 in $2r$ punti; pertanto ove si sommi C_2 ad $|rC_1|$ si ottiene in tal caso un sistema di genere $> r + 1$ e di dimensione $> r$, cioè un sistema irriducibile più ampio di $C_2 + |rC_1|$.

Se invece si sommi ad $|rC_1|$ una curva C_2 (di genere ≤ 1) che sia parte di una C_1, il sistema completo $C_2 + |rC_1|$ contiene C_2 come parte fissa, ma il suo genere vale 1.

Confrontando i varî resultati ottenuti resta stabilito il teorema sopra enunciato.

III.

Rappresentazione delle superficie F sopra un piano doppio.

10. *Procedimento di riduzione.* — Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di genere $\pi > 1$, e quindi di dimensione $\pi - 1$, sopra la superficie F.

Il sistema completo $|2C| = |2C'|$ ha il genere

$$4\pi - 3$$

e quindi la dimensione

$$4\pi - 4;$$

in esso sono contenute

$$\infty^{\pi-2}$$

curve spezzate in due C, ed altrettante curve spezzate in due C'.

Si troveranno dunque, entro $|2C|$, delle curve comuni ai due sistemi $\infty^{2\pi-2}$, le quali si compongono nello stesso tempo di due C e di due curve aggiunte C'.

Siccome le C, C' non appartengono ad uno stesso sistema lineare, le suddette C e C' componenti di una stessa curva

$$K = C + C = C' + C'$$

dovranno essere spezzate.

11. Il procedimento accennato ci conduce dunque a costruire entro ogni sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 1$, delle curve spezzate. Più precisamente, nel caso $\pi > 2$, esso ci permette di *costruire un sistema lineare di genere* $< \pi$ *e* > 1, *oppure di determinare una curva* C *spezzata in due componenti ellittiche secantisi in* $\pi - 1$ *punti.*

Si possono distinguere i seguenti casi:

1° caso. Una delle due curve C, componenti K, sia composta di due parti irriducibili C_1 e C_2.

L'altra C sarà pure spezzata ed in essa si potranno distinguere due parti (irriducibili o no) C_4, C_3, le quali associate rispettivamente a C_1 e C_2 comporranno due curve C'; si avrà dunque

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C|$$
$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'|.$$

Di qui si deduce

$$|C_1 + C_4| = |(C_1 + C_2)'| = |C_1 + C_2'|$$
$$|C_4| = |C_2'|,$$

e quindi

$$|C_2| = |C_1'|.$$

Pertanto le curve C_1, C_2 avranno il genere ≥ 1, e ci troviamo quindi nelle condizioni dell'enunciato.

2° caso. Ciascuna delle due componenti C di K consti di più che due parti. Distinguiamo qui varie ipotesi:

α) Togliendo da una C qualcuna delle sue parti si ottiene una curva composta di genere ≥ 2.

Allora questa curva appartiene ad un sistema contenuto parzialmente in $|C|$ ed avente perciò una dimensione $< \pi - 1$ e un genere $< \pi$.

β) In una delle componenti C di K si trova una parte C_1 ellittica.

Siccome la C è connessa, si avrà in essa un'altra parte X secante C_1 in $i > 1$, oppure se X ha il genere > 0, si ricade nell'ipotesi α) perchè la curva

$$C_1 + X$$

ha il genere > 1.

Se invece $i = 1$ e X ha il genere 0, la curva

$$2C_1 + X$$

ha il genere due, ed appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

γ) Ognuna delle componenti C di K consti di $n > 2$ parti di genere 0, e quindi di grado -2.

Fra queste parti consideriamone una θ che seghi le C generiche nel minimo numero di punti e sia 1 questo numero; sia poi ϱ il genere della curva residua $C - \theta$, la quale segherà θ in $s + 2$ punti. Avremo

$$\pi = \varrho + s + 1.$$

Ora se $\varrho \geq 2$ si ricade nell'ipotesi α); se invece $\varrho \leq 1$ deve essere

$$s \geq \pi - 2.$$

Ma poichè

$$ns \leq 2\pi - 2 \quad , \quad n \geq 3,$$

si deduce

$$\pi \leq 4,$$

cioè (supponendosi $\pi > 2$)

$$\pi = 4$$

o

$$\pi = 3.$$

Esaminiamo separatamente questi due casi.

Sia $\pi = 4$; allora ognuna delle componenti C di K consterà di $n = 3$ parti, ed ognuna di queste parti segherà le C in $s = 2$ punti.

Avremo

$$K = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_4 + C_5 + C_6)$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3| = |C_4 + C_5 + C_6| = |C|,$$

e sarà p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_6| = |C_4 + C_5 + C_3| = |C'|,$$

e quindi si dedurrà

$$|C_6| = |C_3'|;$$

ma ciò significa che il genere di C_3 risulterà > 0 contro il supposto.

Sia invece $\pi = 3$; allora essendo $s \geq 1$, si avrà, per ciascuna componente C di K, $n \leq 4$, cioè $n = 3$ o $n = 4$.

Ma se una C consta di tre parti ($n = 3$) si può ripetere il ragionamento precedente, da cui segue che una delle suddette parti ha il genere > 0 (ipotesi α) e β)).

Giova dunque supporre ciascuna C composta di quattro parti ($n = 4$), ed in tal caso si vede che ciascuna di queste sega in *un* punto le C generiche.

Si potrà porre

$$K = (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + (C_5 + C_6 + C_7 + C_8)$$

dove

$$|C_1 + C_2 + C_3 + C_4| = |C_5 + C_6 + C_7 + C_8| = |C|.$$

Ora si deve ottenere una C': o riunendo tre parti (p. es. C_1, C_2, C_3) della prima C ad una (C_8) della seconda; o riunendo due parti (p. es. C_1, C_2) della prima C a due (C_7, C_8) della seconda.

La prima ipotesi porta

$$|C_8| = |C_4'|$$

cioè C_4 ha il genere > 0 e si ricade così nelle ipotesi α) β).

Riferiamoci alla seconda ipotesi, cioè sia p. es.

$$|C_1 + C_2 + C_7 + C_8| = |C'|.$$

Si deduce

$$|C_7 + C_8| = |(C_3 + C_4)'|$$

e

$$|C_5 + C_6| = |(C_1 + C_2)'|.$$

Ora dunque le curve composte $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ avranno il genere 1 (lasciando da parte il caso in cui questo genere sia > 1 v. α)), e si segheranno in due punti.

Se $C_1 + C_2$ avesse due punti comuni con una delle C_3, C_4 si ricadrebbe nell'ipotesi α); dobbiamo dunque supporre che $C_1 + C_2$ seghi in un punto C_3 e in un

punto C_4; ma allora (come nell'ipotesi β)) costruiamo tosto una curva di genere due

$$C_3 + 2(C_1 + C_2)$$

la quale appartiene ad un fascio di curve (riducibili) dello stesso genere.

12. La conclusione del procedimento spiegato innanzi è la seguente:

Se sopra la superficie F è dato un sistema lineare irriducibile $|C|$ di genere $\pi > 2$, si può costruire:

1) o un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due;

2) o un sistema lineare $|C_1|$ di genere $< \pi$ e > 2 contenuto in $|C|$; questo sistema si può ritenere irriducibile, perchè (n. 9) la riducibilità può tenere soltanto a delle eventuali componenti fisse, tolte le quali resta sempre un sistema (di genere > 2) contenuto in $|C|$ e però di dimensione $< \pi - 1$ e genere $< \pi$;

3) o infine una curva C spezzata in due componenti ellittiche con $\pi - 1$ punti comuni.

Ora nel caso 2) la riduzione si può proseguire partendo da $|C_1|$ anzichè da $|C|$, e si arriverà finalmente ad un fascio di genere due (caso 1)), oppure s'incontrerà ad un certo punto il caso 3).

Ma anche in questo caso si può spingere avanti la riduzione, tutte le volte che sia $\pi > 2$. Dimostriamo infatti che: *se in un sistema lineare irriducibile* $|C|$ *di genere* $\pi > 2$, *dato su* F, *vi è una curva spezzata in due componenti ellittiche, si può costruire su* F *un sistema lineare di genere* $< \pi$ *e* ≥ 2.

Ritorniamo all'osservazione del n. 10. Entro il sistema $|2C| = |2C'|$ le serie $\infty^{2\pi-1}$ di curve spezzate $C + C$ e $C' + C'$ hanno delle curve comuni. Il numero di queste, ove sia finito, è uguale al prodotto degli indici delle due serie $\infty^{2\pi-2}$, quindi è > 1 per $\pi > 2$.

Pertanto si avranno più curve K (distinte o infinitamente vicine) comuni alle serie $C + C$ e $C' + C'$. Se non si vuol ricadere in uno dei casi di riduzione considerati nel numero precedente, si deve supporre che ciascuna delle suddette curve K si componga di due C spezzate alla lor volta in *due parti* ellittiche *irriducibili*. Così avremo una prima curva

$$K = C_1 + C_2 + C_1' + C_2',$$

le cui parti C_1, C_2, C_1', C_2' saranno curve ellittiche *isolate*, giacchè se p. es. C_1 variasse in un fascio la sua aggiunta C_1' sarebbe spezzata.

Parimente troveremo una seconda curva

$$K = C_3 + C_4 + C_3' + C_4'$$

composta di 4 curve ellittiche isolate.

Ora occorre esaminare due casi:

1° caso. Le 4 curve nominate $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$, $C_1' + C_2'$, $C_3' + C_4'$, sieno *distinte*.

Allora anche le 8 componenti $C_1, C_2, C_3, C_4, C_1', C_2', C_3', C_4'$, saranno fra loro distinte, giacchè se fosse p. es.

$$C_3 = C$$

le C_2, C_4 apparterrebero ad un fascio di curve ellittiche, mentre per ipotesi esse sono curve ellittiche isolate.

Ciò posto consideriamo le due coppie di curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$; esse si segano in

$$(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) = 2\pi - 2$$

punti, quindi si avrà o

$$\pi - 1 > (C_1 C_3) > 0$$

oppure

$$(C_1 C_3) = 0 \quad \text{o} \quad (C_1 C_4) = 0.$$

Nella prima ipotesi il sistema $|C_1 + C_3|$ avrà il genere > 1 e $< \pi$.

La seconda ipotesi è impossibile attesochè la curva ellittica C_1 è isolata; dimostriamo invero che dall'ammettere la suddetta ipotesi segue che C_1 appartiene ad un fascio. Infatti, essendo

$$(C_1 C_3) = 0$$

e supponendosi C_3 distinta da C_1, C_1' e così C_1 da C_3, si considerino le due curve ellittiche composte

$$C_1 + C_3', \quad C_3 + C_1';$$

ciascuna di queste curve è aggiunta all'aggiunta dell'altra, quindi esse appartengono ad un medesimo fascio; ma poichè le C_1, C_3' sono sconnesse, tutte le curve del fascio saranno del pari spezzate in due parti sconnesse, e queste parti varieranno in un fascio a cui appartiene C_1.

2° caso. Due fra le curve nominate, p. es. $C_1 + C_2$ e $C_3 + C_4$ sieno *infinitamente vicine*; sia p. es. C_3 infinitamente vicina a C_1 (e C_4 a C_2).

Consideriamo come innanzi le curve composte

$$C_1 + C_3', \quad C_1' + C_3;$$

esse apparterranno ad un fascio di curve ellittiche spezzate, e le parti variabili di queste genereranno un fascio contenente C_1; la conclusione è assurda giacchè per ipotesi C_1 è una curva ellittica isolata.

13. Confrontando le conclusioni dei nn. 11, 12 si deduce che:

Si può costruire sopra le superficie F un fascio di curve, riducibili o irriducibili, di genere due.

Sia $|C|$ questo fascio, e supponiamo dapprima che esso sia irriducibile, e possieda quindi due punti base A, B.

Entro il sistema $|2C|$ vi è *una* curva K composta ad un tempo di due C e di due C'; e si possono distinguere due casi:

1° caso: le due C componenti K sono distinte (e quindi non hanno parti comuni).

Allora in ciascuna C si possono distinguere due parti (irriducibili o no) le quali associate rispettivamente alle parti dell'altra compongono due C'; poniamo dunque

$$K = (C_1 + C_2) + (C_3 + C_4)$$

dove

$$|C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C|,$$
$$|C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C'|.$$

Si avrà allora

$$C_4 = C_2',$$
$$C_3 = C_1',$$

donde segue che le C_1, C_2, C_3, C_4 hanno il genere 1.

Notiamo ora che ciascuna delle parti suddette incontra la C generica in *uno* dei due punti base A, B del fascio $|C|$, che sono punti doppi della g_2^1 di C.

Infatti le curve $C_1 + C_2$, $C_3 + C_4$ contengono la coppia AB, mentre le $C_1 + C_4$, $C_2 + C_4$ (aggiunte a C) hanno come punto doppio uno dei punti di quella coppia.

Ciò posto consideriamo il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |C_1 + C_1' + C_2'|$$

esso è una rete di curve di genere 3. Queste curve L incontrano la C_2 in *due* punti fissi P, Q, base per la rete; infatti il sistema

$$|C_1 + C_1' + C_2' - C_2| = |2C_1|$$

è un fascio di curve ellittiche; i punti P, Q sono le intersezioni di C_2 rispettivamente con C_1 e con C_1'.

Le curve generiche L si segano a due a due, fuori dei punti base P e Q, in due punti variabili, quindi le L sono iperellittiche, e su ciascuna L i punti P, Q sono punti doppi della relativa g_2^1.

2° caso: le due componenti C di K coincidono.

Allora si ha nel fascio $|C|$ una curva C il cui doppio è anche il doppio di una C'. Perciò la C sarà spezzata e si otterrà una C' da questa C tralasciandone una qualche parte C_2 e duplicandone una qualche altra parte C_1; avremo dunque

$$C = X + C_1 + C_2$$
$$C' = X + 2C_1$$

e quindi

$$C_2 = C_1';$$

sicchè le curve C_1, C_2 saranno di genere 1. Affinchè $X + 2C_1$ riesca di genere due occorre che la X sia una curva di genere 0 secante C_1 e così C_2 in *un* punto.

In questo caso consideriamo ancora il sistema

$$|L| = |C_1 + C| = |X + 2C_1 + C_1'|;$$

le L sono curve di genere 3 di una rete; esse sono iperellittiche poichè incontrano in due punti le curve ellittiche del fascio $|2C_1|$; inoltre passano tutte per due punti base P, Q, uno sopra la X, che ha come residuo il fascio $|2C_1| + C_1'$, ed uno sulla C_1' che ha come residuo il fascio di genere 2 $|C'| = X + |2C_1|$.

In ciò che precede abbiamo supposto il fascio $|C|$ irriducibile, ma se esso si spezza si avrà

$$|C| = X + |2C_1| = X + |2C'_1$$

dove C_1, C'_1 sono curve di genere 1 ed X una curva di genere 0 che le sega in un punto. Allora il fascio aggiunto

$$|C'| = |X + C_1 + C_2|$$

è irriducibile e ricadiamo nell'ipotesi precedente (2° caso).

La conclusione è che:

Sopra la superficie F *si può costruire una rete di curve iperellittiche* L *di genere* 3, *secantisi a due a due in due punti variabili, ed aventi due punti base che, su ciascuna* L, *sono doppi per la relativa* g'_2.

14. Riferiamo proiettivamente la rete $|L|$ al piano rigato: si ottiene così la rappresentazione di F sopra un piano doppio con una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si compone

1) di due rette p, q corrispondenti ai punti P, Q;

2) e di una sestica K_6.

Cerchiamo di determinare le singolarità di K_6. Riferiamoci anzitutto al primo caso trattato nel numero precedente ove la rete

$$|L| = |C_1 + C'_1 + C'_2| = |2C_1 + C_2|$$

ha i suoi punti base P, Q sopra C_2.

Alla curva C_2 corrisponderà nel piano il punto $O \equiv (pq)$, e poichè il fascio

$$|2C_1| = |L - C_1|$$

è costituito di curve ellittiche, le rette per O segheranno $p + q + K_6$ in quattro punti fuori di O; dunque O sarà un punto doppio per K_6.

Alla curva C'_2, che fa parte di *una* L $(= C'_2 + C_1 + C'_1)$ corrisponderà nel piano una retta o, non passante per O, ed i punti $M = (op)$, $N = (oq)$ saranno almeno doppi per $p + q + K_6$, cioè apparterranno a K_6. Questi punti debbono rappresentare le curve C_1, C'_1; ma poichè $|L - C_1| = |C'_2 + C'_1|$ è un fascio di curve di genere due secanti C_1 in un punto $(C_1 C_2)$, si deduce che le rette per M debbono avere (oltre alle due intersezioni assorbite nel punto M doppio per $K_6 + p + q$) una intersezione con K_6 infinitamente vicina ad M; quindi M è triplo per $K_6 + a + b$, e doppio per K_6. Analogamente anche N è doppio per K_6.

Ora consideriamo sul piano doppio il fascio di coniche determinato da $2o$ e da $p + q$; esso rappresenta il fascio delle curve $|2C_2| = |2C'_2|$, e poichè queste curve sono ellittiche, la $K_6 + p + q$ avrà un punto triplo su p infinitamente vicino ad M, ed un punto triplo su q infinitamente vicino ad N. In altre parole K_6 avrà due tacnodi in M, N e p, q saranno le rispettive tangenti tacnodali.

In conclusione, *la superficie* F *viene rappresentata sopra un piano doppio con una curva di diramazione di 8° ordine, composta di*

1) *una sestica* K_6 *con due tacnodi* M, N *e un punto doppio nel punto di incontro delle rispettive tangenti tacnodali* p, q.

2) *e di queste due rette* p, q.

Alla *medesima rappresentazione* si arriva anche *nel secondo caso* del numero precedente, salvochè si presenta la *particolarità che uno dei tacnodi di* K_6 *cade infinitamente vicino ad* $O = (pq)$.

La nostra deduzione si trova confermata dall'analisi che occorre per invertire il resultato ottenuto.

Si abbia un piano doppio dotato di una curva di diramazione d'ordine 8, la quale si componga di una K_6 con un punto doppio O e di due rette p, q per O; e si cerchi quali altre singolarità sono da imporre alla curva di diramazione affinchè risulti il genere

$$p_a = p_g = 0$$

e il bigenere

$$P = 1.$$

Si trova che bisogna dotare $K_6 + p + q$ di due coppie di punti tripli allineati con O; e si vede che queste coppie possonsi supporre appartenenti a p, q, altrimenti da K_6 si staccano una o due rette di diramazione per O, e si ricade in un caso particolare del precedente.

Le p, q saranno dunque due tangenti tacnodali di K_6; prese insieme esse costituiranno la curva di ordine $8 - 6$ seconda aggiunta alla curva di diramazione $K_6 + p + q$, e quindi la curva bicanonica del piano doppio, ridotta in questo caso a due rette eccezionali ($P = 1$).

Una curva canonica dovrebbe essere rappresentata da una retta passante per O, M, N; una tal retta non esiste ($p_g = 0$) e il numero virtuale di tali rette è pure $p_a = 0$.

IV.

Tipo delle superficie F nello spazio S_3.

15. Vogliamo ora illuminare il resultato generale ottenuto, mostrando come le superficie F che costituiscono i primi esempi noti di superficie con $p_a = P_3 = 0$ $P_2 = 1$, si lascino rappresentare sul nostro piano doppio tipico, in modo semplice e diretto.

In particolare invertendo poi la rappresentazione della sestica F_6 passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, riconosceremo come la suddetta F_6 possa prendersi come tipo della famiglia delle superficie per cui $p_a = P_3 = 0 \quad P_2 = 1$.

Si consideri dunque la superficie F che si è presentata dapprima, cioè la sestica F_6 di S_3 che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Trattiamo anzitutto il caso generale in cui si abbia un tetraedro proprio. Prendiamo allora uno spigolo a di questo, e due altri spigoli b, c incidenti ad a e sghembi fra loro; le quadriche per a, b, c segano su F_6 una rete di curve iperellittiche d'ordine 6 e di genere 3, che ha due punti base sullo spigolo d opposto ad a; questa rete conduce alla rappresentazione sul piano doppio, con una curva di diramazione $K_6 + p + q$, indicato al numero precedente. I punti del piano doppio corrispondono alle coppie segate su F_6 dalle rette incidenti a b, c. Le immagini delle sezioni piane di F_6, sopra il piano doppio, sono curve del 6° ordine di genere 4, aventi in O un punto doppio, gli stessi tacnodi M, N di K_6 colle stesse tangenti tacnodali, ed infine dotate di un punto doppio variabile in corrispondenza alla coppia che si trova determinata sopra la sezione piana omologa dalla retta del piano incidente a b, c; le nominate curve del 6° ordine toccano la K_6 in 8 punti semplici.

16. Fermiamoci ora a trattare alcuni casi particolari notevoli della F_6.

Fra questi si presenta il caso (osservato dal sig. CASTELNUOVO) in cui il tetraedro diventa un angoloide, avente i sei spigoli doppi per la F_6. In questo caso limite vale ancora la costruzione precedente: si considerino tre spigoli a, b, c dell'angoloide i quali non giacciano in una medesima faccia, ed i coni quadrici per a, b, c; questi segano su F_6 una rete di curve iperellittiche di genere 3 che conduce al solito piano doppio.

Infatti la costruzione indicata equivale alla seguente:

1) si proietti la F_6 dal punto 4plo, vertice dell'angoloide; si ottiene allora un piano doppio che ha una curva di diramazione di ordine 10, composta di quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 (le tracce dei piani dell'angoloide) e di una sestica L_6 passante doppiamente per i 6 vertici del quadrilatero formato da codeste rette;

2) si operi quindi una trasformazione quadratica del piano, prendendo come punti fondamentali tre vertici non allineati del quadrilatero suddetto, p. es. i vertici

$$A_{34} = (a_3 a_4) \; , \; A_{13} = (a_1 a_3) \; , \; A_{23} = (a_2 a_3) \, ;$$

allora la L_6 si trasforma in una K_6 che ha un punto doppio nel punto A'_{34} corrispondente alla retta $A_{13} A_{14}$, due tacnodi nei punti A'_{14}, A'_{13} omologhi alle altre due rette fondamentali, ed anche un punto doppio nel punto A'_{12} omologo ad $A_{12} = (a_1 a_2)$; inoltre le due rette a_1, a_2 si trasformano in due rette di diramazione, tangenti tacnodali di K_6 passanti per A'_{12}.

Si potrebbero considerare ora altri casi particolari notevoli della sestica F_6; notiamo in ispecie il caso di degenerazione del tetraedro i cui spigoli sono doppi per F_6, che conduce al piano doppio particolare considerato nel numero precedente, ove uno dei due tacnodi M, N cade infinitamente vicino al punto doppio O di K_6. Questo caso si ottiene immaginando che due spigoli opposti b, c del tetraedro, e quindi le le due coppie di facce per essi, si accostino indefinitamente; allora la F_6 ha una retta tripla b, una retta doppia c infinitamente vicina a b e sghemba con essa, ed infine altre due rette doppie sghembe fra loro e incidenti a b, c. La rappresentazione sul piano doppio si ottiene ancora particolarizzando la costruzione generale.

17. Senza fermarci più a lungo sul caso suddetto, esaminiamo un secondo esempio, cioè la superficie F_{10} del 10° ordine di S_5, che si è presentata al sig. FANO [1], come immagine della congruenza delle rette principali di un sistema lineare ∞^3 di quadriche senza punti base in S_3 [2]. Il sig. FANO ha osservato che la F_{10} ha il genere $p_a = p_g = 0$ e il bigenere $P = 1$, ed ha una curva bicanonica d'ordine 0; essa contiene 20 cubiche piane, ed è facile vedere che fra queste si trovano delle terne di cubiche secantisi a due a due in un punto; una di queste terne appartiene quindi ad un sistema lineare ∞^3 di curve di genere 4, secantisi a due a due in 6 punti. Mercè un tale sistema la F_{10} si rappresenta sopra una sestica F_6 di S_3, a sezioni di genere 4, dotata dunque di una curva doppia del 6° ordine; e poichè questa curva deve esser doppia per una superficie (biaggiunta) d'ordine 4, essa si compone dei 6 spigoli di un tetraedro. Ricadiamo così nel caso della sestica F_6 già esaminato innanzi. Del resto si potrebbe ottenere direttamente la rappresentazione di F_{10} sul nostro piano doppio considerando due cubiche piane incidenti di F_{10}, e la cubica aggiunta ad una di queste; si ottiene così una curva spezzata di genere 3 che appartiene ad una rete di curve iperellittiche dello stesso genere.

18. Abbiamo veduto (nn. 15, 16) come la superficie del 6° ordine, F_6, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro si rappresenti sopra un piano doppio la cui curva di diramazione si compone

1) di una sestica K_6 con due tacnodi M, N ed un punto doppio O intersezione delle tangenti tacnodali p, q;

2) e di queste rette p, q.

Viceversa prendiamo ad arbitrio la curva piana $p + q + K_6$ dotata delle singolarità indicate, si domanda se il piano doppio definito da questa curva presa come curva di diramazione può rappresentarsi sopra una sestica F_6 di S_3, passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro.

Un conto di costanti ci guida anzitutto ad una risposta affermativa.

Vi sono nello spazio ∞^{25} superficie del 6° ordine F_6, passanti doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, e poichè si hanno ∞^{15} omografie, le F_6 posseggono 10 invarianti assoluti. Questi invarianti si possono riguardare come i *moduli* da cui dipende la famiglia delle superficie rappresentabili sulle F_6, attesochè queste superficie non ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse.

Ora altrettanti moduli si riscontrano nella famiglia dei piani doppi sopra nominati, poichè la costruzione delle anzidette curve $p + q + K_6$ dipende da 18 costanti arbitrarie, ma ∞^8 curve trasformate omografiche l'una dell'altra conducono a piani doppi birazionalmente identici.

Questo conto di costanti basta già ad accertarci che la trasformazione della F_6 generale in un piano doppio con curva di diramazione $p + q + K_6$ deve essere invertibile.

(1) Accad. di Torino, Memorie, serie II, t. L (1901).

(2) Congruenza considerata per la prima volta da REYE, *Geometrie der Lage*, 3te Auflage, III, pag. 140.

Ora indicheremo brevemente in qual modo, data una superficie F riferita al piano doppio suindicato, possa compiersi la trasformazione di F in una sestica F_6 o in un caso particolare di questa.

A tale scopo basterà costruire sopra F un sistema lineare (∞^3) di curve di genere 4, mercè cui la F si trasformi in una superficie del 6° ordine; allora questa avrà una curva doppia del 6° ordine, doppia per una superficie del 4° ordine e non appartenente ad una quadrica, cioè una curva doppia costituita dagli spigoli di un tetraedro (eventualmente degenere).

Ora la rappresentazione di F sul nostro piano doppio, pone in evidenza sopra F almeno un fascio irriducibile di curve C di genere 2, rappresentato dal fascio delle rette per un tacnodo (p. es. M) di K_6, distinto da O.

Cerchiamo di costruire su F una curva ellittica D che seghi le C in due punti diversi dai punti base di $|C|$; il sistema lineare $D + |C|$ sarà contenuto in un sistema irriducibile ∞^3 $|D + C|$ di curve di genere 4, secantisi a due a due in 6 punti; le curve del sistema segheranno sopra D le ∞' coppie di una g'_2, e sopra una C generica le ∞^2 quaterne di una g^2_4 non composta colle coppie della g'_2, pertanto il sistema $|D + C|$ non avrà punti base e le curve di esso passanti per un punto non passeranno in conseguenza per altri punti; in conclusione $|D + C|$ condurrà alla trasformazione domandata della F in una F_6.

Si tratta dunque di costruire su F una curva ellittica D bisecante le curve C. E la soluzione del problema si ottiene riferendosi al piano doppio rappresentativo di F nel modo seguente.

Si consideri sul piano il sistema ∞^{12} delle sestiche che hanno comuni con K_6 il punto doppio O, i tacnodi M, N e le tangenti tacnodali; entro questo sistema lineare si trovano due sistemi non lineari:

1) quello ∞^4 delle sestiche di genere 5, toccanti K_6 in 8 punti semplici, che rappresentano le curve del sistema lineare determinato su F dall'immagine di K_6;

2) quello ∞^8 costituito da tutte le possibili coppie di cubiche K_3 aggiunte a K_6.

I due sistemi hanno comuni delle coppie di K_3 quadritangenti a K_6; ogni K_3 rappresenta su F una curva composta di due parti ellittiche, e ciascuna di queste parti biseca le curve C di genere 2 omologhe alle rette per M, di guisachè può prendersi come curva D che sommata a C fornisce un sistema $|C + D|$ ∞^3, costituito di curve di genere 4.

È opportuno osservare in qual modo il sistema $|D + C|$ venga rappresentato sul piano doppio. Bisogna sommare alla nominata K_3 una retta per M contata due volte, e poi la retta q (tangente tacnodale di K_6 in N) che è immagine di un punto base del fascio $|C|$, poi anche l'intorno del punto M che rappresenta l'altro punto base di $|C|$; si ottiene così un sistema ∞^3 di curve del 6° ordine aventi comuni con K_6 il punto doppio O, i due tacnodi M, N e le rispettive tangenti tacnodali, e dotate inoltre di un punto doppio variabile e di 8 contatti semplici con K_6.

Questo sistema ∞^3 di sestiche rappresenta il sistema delle sezioni piane di una superficie F_6 del 6° ordine, la quale ha in generale 6 rette doppie, spigoli di un

tetraedro, in corrispondenza ai due tacnodi M, N di K_6, al punto doppio O, alla retta $o = MN$, alla cubica K_3 quadritangente K_6 e ad un'altra cubica analoga che sommata alle rette (doppie) per N condurrebbe al medesimo sistema di sestiche tangenti in 8 punti a K_6.

Giova osservare che alle rette del piano doppio corrispondono le sezioni di F_6 colle quadriche di una rete che passano per due spigoli opposti del tetraedro e per un terzo spigolo. Si vede quindi che la costruzione data innanzi conduce ad invertire direttamente la rappresentazione di F_6 sul piano doppio, ottenuta al n. 15.

È ovvio che si possono ottenere i casi particolari della F_6, indicati al n. 16, in corrispondenza ad opportune particolarizzazioni del piano doppio.

Così si ottiene la F_6 che passa doppiamente per gli spigoli di un angoloide tetraedro, se la K_6 ha un ulteriore punto doppio R (oltre O, e i tacnodi M, N); allora le ∞^3 sestiche di genere 4 aventi gli stessi punti doppi di K_6, e tangenti ad essa in 6 punti, rappresentano il sistema delle sezioni piane di F_6.

Se invece la K_6 ha un tacnodo N infinitamente vicino ad O, si ottiene la F_6 dotata di una retta tripla e di tre rette doppie, due (in generale) sghembe fra loro e incidenti alla retta tripla, la terza retta infinitamente vicina alla retta tripla e incidente all'altre due. Si possono anche sovrapporre le due particolarizzazioni se K_6 ha il tacnodo N infinitamente vicino ad O, e contiene (oltre O, M, N) un altro punto doppio R, ecc.

Infine possiamo concludere:

Ogni superficie coi generi

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1$$

si può trasformare birazionalmente in una sestica passante doppiamente per gli spigoli d'un tetraedro, o in un caso particolare di questa superficie.

V.

Gruppo discontinuo delle superficie F e proprietà dei sistemi di curve che vi si collegano.

19. Non intendiamo di proseguire sistematicamente lo studio delle superficie F coi generi

$$p_a = P_3 = 0 \qquad P_2 = 1,$$

ma riferendoci alla sestica F_6, ottenuta come tipo di esse, ci proponiamo di metterne in luce alcune proprietà generali, di notevole interesse.

Ci riferiremo alla sestica F_6 che passa doppiamente per gli spigoli di un *tetraedro proprio* (tipo *generale*).

Consideriamo il fascio di quadriche passanti per un quadrilatero sghembo formato con due coppie di spigoli opposti aa' e bb' del tetraedro; si ottiene così su F un fascio di quartiche ellittiche $|C|$.

Una C generica viene segata in due punti $A_1 A_2$ da a, e in due punti $B_1 B_2$ da b.

Le due coppie di punti $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ su C, non sono equivalenti; infatti se lo fossero, le due rette doppie a, b sarebbero curve equivalenti su F_6, oppure si ridurrebbero equivalenti sommate a delle componenti di C spezzate [1]; ma le sole curve spezzate nel fascio $|C|$ sono in generale le $2c, 2c'$, ove c, c' designano le rette doppie costituenti la terza coppia di spigoli del tetraedro, e non si ha

$$a + c = b + c'.$$

Per la medesima ragione non sono equivalenti i multipli delle suddette coppie secondo un intero r qualsiasi, $r(A_1 + A_2)$ ed $r(B_1 + B_2)$.

Ciò posto si designi con z l'integrale ellittico di 1ª specie appartenente ad una C generica, con $2\varpi, 2\varpi'$ i suoi periodi, e con α, β le somme dei valori di z nei punti delle coppie $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$. Sopra la C verrà determinata razionalmente una trasformazione birazionale

$$z' \equiv z + \alpha - \beta \pmod{2\varpi, 2\varpi'},$$

trasformazione *non periodica* perchè non esiste alcun intero r per cui sia

$$r\alpha \equiv r\beta \pmod{2\varpi, 2\varpi'}.$$

Si deduce che:

La superficie F *ammette una trasformazione birazionale non ciclica in sè stessa, e quindi la serie infinita delle potenze di questa trasformazione, lascianti ferme tutte le curve ellittiche del fascio* $|C|$.

La superficie F_6 conduce così ad un nuovo esempio di superficie dotata di una *infinità discontinua di trasformazioni birazionali* in sè stessa, non contenuta in un gruppo continuo (infatti le superficie non razionali con un gruppo continuo hanno $p_a < 0$). Due esempî analoghi sono già noti; il primo fu segnalato dal sig. Humbert (Comptes rendus, 30 janvier 1897), il secondo dal sig. Painlevé (ibidem, 14 février 1897) [2].

20. È ovvio che il gruppo discontinuo formato dalla totalità delle trasformazioni di F_6 è più ampio di quello costruito innanzi che lascia ferme le curve del fascio ellittico $|C|$, giacchè si hanno su F_6 altri fasci di curve ellittiche analoghi a $|C|$, ed anzi se ne hanno infiniti.

Infatti se si prende su F_6 una curva ellittica isolata K, non appartenente a $|C|$ (p. es. la retta doppia a), questa viene trasformata in una *infinità discontinua di curve ellittiche isolate,* raddoppiando le quali si ottengono su F_6 *infiniti fasci di curve ellittiche.*

Consideriamo ora le infinite curve ellittiche isolate appartenenti ad F_6. Secondo un teorema del sig. Severi [3] (ora da lui stesso recentemente completato) tutte

[1] Cfr. F. Severi, Annali di Mat., serie III, t. 12, n. 6.

[2] Cfr. Picard e Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* t. II, p. 462.

[3] *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* Mathem. Annalen, Bd. 62, 1906.

queste curve debbonsi poter ottenere per *somma* e *sottrazione* da un numero finito di curve costituenti una *base minima* sulla superficie, ed anzi è facile vedere qui che le curve della base debbono essere fra le suddette curve ellittiche isolate. Orbene una curva ellittica isolata di F_6 non può certo ottenersi *per somma* da altre curve, sicchè si conclude che:

Sopra la superficie F_6 *non è possibile costruire tutti i sistemi lineari operando soltanto per somma a partire da un numero finito di sistemi.*

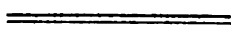
Per quanto sappiamo, una tale circostanza non era stata fin qui riscontrata sopra nessuna *superficie regolare*; anzi alcune ragioni di analogia facevano sospettare che essa non fosse possibile, e cioè che si potesse estendere a tutte le superficie regolari un noto teorema del sig. Hilbert sulle forme, in virtù del quale « tutti i sistemi lineari di curve *sopra una superficie razionale* si ottengono *per somma* da un numero finito di sistemi ».

Ebbene si vede così che l'estensione del teorema di Hilbert non può aversi neppure per tutte le superficie regolari; che nella costruzione dei sistemi lineari su queste a partire da una base minima, è necessario (almeno in qualche caso) operare per sottrazione oltrechè per somma, come appunto accade nella costruzione di Severi.

21. Terminiamo questa Memoria segnalando all'attenzione degli studiosi alcune belle questioni concernenti la superficie F_6:

1) se la totalità delle sue trasformazioni birazionali formi un gruppo *propriamente* o *impropriamente discontinuo*;

2) come si distribuiscano su F_6 i sistemi lineari di curve di un dato ordine, ed in ispecie le curve ellittiche isolate di dato ordine;

3) quali particolarizzazioni portino nel gruppo le degenerazioni del tetraedro i cui spigoli sono doppi per F_6, ed in ispecie se possa accadere che il gruppo si riduca ad un numero finito di trasformazioni cicliche.

Ricerche sui Flebotomi.
Memoria del Socio BATTISTA GRASSI.
(Con quattro tavole).

INTRODUZIONE.

Intorno al flebotomo, tanto fastidioso in molte parti d'Italia e, per quanto si può arguire dalle scarse notizie che si hanno in proposito, diffusissimo pure in Asia e in Africa, dove forse propaga morbi parassitarî, le nostre cognizioni sono molto imperfette. Fino ad oggi non soltanto difettano nella letteratura i dati sistematici e anatomici, ma non si conosce neppure il luogo del suo sviluppo, benchè si ritenga generalmente, a torto, come vedremo in appresso, che, come le zanzare, passi in un mezzo liquido i primi stadî della sua vita.

In questa Memoria io do una descrizione minuta dell'insetto perfetto, qua e là entrando in alcuni particolari anatomici che mi parvero più interessanti, e traccio anche il ciclo del suo sviluppo, facendone conoscere l'uovo, la larva e la ninfa.

Questa seconda parte del mio lavoro è riuscita molto più difficile di quanto possa parere a coloro, che non hanno in simili argomenti esperienza propria. Io ho cominciato le mie indagini nel 1899 e fino al 1905, non ostante che fossi molto coadiuvato dal mio abile inserviente Gesualdo Mascitti, non mi è stato possibile ottenere alcuno stadio di sviluppo. Anche negli ambienti, dove i pappataci appaiono in grande quantità, le loro larve sono difficilmente rinvenibili, stando esse nascoste, come vedremo in appresso, in punti remoti delle fogne, ai quali non si può giungere senza demolizioni estese.

L'allevamento artificiale, come dirò più avanti, in principio mi ha dato buoni risultati, ma in seguito mi è stato di scarsa utilità perchè le larve, ottenute in questo modo, morivano tutte, ancora giovani.

Avendo avuto a mia disposizione un numero relativamente esiguo di larve e di ninfe, devo costringere in limiti molto angusti i cenni anatomici sopra questi stadî.

Ringrazio la mia assistente dott. Anna Foà, che mi ha coadiuvato abilmente nell'allestire i preparati e ha disegnato alcune delle figure annesse alla presente Memoria.

Cenni bibliografici.

Debbo alla cortesia del dott. M. Bezzi, ditterologo italiano di meritata fama, la maggior parte delle indicazioni bibliografiche riguardanti i pappataci. In base a queste indicazioni ho fatto ricerca delle pubblicazioni relative all'argomento, purtroppo però non ho potuto consultarle tutte.

Per quanto si sa, il pappataci venne descritto e figurato la prima volta dallo Scopoli nelle sue *Deliciae florae et faunae Insubricae. Ticini 1786-1788.* Vale la pena di riportare le sue parole:

« Bibio (papatasi). Antennis, corpore, alisque pilosis. Animalculum exiguum, tenue, vix lineam longum, pilosum. Palpi duo, articulati: articulis senis, aequalibus, oblongis, imberbibus. Rostrum obtusum, glabrum, trisetum, difficillime extricandum. Oculi reticulati, albo-punctulati, nigri. Abdomen attenuatum. Pedes longi, binis unguiculis terminati. Alae quiescentes divaricatae. Abdomen si luci appositum armato oculo intueatur, rubrum apparet. Insubriae aestiva nocturnaque calamitas, aliisque Italiae Provinciis maxime infensa. Apud nos dicitur Papatasi, quod nomen triviale ritineo ».

Lo Gmelin successivamente nel *Linnaei Systema Naturae*. Edit. XIII. Lipsiae. 1788-93, riportava la specie di Scopoli, ascrivendola al genere *Musca* invece che al genere *Bibio*.

Io non trovo alcun'altra notizia fino al 1840, anno in cui il noto ditterologo Rondani in un opuscolo edito a Parma (che io non ho potuto consultare), creava per il pappataci un genere nuovo, oggi da tutti accettato, il genere *Phlebotomus*. Annessa a questo opuscolo vi è una tavola *iconibus nonnullis minus recte instructis* (parole dello stesso Rondani).

Nel mese di novembre del medesino anno 1840 Giuseppe Costa descrisse un insetto, se non eguale, molto simile al pappataci, denominandolo *Ciniphes molesta* e aggiungendo notizie sui suoi costumi, in una Nota che diresse all'Accademia degli Aspiranti Naturalisti di Napoli, la quale ne fece menzione nel rapporto dei suoi lavori compiuti nel 2° semestre 1840 (*Storia dei lavori dell'Acc. degli Aspir. Natur. dal maggio a tutto dicembre 1840*. Artic. Zoologia).

Negli *Annali* della stessa Accademia degli Aspiranti Naturalisti, vol. I, 1843 (sessione del 5 gennaio), a pag. 4, lo stesso autore pubblica una Nota, ove dice che, trovandosi nel giugno del 1839 in provincia di Terra di Otranto « gli occorse sperimentare le moleste punture di un dittero minutissimo comunemente noto sotto il nome di Ciniphes, nome, quantunque molto proprio per indicare lo irritamento e le flogosi che d'ordinario cagiona colle sue punture, nondimeno applicabile ad ogni genere d'insetto di tal fatta, siccome fu d'Aristotele adoperato ».

Fattosi allora a studiarlo minutamente sotto il rapporto della sua forma esteriore, della composizione anatomica e della sua biologia, lo trovava interessante per ogni lato, e ritenendo trattarsi di forma nuova lo descrisse appunto, come fu detto, col nome di *Ciniphes molesta*. Egli aggiunge: « Estesi indi (cioè dopo il 1840) le ricerche per determinare meglio i confini tra i quali vive questo dittero, quali si fos-

sero le metamorfosi sue, e l'abitazione della sua larva, della sua ninfa, e quanto altro riguardar può la sua vita: e compiutane la storia, ne dava lettura a questa R. Società Economica di Terra d'Otranto in agosto dello spirato anno ».

« Mi perviene ora un opuscolo del sig. CAMILLO RONDANI di Parma, impresso colà nel 1840, dal quale rilevo, che in pari tempo quel dotto entomologo si avvertiva delle medesime cose osservate da me; e creava ancor egli un nuovo genere, per questo micro-dittero cui assegnava il nome di *Flebotomus*. Senonchè guidato egli dall'analogia del volgar nome di *Papatasi* col quale venne indicato in alcuni luoghi della Lombardia, lo riconosceva nel *Bibio papatasii* descritto dallo SCOPOLI nel suo *Deliciae Faunae et Florae Insubricae*: senza nascondere però esser stato *malamente descritto, e non aver la figura altro di vero che una certa somiglianza*, esaminata *superficialmente* ».

« Veramente io non potei consultare questa opera prima di scrivere la mia Memoria; ma da quanto lo GMELIN ne riferisce giudicai non potersi quella sua *Musca papatasii* rapportare al nostro *Ciniphes*: e di ciò conviene eziandio il prelodato signor RONDANI... ».

« ... Comparando ora la descrizione della specie fattane da me con quella esibita dal Ditterologo Parmigiano, la trovo perfettamente di accordo; se si eccettuano due piccolissime cose, che, o sfuggirono al prelodato autore, o sono esse note differenziali proprie agl' individui di clima diverso. Consistono queste: 1° nell'ultimo articolo dei palpi, che nel *Flebotomus* dicesi esser lunghissimo e nel mio *Ciniphes* è lungo quasi e sì grosso quanto il 2° ed i rimanenti: 2° nelle ali che nel *Ciniphes* trovo aver figura più allungata, comparativamente a quella del *Flebotomus*; e taluno dei nervi loro ben di sovente trovasi trifido, in luogo d'esser bifido o forcato ».

« Aggiungerò pure che le appendici copulatorie del maschio sono moniliformi, cioè di più articoli globolari e quasi come accollati l'uno all'altro ».

« (Lecce, 15 dicembre 1842) ».

Secondo quanto riferisce in questa Nota, GIUSEPPE COSTA avrebbe trovato anche le larve e le ninfe del *Phlebotomus*, benchè abbia mancato di darne ulteriori notizie. Senonchè nel Catechismo di Zoologia pubblicato a Napoli nel 1846 da suo fratello ACHILLE, anch'egli membro dell'Accademia degli Aspiranti Naturalisti, i pappataci vengono ascritti ai Culicidi, le cui larve, dice lo stesso ACHILLE COSTA, pag. 312, « vivono nell'acqua entro il quale elemento ancor si trasformano in ninfa uscendone insetti perfetti ». Arguendo da questi dati, bisogna ammettere che GIUSEPPE COSTA abbia gravemente errato nel tentar di determinare il ciclo di sviluppo dei pappataci.

Il RONDANI che già fin dal 1841 nei *Nuovi Annali delle Scienze Naturali* di Bologna (anno III, tomo VI, pag. 256 e seg.), in un suo progetto di classificazione in famiglie dei ditteri europei, aveva fatto dei *Flebotominae* (più correttamente *Phlebotomidae*) una famiglia a sè, caratterizzata dalla « *proboscis circiter capitis longitudine, crassa* », due anni più tardi ritornava sull'argomento nelle *Annales de la Société Entomologique de France* (*Séance du 2 Août 1843*) pagg. 263-267, fornendo più minuti ragguagli sulla sistematica del *Phlebotomus*, termine che anche qui si trova erroneamente stampato *Hebotomus*. L'A. non va al di là dei dati strettamente

necessarî al sistematico e neppure questi dati sono rigorosamente esatti. Egli, tenendo conto anche della descrizione sopra accennata del COSTA, viene a distinguere tre specie di Phlebotomus:

Ph. papatasii Scop. (*Habitat in Italia centrali*, e precisamente *a planitie palustri usque ad juga montium altiora ditionis Parmensis*).

Ph. minutus Rond. (*Habitat in planitie parmensi prope padana*, e precisamente *in plano aquoso ad ripas Padi*).

Ph. molestus J. Costa = *Cyniphes molesta J. Costa* (*Habitat in regno neapolitano*).

Questa classificazione è basata sui palpi e sulle appendici copulatorie: come vedremo a suo tempo, io non ho avuto sottocchi che una sola specie proveniente da Roma, da Grosseto e da Parma. In quest'ultima località il compianto TENCHINI fece per me raccogliere molti individui d'ambo i sessi, che io trovai identici a quelli di Roma: identici mi apparvero anche molti individui del pari d'ambo i sessi, che lo stesso TENCHINI fece catturare in Baganzola di Gallese, località della Provincia di Parma (posta circa cinque chilometri a valle di questa città), nella quale si crede che il RONDANI raccogliesse i proprî esemplari. A me sembra di dover senza ambagi concludere che le descrizioni del RONDANI sono imperfette e le differenze specifiche da lui ammesse (eccetto forse quanto riguarda il *Ph. minutus*) in realtà non esistono, ciò che giustificherò in seguito.

Nella *Stettiner Entom. Zeit.*, 1844, V, pag. 117, che io non ho potuto consultare, viene descritta dal LOEW come *Haemasson minutus* una forma, che più tardi è stata riconosciuta, credo, dal LOEW stesso (id. id., VIII, 1847, pag. 149, pure da me non consultato) identica al *Phlebotomus papatasii* SCOPOLI. Al genere *Phlebotomus* accenna il LOEW anche nelle sue *Dipter. Beiträge* (Posen 1845). Quivi egli deplora di non aver potuto consultare il primo fascicolo delle « Memorie per servire alla Ditterologia Italiana » del RONDANI, nel quale è descritto il *Phlebotomus* affine ai generi *Haemasson* e *Philaematus* da lui, il LOEW, fondati. In base ad un estratto pubblicato nell'Isis del 1844, pag. 449, questi crede di poter conchiudere che si tratti d'un genere differente, perchè il 3° articolo dei palpi (4° secondo il RONDANI) è nel *Phlebotomus* molto corto, mentre nell'*Haemasson* e nel *Philaematus* è più lungo del precedente. Secondo il LOEW è però ingiustificata l'elevazione delle forme in discorso a nuova famiglia (*Phlebotomidae*), fatta, come si disse, dal RONDANI.

Il LOEW distingue i *Psychodina* (che denomina anche *Tipular. Gallicol. Sect. I. polineura*) in forme colla seconda nervatura longitudinale semplicemente biforcata, comprendenti i generi *Phalenomya* LOEW, *Diplonema* BERENDT e in forme colla seconda nervatura biforcata doppiamente, ma incompletamente (*unvollständig doppelt gegabelt*) comprendenti i generi *Nygmatodes* LOEW, *Philaematus* LOEW, *Posthon* LOEW, *Haemasson* LOEW, *Phlebotomus* RONDANI e *Psychoda* LATREILLE.

Ancora nel citato opuscolo (1845), il LOEW ammette che il suo genere *Nygmatodes* il quale fino ad un certo punto si avvicina al genere *Philaematus* quivi descritto, sia sinonimo di *Nemopalpus* S. MACQUART (1838) (V. *Diptères exotiques nouveaux ou peu connus*, 1838-1855, nei *Mémoires de la Soc. imp. des sc.*, *de*

l'agric. et des arts de Lille). (*Nemopalpus* oggigiorno viene ritenuto sinonimo di *Philaematus*, v. p. es. MEUNIER già avanti citato). Ma anche i generi *Posthon* LOEW (1845) e *Phalaenomya* LOEW (1845) non erano nuovi; essi devono ritenersi rispettivamente sinonimi di *Sycorax* HALIDAY (1838) e *Trichomyia* HALIDAY (1838), come è risultato più tardi, credo per opera dello SCHINER. È importante notare che questi due ultimi generi, indiscutibilmente affini al *Phlebotomus*, appartengono all'Europa. Il genere *Philaematus* coll'unica specie *pungens*, è pur esso affine, ma è una forma della copale (quaternaria).

Nei *Genera italica ordinis dipterorum* (*Dipterologiae italicae prodromus*, vol. I, Parmae 1856) viene mantenuta la famiglia *Phlebotomidae* (l'autore scrive *Phloebotomidae*) che vien distinta in due stirpi *Phloebotomina* (*Antennae filiformes, non moniliformes. Palpi articulo ultimo satis longiore vel longissimo*) e *Psychodina* (*Antennae moniliformes. Palpi articulo ultimo praecedentis sub-aequale*).

Nella Fauna austriaca (*Die Fliegen*, II, pp. 630-31, 1864, di I. R. SCHINER) alla famiglia *Psychodidae* viene ascritto il genere *Phlebotomus* ROND. (sinonimo di *Bibio* SCOPOLI, *Cyniphes* COSTA e *Haemasson* LOEW) e la specie *Ph. patatasii*. Questa descrizione, per quanto in generale esatta, è suscettibile di critica in ciò che riguarda le appendici genitali maschili.

Pochi cenni sul *Phlebotomus papatasii* leggonsi anche nell'opera: *Diptera neerlandica* (1877) del VAN DER WULP (opera che non ho potuto consultare).

Nell'*Entomologist Monthly Magazine* (2ª serie, vol. IV, Londra, 1893) il rev. EATON, che è il miglior conoscitore del gruppo dei ditteri di cui ci occupiamo, fa una sinopsi delle *Psichodidae* britaniche e accenna al *Phlebotomus* soltanto per dire che questo genere non è stato a lui accessibile.

A questa sinopsi l'EATON fece tre aggiunte sullo stesso periodico nel quadriennio 1895-1898. Nel 1895 propose la distinzione di due sottofamiglie: *Psychodinae* e *Phlebotominae* (questa coi generi *Sycorax, Trichomya* e *Phlebotomus*). La prima sottofamiglia viene da lui definita inoffensiva, la seconda occasionalmente ematofaga, ma soltanto il gen. *Phlebotomus*, giudicando dall'esperienza, attacca l'uomo (op. cit., 1895, pag. 210).

Nella mia opera *Studi di uno zoologo sulla malaria* (1891), si leggono alcune notizie riguardanti i pappataci.

Nell'opera del GILES, *Handbook of Gnats*, 1902, a pag. 5 sono inserite due figure poco precise riguardanti i *Phlebotomus* (sp.?), detti in India *sand-fly*, e un'altra ve n'è a pag. 82.

Lo stesso EATON sopra citato nell'*Entom. M. Magazine*, vol. XV, London 1904, occupandosi di nuovi generi di *Psichodidae* europei, considera i *Phlebotominae* come una sottofamiglia distinta in due serie: l'una comprendente i gen. *Nemopalpus* MACQUART e *Phlebotomus* RONDANI, e l'altra comprendente i generi *Sycorax* e *Tricomya* HALIDAY. Nella prima serie l'antenna è di 16 articoli, la proboscide è prolungata, coi palpi allungati aventi l'articolo terminale flessibile ecc.; nella seconda serie l'antenna è di 15 articoli, la proboscide non è prolungata, i palpi sono corti e piuttosto robusti, coll'articolo terminale rigido ecc. Sembra che tutte queste forme siano ematofaghe, avendo EATON trovato sangue (non umano) nell'addome di *Sycorax*

Nello stesso articolo l'Eaton fornisce pure brevi, ma esatte notizie sistematiche sul genere *Phlebotomus*.

Nel libro del Pressat, *Le paludisme et les moustiques*, Paris, Ed. Masson (1905), si parla di un dittero detto in arabo *Akhl-ou-Skout* ossia *mangia e taci*, che si ha ragione di ritenere propagatore del *bouton du Nil*, detto anche *bottone d'Aleppo*. Come risulta da una fotografia annessa all'opera, il dittero in discorso è nient'altro che un Flebotomino.

Intorno allo sviluppo dei Flebotomini non possediamo che le seguenti notizie erronee.

Nel *Report n. III of the Sleeping Sickness Commission* della *Royal Society*, London, 1903 a pag. 29, sta scritto che le larve d'un *Phlebotomus* furono trovate in Uganda dal dott. Christy insieme colle larve del *Culex viridis* in un medesimo recipiente. (Questo flebotomo è comunissimo nei *water-closets*. I flebotomi, sempre secondo lo stesso *Report*, occorrono nella maggior parte delle collezioni portate dall'Africa occidentale e orientale, e sembrano ovunque abbondanti).

Nell'opuscolo pubblicato dal British Museum (*Blood-sucking Flies*, *Ticks*, ecc. by Austen-London, 1905) si legge che del gen. *Phlebotomus*, di cui si conoscono attualmente soltanto 3 o 4 specie abitanti l'Europa meridionale, la subregione Mediterranea, il Sudan Egiziano e l'isola Ceylan, la storia dello sviluppo non è ancora stata messa in chiaro, benchè non vi sia dubbio che le larve vivano nell'acqua o in lordure liquide, oppure in liquame di pozzi neri (*cesspools*).

Nelle *Annales historico-naturales Musei Nationalis Hungarici*, 1905, pp. 235-54, il Meunier pubblica una Monografia degli Psicodidi dell'ambra del Baltico (fauna eocenica superiore), intorno ai quali si possedevano soltanto notizie sommarie del Loew (1850). In questa Monografia egli divide gli *Psychodidae* in *Psichodinae* e *Phlebotominae*, le *Psychodinae* con una nervatura cubitale alle ali (due longitudinali tra le forchette radiale e pobrachiale) e le *Phlebotominae* senza nervatura cubitale (una sola longitudinale tra le forchette radiale e pobrachiale); a questa seconda famiglia riferisce 5 generi: *Tricomyia*, *Diplonema*, *Sycorax*, *Eatonisca*, *Phlebotomus*. Di questo ultimo genere descrive una specie, *Phlebotomus tipuliformis*. Certamente questa specie non può confondersi con quella da me studiata e forse deve essere riferita ad un nuovo genere, ammesso, s'intende, che le osservazioni del Meunier siano esatte.

In un articolo del 20 luglio 1905 del giornale romano il *Messaggero*, è data notizia molto in breve delle larve e delle ninfe del *Phlebotomus papatasii* da me per il primo scoperte, nonchè del loro *habitat* che è differente da quello supposto dall'Austen sopracitato.

Nel 1905 (*Rendiconti Lincei*, *Classe di Scienze Fisiche ecc.*, Vol. XIV, Serie V, 2° sem., pag. 721) il Dott. Noè segnala speciali sensilli su alcune nervature del lembo alare del *Phlebotomus papatasii*.

Recentemente il Neveu-Lemaire (*Bulletin de la Société Zool. de France, Tom. XXI* n. 3, 1906) descrive brevemente una nuova specie di *Phlebotomus (Ph. Dubosqui)* del Sudan.

Nell'opuscolo « *Die blutsaugenden Dipteren* » del Grünberg (Jena 1907) v'è un semplice accenno ai *Phlebotomus*; sembra, scrive l'A., che succhino sangue, tanto il maschio che la femmina.

PARTE PRIMA.

Il Pappataci allo stadio d'imagine.

(Tav. I, II e III),

A) — *Descrizione e cenni anatomici.*

L'animaletto (Tav. I, fig. 1, 2 e 3) raggiunge la lunghezza di 1 $^1/_2$ fino a 2 mm. Ha un colore, di solito, giallo-pallido o giallo-ruggine. Alcune femmine sono notevolmente più oscure, quasi brune. Occhi neri. Dall'addome della femmina può trasparire la tinta rossa o bruno-oscura del sangue, di cui si è nutrita. Lo strato chitinoso, di colore giallognolo, è in complesso molto sottile, in modo che il corpo possiede una certa trasparenza, insolita a riscontrarsi negli insetti alati; esso è cosparso di spinule piuttosto fitte, visibili solo al microscopio, che sulle appendici possono apparire nettamente raggruppate ad anelli.

Guardando superficialmente, il corpo si direbbe rivestito di peli non molto fitti, a cui in certe parti (tre ultimi articoli dei palpi, zampe eccetto le cosce, primo articolo delle gonapofisi maschili dorsali, bilancieri e labbro inferiore) si associano squamule ricoprentisi l'una coll'altra, strette, senza insenatura alla base, talvolta coll'apice come troncato, talvolta terminanti a forma ovale (Tav. I, fig. 24 *a*). Attentamente osservando però, si trova qualche squametta anche in altre parti p. es., sulle ali. Approfondendo poi lo studio dei peli, si viene alla conclusione che quasi tutti devono in realtà considerarsi come squamule più o meno strette, ossia filiformi; ciò viene dimostrato dalla presenza di un picciuolo basilare (Tav. I, fig. 6). Al confine di questo picciuolo col resto della squamula notasi una strettissima zona più oscura, per la presenza di pigmento. Tali squamule filiformi sono alquanto curve; nelle più strette, coi metodi ordinari d'esame, non ho distinto la striatura longitudinale caratteristica delle squamule. Non mancano però, nelle più svariate parti del corpo, peli piuttosto corti e sottili, che non si possano considerare come squamule modificate, e che sono perciò veri peli. Peli di una forma speciale si notano in piccolo numero sulle antenne ecc.

Il capo (Tav. I, fig. 1) è chino, formante quasi un angolo retto col torace e sessile, sicchè di solito guardando il lato dorsale del torace, esso resta nascosto. È piuttosto piccolo, presso a poco tanto lungo quanto largo. Le sue suture sono appariscenti (Tav. I, fig. 4). Il clipeo è allungato, lungo press'a poco come i primi due articoli delle antenne, tronco in avanti. Gli occhi sono separati da uno spazio piuttosto ampio. Mancano gli ocelli. La metà posteriore del capo d'ambo i lati per un certo tratto è nudo (senza peli e squamette): nudo è anche l'estremo posteriore che presentasi alquanto incavato.

Le antenne, che sono lunghe poco meno del corpo (Tav. I, fig. 5 e 6), constano di sedici articoli, dei quali due, piuttosto corti, costituiscono lo scapo e quattor-

dici lunghi il flagello. Il primo articolo dello scapo è subcilindrico, il secondo subtondeggiante e fornito del sensillo di JOHNSTON. Questi due articoli sono notevolmente più grossi degli altri. Nel flagello gli articoli di mezzo sono alquanto rigonfiati all'indietro, gli ultimi tre un pochino più grossi dei precedenti; quanto alla lunghezza in complesso i prossimali sono più lunghi, i distali più corti e di media lunghezza quelli di mezzo. Precisando, il primo articolo del flagello è di lunghezza press'a poco uguale a quella del secondo e del terzo riuniti assieme, ovvero a quella degli ultimi tre pure considerati assieme. L'ultimo articolo è fornito di speciale papilla di senso (Tav. I, fig. 6). I peli delle antenne sono più lunghi, in complesso, all'estremità prossimale di ogni articolo; qua e là si nota qualche pelo corto, curvo e relativamente grosso.

Gli occhi sono grandi, veduti dal dorso appaiono subtriangolari (Tav. I, fig. 4).

La proboscide, misurata a cominciare dalla inserzione dei palpi, è lunga presso a poco come il capo, meno di metà dei palpi. La guaina esterna, detta anche labbro inferiore, è grossa, conformata a doccia, possiede, come nei Culicidi, un'oliva terminale fatta di tre parti, una impari mediana (linguetta o glossa) e due laterali (labelli, o semiolive) (Tav. I, figg. 10, 11 e 12 *gl* e *lab*). Queste ultime sono indipendenti l'una dall'altra e possono spostarsi, mutare di forma, apparendo quasi ad imbuto ecc. In ogni labello distinguonsi due porzioni, una esterna convessa e una sporgente internamente (anfrattuosità, secondo il FICALBI, per i Culicidi), che si potrebbe dire paraglossa (figg., cit. *pagl*) (uso questo termine senza dargli significato morfologico). Come nei Culicidi, si rilevano nell'apparato boccale, oltre al labbro inferiore, un fascio di sei stiletti (ipofaringe e epifaringe impari, mascelle e mandibole pari) e i palpi (mascellari) (Tav. I, figg. 7-18). Gli stiletti possono sporgere più o meno dal labbro inferiore, ovvero presentarsi così retratti da terminare press'a poco allo stesso livello con questo. L'epifaringe (Tav. I, fig. 15 *ep*) (labbro superiore) presenta una doccia longitudinale, è sostenuta da tre pezzi chitinosi in tutta la sua lunghezza (uno mediano e due laterali) e termina con una punta avente margini forniti di corte spine, piuttosto robuste nella femmina.

Nel maschio (Tav. I, fig. 13 *ep*) l'epifaringe si distingue facilmente perchè è relativamente meno allargata, ha le spine più sottili; oltracciò all'estremità libera va fornita di una sorta di laminetta (*ap*), che appare come continuazione del pezzo mediano ed è ricoperta di finissima peluria.

L'ipofaringe (Tav. I, fig. 15 *ip*) nella femmina termina a forma di foglia d'olivo ed è fornita di un tubolino (canaletto) centrale, che la percorre fino all'estremità libera. Il margine dell'ipofaringe nella porzione distale è fornito di molte corte punte.

Anche l'ipofaringe nel maschio è più ristretta; essa termina quasi d'un tratto ed è provvista come nella femmina, di punte, le quali sono però più gracili e più lunghe (peluzzi); oltracciò il canale che la percorre non arriva, come nella femmina, fino all'estremità libera (Tav. I, fig. 13 *ip*).

La mandibola (Tav. I, fig. 16 *man*) è fatta a lancetta, avente un margine dentellato alla parte distale. Essa manca nel maschio, come nelle altre forme di Ditteri ematofagi.

Più gracile della mandibola è la mascella (Tav. I, figg. 14, 15 e 16 *mas*), simile ad una lama ordinaria di coltello. Alla parte distale essa è fornita di dentelli, i quali da un lato non giungono fino all'estremo, mentre sono limitati a questo estremo dall'altro lato. Per entrare in più minuti particolari occorrono ulteriori indagini. Simili sono le mascelle del maschio (Tav. I, fig. 13), ma i dentelli sono meno accentuati, anzi quelli dell'estremo distale sono a mala pena distinguibili e non in tutti i preparati.

I palpi (mascellari) (Tav. I, fig. 7) constano di quattro articoli, il quarto flessibile. Non di raro terzo e quarto, ovvero il quarto solo, si ripiegano ad angolo sui primi due; di frequente il terzo si presenta perpendicolare, o quasi, rispetto ai primi due e al quarto. Primo e secondo sono subeguali; il terzo è lungo tre quarti del secondo; il quarto è subeguale al secondo insieme col terzo. Il primo articolo alla base presenta una sorta di strozzatura che a tutta prima fa pensare ad un articolo a sè.

I palpi sono sparsi di peli di senso, che non ho studiato minutamente: qui voglio soltanto accennare che il secondo articolo, poco dopo la sua origine, nella metà prossimale, presenta dal lato mediale un'area sensitiva speciale molto allungata e alquanto sporgente. Quest'area si vede più facilmente osservando l'animale dal lato ventrale: essa è caratterizzata da peli a racchetta, curvi, ricoprentisi. Sensilli dello stesso genere sono stati recentemente descritti dal Noé nel *Mycterotypus*.

I palpi mi appaiono alquanto più gracili nel maschio che nella femmina (Tav. I, figg. 8 e 9), ma non riesco a rilevare altra differenza, benchè qualche volta mi parrebbe che il quarto articolo nel maschio fosse relativamente un poco più lungo; in ogni caso si tratta di differenze non facili ad apprezzarsi con sicurezza.

I dati riferentisi alla lunghezza dei singoli articoli coincidono con quelli che risultano dalla figura del Rondani (Annales de la Société entom. s. cit.) e da lui stesso riassunti meno felicemente colle parole « *palporum articulus ultimus longitudine praecedentium conjunctim vix minor* ».

Nello stesso articolo del Rondani si legge che nel *Ph. molestus* Costa, l'ultimo articolo dei palpi è « *vix major pracedentium sejunctim* », in realtà però il Costa ha notato, come ho sopra riferito, che nella specie da lui descritta, l'ultimo articolo dei palpi non è lunghissimo, come nella specie del Rondani, ma è *lungo quasi e sì grosso quanto il secondo e i rimanenti.* Non mi sembra che da queste parole risulti quella distinzione, che il Rondani ha creduto di stabilire tra le supposte due specie.

Io non entrerò in particolari riguardanti lo scheletro chitinoso che dà appoggio all'apparato boccale: mi limiterò ad accennare che, come viene rappresentato dalla figura 17 della Tav. I, esiste anche nel pappataci un processo interno che serve di sostegno alla mascella e al palpo (*pr*) e che l'inserzione della mandibola è complicata.

Quanto alla funzione dell'apparato in discorso evidentemente il canaletto (Tav. I, fig. 18) che percorre l'ipofaringe è il condottino salivare (*sa*); lungo il semicanale dell'epifaringe scorre il nutrimento. Questo nutrimento consiste in sangue nella femmina: di sangue non può invece nutrirsi il maschio, a cui mancano le mandibole; se e di che cosa si nutra, non ho determinato.

Il torace appare molto gibboso (Tav. I, figg. 1, 3 e 19). Il pronoto (*prn*) è molto corto. Il mesonoto (*msn*) è molto sviluppato e forma appunto la gibbosità caratteristica; in esso distinguesi un protergite (scudo) (*prt*) enormemente grande e un metatergite (scudetto) (*mtt*) sporgente all'indietro. I peli occupano una piccola parte anteriore ed una grande parte posteriore dello scudo, separate da uno spazio nudo. Vi sono due altre zone fornite di peli, che provvisoriamente ascrivo al mesotergite (*mst*, *mst?*) del mesonoto. Nello scudo, osservando opportunamente, vedesi una linea che lo ripartisce in parte destra e sinistra, mentre non si rileva alcuna sutura trasversale. Nel metanoto (*mtn*) (dicesi metanoto, ma deve comprendere anche il primo tergite addominale), relativamente piuttosto sviluppato, possono distinguersi andando dall'avanti all'indietro varie fasce in senso trasversale (cinque) di cui non dirò in particolare; lateralmente vi sono due altri pezzi, che non so determinare; essi portano una fascia di peli.

L'alula (lobo alare) (Tav. I, fig. 20) è poco sviluppata, ottusa, difficile a vedersi in tutta la sua estensione; è rivestita parzialmente di peli.

L'ala (Tav. I, figg. 1 e 21) è lunga press'a poco come il corpo e caratterizzata da una punta apicale ben distinta. Nell'indicarne le nervature seguo la nomenclatura del Comstock e del Needham, che è stata adottata anche dall'Eaton (op. cit.). Subcosta (1) limitata circa al quarto prossimale dell'ala, confluente da tutti e due gli estremi col radio, facendo però gomito all'estremo distale. Radio semplice (2). Settore radiale (3, 3 e 4) con tre branche, che costituiscono la forchetta sezionale (3, 3) e una branca semplice (4). Lo scapo della forchetta è più corto delle sue branche e confluisce con la branca semplice formando così un'altra forchetta; il punto di confluenza è più vicino all'estremo prossimale che a quello distale della branca semplice. Questa comincia ad un livello che corrisponde prima del punto di mezzo della subcosta. Mediana (5) semplice, terminante all'estremità prossimale circa ad un quarto della lunghezza dell'ala. Cubitale (6) con una forchetta, la quale si forma, o, come si dice, ha la base ad un livello più prossimo a quello della base della forchetta formata per il confluire dello scapo della forchetta sezionale colla branca semplice, che a quello della base della forchetta sezionale. Prima anale (7) semplice interrotta alla base circa per un tratto uguale a metà della lunghezza della subcosta. Seconda anale (8) semplice non interrotta. Terza anale (9) mal distinguibile, brevissima, discendente al margine dell'ala press'a poco a livello della trasversa anale. Vena trasversa mediana quasi a metà della lunghezza dello scapo della cubitale. Cellula basale anteriore (*a*) allungata con una leggera insenatura anteriore prossimale, che comincia un po' più prossimalmente del livello della vena trasversa anale. Per altri particolari veggansi le citate figure.

Questa descrizione coincide con quella sommaria dataci dall'Eaton, a differenza di quanto si riferisce alla terza vena anale (secondo l'Eaton, « *wanting or hardly distinguishabel from the anal furrow*).

Quando l'animale sta in riposo tiene le ali divaricate all'indietro, non parallele all'appoggio, ma sollevate obliquamente presso a poco come si sogliono rappresentare le ali agli angeli. Il margine posteriore dell'ala (Tav. I, fig. 3) viene ad essere più vicino del margine anteriore alla parete d'appoggio; i margini posteriori delle ali

alla loro volta, vengono a trovarsi più vicini l'uno all'altro di quelli anteriori; gli apici delle ali restano molto più in alto (più dorsali) delle inserzioni di esse e lontani l'uno dall'altro tanto che la distanza tra gli apici viene ad essere quasi uguale alla lunghezza dell'ala.

Sulle nervature del lembo alare vi sono i sensilli del Noé.

I bilancieri non presentano nulla di particolare.

Le zampe (Tav. I, fig. 22) sono lunghe e gracili. Il primo paio (*a*) è meno lungo del secondo (*b*) e questo meno lungo del terzo (*c*). La lunghezza del terzo paio di zampe è più che una volta e mezza la lunghezza del corpo (Tav. I, fig. 1). Alla differenza tra le singole zampe contribuiscono pochissimo le coscie e le anche, che sono subeguali in tutte tre le paia, contribuiscono poco anche i femori. Le coscie sono gracili; il tarso è di cinque articoli.

Il femore varia poco da un paio all'altro. La tibia nel primo paio di zampe è lunga circa come il femore, più lunga nel secondo, molto più lunga nel terzo. Nel primo paio di zampe la tibia è circa di un terzo più lunga del primo articolo del tarso. Il primo articolo del tarso è presso a poco eguale al secondo e al terzo uniti insieme il secondo è un po' minore della somma del terzo e del quarto; il terzo è poco maggiore del quarto; il quinto è circa la metà del quarto. Presso a poco le stesse proporzioni si mantengono in tutte le zampe.

Zampe fornite di molte squamette, eccetto sulle cosce, dove si trovano soltanto peli. Per la presenza delle squamette ricoprentisi le zampe sembrano più grosse di quel che sono in realtà (Tav. I, fig. 23). I peli formano un verticillo all'estremità distale di ciascun articolo del tarso e della tibia, ma non mancano anche lungo l'articolo. Le zampe sono terminate da due unguicole molto gracili (Tav. I, fig. 23) (l'animale è capace di attaccarsi al vetro).

Nell'addome (Tav. I, fig. 1 e 2) lungo e sottile si distinguono a tutta prima otto anelli, ma è facile persuadersi che ne esistono evidentemente nove, i quali si denominano andando dall'avanti all'indietro secondo, terzo ecc. fino al decimo, senza escludere l'esistenza di tracce di un undecimo anello.

Il primo anello si ritiene scomparso, come negli altri Nemoceri. Il secondo anello è piuttosto piccolo; quei di mezzo sono più sviluppati; l'ottavo è breve; il nono molto ben distinto dal lato ventrale; dal lato dorsale vedesi bene soltanto quando l'addome è molto disteso; il decimo appare molto ben distinto dal lato dorsale. (Tav. II, figg. 6, 22 e Tav. III, figg. 1-5).

I singoli anelli sono pelosi: una serie di peli lunghi e sollevati caratterizza il margine posteriore dei singoli tergiti. Niente di particolarmente notevole negli anelli secondo e seguenti fino all'ottavo.

Meritano invece uno speciale studio gli ultimi due anelli, che offrono importanti modificazioni in rapporto colla presenza di gonapofisi e della apertura genitale, vicino alla quale sta anche l'apertura anale. Le gonapofisi sono sviluppatissime nel maschio, al quale danno un aspetto tutto speciale, che permette di riconoscerlo già ad occhio nudo: si potrebbe dire che l'addome — il quale spesse volte appare alquanto curvo in guisa da formare una concavità dorsale — si continua in una sorta di nassa, lunga

circa metà dell'addome stesso (Tav. II, fig. 5). Esse, le gonapofisi, sono invece pochissimo appariscenti nella femmina (Tav. III, fig. 3).

Nella femmina il nono anello dal lato dorsale è nudo e ci appare o piuttosto lungo, ovvero corto, ovvero quasi ridotto a una linea a secondo che l'addome è disteso, o meno. Il tergite corrispondente all'anello in discorso presentasi assottigliato, eccetto in avanti: qui vi è una stretta fascia ispessita, a cui corrisponde sullo sternite un ispessimento simile, che viene a trovarsi davanti alle gonapofisi (v. più avanti). Una disposizione quasi uguale si riscontra anche nel maschio. Il resto del tergite non è del tutto uniforme: noto in particolare nella femmina dietro alla fascia una pieghettatura, che si continua discendendo in basso e indietro sui lati del corpo.

Le gonapofisi, o appendici genitali, non sono finora state descritte che molto imperfettamente dal Rondani, dallo Schiner, dall'Eaton e dal Meunier: esse sono distinguibili in dorsali, intermedie e ventrale; le dorsali, o superiori, semplici, corte e non articolate nella femmina, lunghe e divise in due articoli nel maschio: la ventrale o inferiore fatta di un pezzo con cinque appendici, sì nel maschio che nella femmina (Tav. II, figg. 10 e 21), le intermedie (Tav. II, fig. 6) mancano nella femmina. Quelle dorsali, o, come si direbbe forse meglio, terminali (cerci trasformati) dipendono dall'anello, che abbiamo definito come decimo; anche le intermedie mi sembrano riferibili allo stesso decimo anello. Il pezzo ventrale colle sue cinque appendici dipende dal nono anello.

Così accennata la disposizione generale, entro in qualche particolare fornendo nello stesso tempo le notizie più interessanti anche sulle gonadi e sui gonodotti, nonchè sul digestorio.

Le gonadi femminili constano di molto numerosi e corti ovarioli, e ciò trova riscontro negli altri Nemoceri. Quando esse sono mature, l'addome appare rigonfiato, mentre l'estremità posteriore, che quasi non piglia parte al rigonfiamento, si presenta come una punta, ciò che accade anche quando l'animale ha succhiato molto sangue. Gli ovarioli si aprono in corti ovidotti (Tav. II, fig. 19 *o v d*) che si riuniscono in una vagina corrispondente all'ottavo e nono segmento. La vagina all'indietro si continua senza confini ben determinabili con una sorta di fenditura avente pareti incomplete lateralmente, che io denominerò vulva o fessura genitale e che si trova in corrispondenza del nono e del decimo anello (Tav. III, figg. 7-15 *vag.* e *vul*). Nella vulva dal lato dorsale si aprono anche i condottini delle spermateche che — vedi più sotto — sono in numero di due e vi corrisponde anche lo sbocco impari delle ghiandole sebifiche, che viene a trovarsi alla parte posteriore del decimo anello (V. figg. citate *c. spt* e *s. s e b.*).

Ripeto che le spermateche (*s p t*) sono due. Esse presentano una parete, nella quale si distinguono cellule che ritengo ghiandolari, e sono tappezzate internamente di una cuticola che sembra divisa in zone annulari, come si vede nelle figure. Ciascuna spermateca si continua in uno stretto e sottile condotto tappezzato di cuticola con rilievi apparentemente annulari, come nelle trachee. La posizione delle spermateche varia alquanto a seconda che l'addome è disteso o meno. Possono così apparire in

diversi punti, andando dalla parte posteriore del settimo anello fino a quella posteriore dell'ottavo (Tav. III, figg. 1, 2 e 4 e Tav. II, fig. 22). In ogni caso sono molto più vicine alla parete ventrale che alla dorsale. Come ho già detto, sboccano in corrispondenza alla vulva e precisamente all'estremità anteriore di questa. I loro condottini decorrono vicini l'uno all'altro.

Le ghiandole sebifiche pari, molto allungate, in corrispondenza al decimo anello, si fondono assieme per sboccare, come sopra ho detto (Tav. II, fig. 19 e Tav. III, figg. 7-15 *seb*, *i. seb* e *s. seb*).

Per comprendere meglio com'è fatta la vulva, occorre tornare sulla struttura del nono anello (V. figg. citate). Come si presenta dal lato dorsale, ho già detto più sopra. Dal lato ventrale è facile rilevare che esso è profondamente modificato, ma non riesce altrettanto agevole precisare queste modificazioni. Comincio a premettere che la parte ventrale dell'anello in discorso è molto spostabile, e perciò le appendici, di cui essa va provvista, possono vedersi a differenti distanze da quelle, di cui è fornito l'anello seguente (Tav. III, figg. 3 e 5). Questa parte ventrale costituisce una piega laminare sporgente posteriormente, cioè caudalmente, ed è appunto sotto la piega che viene a corrispondere la vulva. Da ogni lato (Tav. II, fig. 22 e Tav. III, figg. 2 e 5 ecc.), questa piega presenta alla superficie esterna un ciuffo di peli e, appunto nello spazio compreso tra questi due ciuffi, essa forma cinque appendici, di cui due, le più superficiali, si vedono molto facilmente, mentre le altre possono sfuggire ad un esame sommario (Tav. II, figg. 21 e 22 e Tav. III, fig. 2 ecc.). Denominerò queste cinque appendici: appendici superficiali pari (*a. s.*), appendici profonde pari (*a. p.*) e appendice impari (*a. i.*). Di queste appendici quella impari è la più profonda e le altre sono disposte, come ho detto, in due paia, uno sotto all'altro; le appendici di ciascun paio in un certo tratto si avvicinano moltissimo l'una all'altra sulla linea mediana. L'appendice impari è mediana, fornita di spinule, a margine tondeggiante e sta, ripeto, più approfondata (più dorsale) rispetto alle altre. Essa viene in gran parte ricoperta dalle appendici profonde laminari, subtriangolari a lati curvi (due dei quali più lunghi), fornite di speciali ispessimenti cuticolari e di due lunghi peli vicini al vertice, che viene a sporgere più o meno dalla parte postero-laterale delle appendici superficiali. Queste ultime, che restano dunque superficiali, sono fatte a guisa di lamine curve, fornite di peli, hanno contorno ovalare, e, quantunque possano mutare di posizione, in complesso appaiono divaricate all'indietro, alquanto meno delle appendici profonde. Gli sbocchi dei condottini delle spermateche vengono a trovarsi nascosti sotto l'appendice mediana impari (Tav. III, fig. 5 *s. spt.* e Tav. II, fig. 19).

Il decimo anello, che dalla parte dorsale presenta un tergite estendentesi anche ai lati del corpo e ricoperto di peli, dal lato ventrale, non presenta peli ed è fornito di cuticula chitinosa relativamente sottile (Tav. II, fig. 22). Nella parte di mezzo di questo segmento rilevasi però (Tav. III, fig. 2 e Tav. II, fig. 19) una sorta di cercine fatto da un ispessimento cuticulare; questo ispessimento è più spiccato nella parte anteriore; questa si prolunga verso i lati dell'addome (ciò non vedesi nella figura), mentre nel mezzo si continua con un pezzo cuticulare (*ch.*) impari (apodema) (Tav. III, figg. 1, 2 e Tav. II, fig. 22), che si protende molto in avanti tra i due condottini delle spermateche, viene a sporgere tra la vagina e l'intestino (Tav. III, fig. 10) e

dà attacco a robusti muscoli. In questa parte anteriore del cercine non mi riesce di determinare ciò che spetta al decimo segmento e ciò che si deve riferire al nono. Il cercine all'indietro finisce ristretto. Questo cercine e lo spazio da esso compreso (Tav. II, fig. 19 e Tav. III, fig. 2, *c*) entrano a costituire la parte più profonda, dorsale della vulva, mentre, come ho detto, la parte ventrale è costituita dalle cinque appendici del nono segmento. Si capisce che, a seconda che le parti sono sovrapposte, o spostate, la vulva viene a presentarsi differentemente. È appunto in corrispondenza alla parte ristretta del cercine sopradescritto, che viene a trovarsi l'apertura impari delle ghiandole sebifiche. Il cerchio limitato dal cercine è tappezzato, ripeto, di cuticola sottile. Son dell'avviso che cercine (oscuro nelle figure) e cerchio (*c*) abbiano molta importanza nella deposizione delle uova, alle quali forniscono come una sorta di guida (Tav. III, fig. 15, *g u*). Dalle parti laterali dorsali del decimo segmento sorgono due gonapofisi appiattite, troncate all'apice e divergenti all'indietro (non di rado presentano press'a poco il contorno di una scarpa); senza dubbio esse coadiuvano la deposizione delle uova (fig. citate). Tra e sotto (più ventralmente) a queste due gonapofisi, che trovano riscontro nelle gonapofisi dorsali del maschio (V. più avanti), esiste una sporgenza, a seconda delle condizioni, in cui si trova l'animale, più o meno spiccata; all'apice di essa sbocca l'ano.

Passiamo ora allo studio dell'apparato sessuale maschile (Tav. II, fig. 1). Esso consta di due testicoli (*te*) ovalari, che sboccano in due dotti deferenti (*d e*); questi si introflettono e s'aprono in un organo piriforme impari (Tav. II, figg. 15 e 16). Evidentemente ghiandolare (Tav. II, figg. 14, 15 e 16) è l'epitelio dei deferenti (*de*) in corrispondenza agli sbocchi, come pure ghiandolare è l'epitelio dell'organo piriforme (*prs.*). Potrebbesi perciò dire che si ha una sorta di vescicola spermatica funzionante anche da prostata, alla quale segue un dotto eiaculatore impari (*ej. im.*), del calibro presso a poco dei deferenti. Questo dotto eiaculatore si apre dopo un certo tragitto, poco più lungo di quello dei deferenti, in una piccola dilatazione (Tav. II, fig. 3, 4 e 13 *dil. ej. im*), tappezzata internamente da un rivestimento cuticulare, la quale si continua ugualmente tappezzata in due dotti eiaculatori (pari) molto più lunghi di quello impari (Tav. II, figg. 1-3, 11 e 12 *ej pa*). Questi raggiungono il decimo segmento, dove si prolungano dentro due astucci chitinosi, sporgenti dal lato ventrale, che finiscono a punta alquanto ricurvata verso il ventre e che possono senz'altro denominarsi peni (Tav. II, figg. 1 e 5 *pn.*). Lungo gli astucci chitinosi i due dotti sono mobili; e possono presentarsi sporgenti dall'apice di essi per un tratto maggiore o minore; talvolta non sporgono punto (Tav. II, fig. 1). A me sembra che l'astuccio fornisca al dotto una semplice scanalatura.

La dilatazione impari (figg. cit., *dil. ej. im.*) da cui, come ho detto, si dipartono i due dotti eiaculatori (*ej. pa.*) corrisponde al fondo di un organo chitinoso, che ha quasi la figura di una campana rovesciata (*camp. p.*) alquanto strozzata nella parte di mezzo (Tav. II, figg. 2, 3, 4 ecc.); invece del batacchio vedesi un bastoncello chitinoso (*ch.*), molto più lungo della campana e terminante in avanti in un'altra sorta di campana (*camp. a*). Nello spazio tra le due campane attorno al bastoncello chitinoso si trovano molti fasci muscolari longitudinali (Tav. II, figg. 2 e 13, *m*). A quest'organo va anche un robusto ramo nervoso (*n*). Evidentemente si tratta di un

apparato, che funziona come pompa per regolare l'uscita degli spermatozoi. Non è qui il caso di entrare in ulteriori particolari: dirò soltanto che il bastoncello sorge vicino all'apice della campana e che il condotto eiaculatore impari (*ej. im.*) arriva nella piccola dilatazione (*dil. ej. im.*), di cui ho già fatto cenno, percorrendo la cavità della campana dall'avanti all'indietro [1].

Abbiamo così dei gonodotti veramente singolari. È noto che le Efemeride hanno gonodotti pari, ma, per quanto mi consta, non si conosceva alcun caso in cui questi organi prima pari, diventassero impari e poi di nuovo pari.

Vediamo ora come si comportano le gonapofisi maschili. Come ho già detto, esse trovano in parte riscontro in quelle femminili (Tav. II, figg. 5-10). Il decimo segmento invece delle due corte gonapofisi femminili, presenta due gigantesche gonapofisi (gonapofisi dorsali, *d.*), fatte di due articoli ripiegati l'uno sull'altro in modo da ricordare un coltello a serramanico mezzo chiuso. L'articolo prossimale (stipite) è molto più grosso di quello distale (lacinia) e alquanto curvo: osservato dalla superficie mediale presenta alla sua base una piccola papilla pelosa (fig. 7 *pa.*). Lungo questo articolo si trovano peli e squamette. L'articolo distale è assottigliato, esso pure un po' curvo, senza squamette, ma con peli. Esso porta anche cinque corte palette (Tav. II, figg. 5 e 8), un po' curve, appena allargate alla sommità, che termina piuttosto ottusa; quattro sono tra di loro eguali, la quinta è un po' più piccola. Tre di queste palette, due grandi e la minore, si attaccano all'estremità distale dell'articolo. Le altre due grandi sorgono dal lato interno della curvatura dell'articolo, l'una dietro all'altra, ad una distanza tra di loro, che è minore della lunghezza delle stesse palette. La più distale di queste due palette sorge da un punto, il quale è lontano dall'apice dell'articolo più del doppio della distanza che separa l'una dall'altra.

Il Rondani, nella sua descrizione del *Ph. papatasii*, dice che le appendici copulatorie superiori (gonapofisi dorsali) dei maschi terminano con quattro spinule brevissime e che sono internamente provvedute di due sproni. Nella figura si vedono infatti rappresentate quattro spinule terminali e due sproni. Evidentemente, come mi risulta dal confronto cogli individui raccolti a Parma, la sua osservazione è imperfetta, essendo in ogni caso le spinule (da me dette palette) soltanto tre. Nel *Ph. minutus* queste spinule dovrebbero pure trovarsi in numero di quattro ed essere indistinti gli sproni. Io non ho mai veduto alcun individuo che presentasse questi caratteri e temo che si tratti anche in questo caso d'un errore d'osservazione.

In corrispondenza all'inserzione dell'articolo basilare delle appendici copulatorie (V. figg. già citate) in discorso, dal lato mediale scorgesi una sporgenza, da cui sorgono due pezzi che vengono ad essere collocati lateralmente a ciascun pene, due, cioè, a lato del pene destro e due a lato di quello sinistro. Uno di questi pezzi (*gonapofisi intermedia laterale ventrale*, *int. l. v.*) è curvo in senso opposto al pene, fornito di corti peli, largo e quasi appiattito, l'altro (*gonapofisi intermedia laterale dorsale*, *int. l. d.*) ha più o meno figura di un S con le curve appena segnate ed è senza peli, tondeggiante e sottile. Queste due gonapofisi formano come una forchetta

[1] L'interessante apparato genitale dei Flebotomi sarà oggetto di uno speciale lavoro nel mio laboratorio.

sorgente da un corto scapo. Medialmente rispetto a queste due gonapofisi intermedie e precisamente dalla base di quella, che ho denominata intermedia laterale ventrale, ne sorge un'altra (*gonapofisi intermedia mediale*, *int. med.*) molto più lunga, ricurva in senso opposto ad essa e fornita di peli nell'interno della curvatura, fino all'apice.

Brevemente si può dire che a lato di ciascun pene sorgono da una base comune tre gonapofisi, una mediale dorsale e due laterali, delle quali ultime l'una alla sua volta dorsale e l'altra ventrale. In realtà guardando il maschio intiero di lato si scorge prima quella laterale dorsale, più sotto quella laterale ventrale e quella dorsale mediale. (I termini dorsale e ventrale vengono usati soltanto per indicare la posizione relativa delle parti).

In complesso per quanto sia difficile stabilire i confini dei segmenti sembra di dover riferire tutte le appendici, di cui si è parlato, al decimo anello.

Il nono sternite presenta nella sua parte anteriore quell' ispessimento lineare che riscontrasi anche nella femmina e ripetesi al rispettivo tergite (V. più sopra). Questo sternite (Tav. II, figg. 5, 6, 9 e 10), si prolunga posteriormente in una lamina che con esso si articola (*lam.*). Questa lamina (*lamina subgenitale*) che può presentarsi distesa all'indietro ovvero sollevata e talvolta anche ripiegata in avanti, è provveduta di cinque rilievi o appendici (Tav. II, figg. 9 e 10). (Chi conosce quanta confusione regni intorno alle omologie degli organi genitali esterni degli insetti, non si maraviglierà della mia incertezza nella nomenclatura).

Di queste cinque appendici una è mediana impari (*i.*), molto piccola, fornita di spinule e rappresenta in realtà l'estremità libera tondeggiante della lamina; due altre sono pari, cioè disposte in paia, un paio più mediale (*m.*) dell'altro (*l.*). Le appendici più mediali sono assai più corte, a forma di lamina un po' incurvata, fornite di corti peli, e originano più all'indietro delle appendici meno mediali o laterali che si vogliano dire, le quali sono tondeggianti, fornite di lunghi peli e terminano con due palette simili a quelle che abbiamo vedute nelle gonapofisi dorsali.

Basta tener presenti queste brevi descrizioni e le figure che le illustrano per comprendere quanto sia giustificato il confronto tra le appendici maschili e quelle femminili, che ho premesso alla mia descrizione per più facilmente intenderci. Le gonapofisi dorsali (terminali) trovano esatto riscontro. La lamina subgenitale del nono anello del maschio colle sue cinque appendici è senza dubbio omologa alla lamina del nono anello, che copre la vulva colle sue cinque appendici nella femmina. Nella femmina non esiste però nulla di simile ai peni e alle tre paia di gonapofisi, che si trovano a lato di essi.

Aggiungerò ora alcuni brevi cenni riguardanti il tubo intestinale (Tav. II, figg. 17 e 18). Esso si compone di un intestino anteriore, al quale sono annesse, come nelle zanzare, tre vescichette o pompette o stomachi succhiatori che si voglian dire, due laterali piccoli (*su. l.*) ed uno mediano molto più sviluppato (*su.* nella fig. 17 e *su. m.* nella fig. 18).

L'intestino medio o stomaco chilifero è ristretto all'avanti, allargato all'indietro; si prolunga nell'intestino posteriore. Il confine tra queste due parti è segnato dallo sbocco dei tubi malpighiani (*m.*), che sono in numero di quattro e prima di sboccare si

riuniscono insieme due a due. Il retto è fornito di due sole pliche (*pl.*). Io non ho potuto distinguere che un sol paio di ghiandole salivali (*gh. sa.*), fatte a pera e provviste ognuna di un condottino escretore. I due condottini si riuniscono insieme in un condottino impari (*c. i.*), che si continua nel condottino dell'ipofaringe, di cui ho precedentemente parlato.

Ho così esaurita la descrizione dell'insetto al periodo d'immagine. Chiaramente, da quanto ho fin qui detto, risulta che io ho avuto sott'occhio una sola specie, la quale senza alcun dubbio è il *Ph. papatasi* Scopoli. Per quanto io ho potuto vedere, debbo ritenere ingiustificata la specie *Ph. molestus* Costa. Quest'ultimo si distinguerebbe oltre che per i palpi, carattere distintivo che in realtà manca, come ho detto più sopra, anche per le nervature trifide in luogo di bifide e per le appendici copulatorie del maschio moniliformi, cioè di più articoli globulari (Costa). Senonchè anche queste distinzioni non sembrano ben fondate e il carattere moniliforme deve attribuirsi ad un'alterazione prodottasi nell'allestire il preparato. Quanto alla nuova specie di Flebotomo descritta dal Neveu-Lemaire (*Ph. Dubosqui*), mi sembra che debba essere buona, a giudicare dal carattere dei palpi.

Quanto poi alla forma fossile descritta dal Meunier come *Ph. tipuliformis*, se i caratteri da lui indicati per le gonapofisi fossero stati osservati esattamente, essa dovrebbe riferirsi piuttosto ad un nuovo genere che ad una nuova specie; ma prima di pronunciarci definitivamente in proposito è necessario che la di lui descrizione venga rigorosamente controllata.

B). *Notizie dietologiche.*

L'insetto perfetto si trova a Roma dal maggio all'ottobre; è possibile d'incontrarne qualche esemplare anche in principio di novembre. Nell'Italia settentrionale scompare molto più presto.

Nella mia opera, *Studî di uno zoologo sulla malaria*, sta scritto quanto segue: « Le *Phlebotominae* sono state da me trovate nelle più differenti parti d'Italia. Nel 1898 in Lombardia non ne trovai più già ai primi di agosto; a Roma scompaiono al principio di ottobre; lo stesso presso a poco si verifica nell'Italia meridionale, dove alla metà di ottobre (1898 e 1899) non ne ho potuto più trovare alcun esemplare ». I pappataci d'ambo i sessi di giorno si raccolgono sempre nella parte alta delle stanze, tranne qualcuno pieno di sangue, che soffermasi sul muro a capo del letto. Stanno tanto sulla parte superiore delle pareti verticali quanto sul soffitto, disposti press'a poco come i *Culex*; si appoggiano però con tutte e tre le paia di zampe. Amano molto di approfondirsi nelle fenditure.

Il Rondani ha osservato che verso sera spessissime volte i maschi, e piuttosto raramente le femmine, si rifugiano sui vetri delle finestre. Ciò ho notato anch'io, ma non potrei asserire che i maschi fossero sempre in molto maggior numero. Qualche volta i maschi si trovano a preferenza lungo le scale della casa, o anche in locali non abitati degli appartamenti. Certo è che essi non possono succhiar sangue, come ha notato per il primo il Rondani, ma, come ho già detto, non so se abbiano necessità di nutrirsi di altri cibi.

Non è difficile di vedere maschi e femmine accoppiati e fermi alle pareti, il maschio colla testa in giù e la femmina colla testa in su.

I pappataci fanno voli corti e di lato, come si può vedere facilmente quando si molestano. Il volgo dice che saltano di lato. Pungono senza far rumore, da ciò il loro nome.

Non è facile di catturarli. Servono a questo scopo le provette, come per le zanzare.

La specie descritta dal Rondani come *Ph. minutus* e che, come ripeto, io non ho potuto procurarmi, sarebbe infrequente nell'interno delle case e comunissima invece *in extremis muris aedium*, ciò che fece pensare allo stesso Rondani che si nutrisse invece che del sangue dell'uomo, di quello di altri vertebrati.

Il pappataci punge di notte, ma nei luoghi poco illuminati o oscuri, può pungere anche di giorno. È raro che ci assalga all'aperto, di regola ci tormenta soltanto nelle case.

Quanto alla sua diffusione in Italia, completando le notizie già più sopra fornite, dirò di averlo trovato in Valtellina (ad Ardenno), a Rovellasca (provincia di Como), nelle provincie di Milano e di Pavia, a Venezia, nel Parmigiano, a Grosseto come anche in altre località della Maremma, nell'Agro Romano, in Puglia, in Calabria e in Sicilia (a Lentini).

In breve il pappataci è un animale molto comune in tutta l'Italia.

PARTE SECONDA.

Sviluppo.

A). *Notizie generali.*

Il pappataci si riproduce durante l''estate e l'autunno. Io ho infatti trovato individui maturi dal principio di luglio al principio d'ottobre. In due anni consecutivi (1905 e 1906) mi parve che le femmine mature abbondassero in due epoche, cioè alla fine di luglio e verso la metà di settembre: io tenderei a spiegare questo fatto ammettendo che si succedessero due generazioni annuali, una estiva e l'altra autunnale, ma oltre a queste due generazioni ve ne deve essere necessariamente una terza, perchè i pappataci svernano allo stadio di larva e perciò anche in primavera deve svolgersi una generazione, che è sfuggita alle mie osservazioni. Ammetto adunque che il pappataci abbia tre generazioni annuali: una primaverile, una estiva, e la terza autunnale: ciò nell'Italia media e meridionale; forse nell'Italia settentrionale ne ha soltanto due.

B). *Uova.*

(Tav. II, fig. 20 e III, fig. 6).

Ogni pappataci deposita le sue uova di regola sparse su pochi centimetri di superficie, non di rado alcune addossate l'uno all'altro, non mai però tutte, o quasi tutte, in un mucchio. Io ho calcolato che alcune femmine ne avevano fatte ciascuna almeno una quarantina. Le uova restano appiccicate alla superficie, su cui vengono depositate per es. alla parete d'un bicchiere, o d'una provetta; esse sono ovalari allungate, talora con un lato un po' schiacciato; raggiungono la lunghezza di poco più di mezzo mm. Appaiono ad occhio nudo oscure, sono perciò difficilmente visibili, a meno che non vengano depositate sul vetro, dove appunto io le ho trovate.

Esaminate al microscopio si mostrano di color bruno chiaro col corio fornito di tante striscie, che lo percorrono press'a poco da un polo all'altro, qua e là anastomizzandosi tra di loro; ogni striscia è prodotta da una doppia serie di ispessimenti cuticolari, a zig zag, molto irregolari, fatti per lo più da brevissime linee più o meno curve; essi vengono a delimitare uno spazio chiaro irregolare molto angusto nel mezzo della striscia. Attorno all'uovo può notarsi una sottilissima zona incolore dovuta alla secrezione delle ghiandole sebifiche; questa serve evidentemente per appiccicar l'uovo alla superficie su cui viene depositato.

C). *Larve.*

(Tav. III e IV).

Dopo alcuni giorni (non posso fornire cifre esatte) ne esce la larva che, almeno d'estate, deve crescere rapidamente. Nei miei vasi però, dove le condizioni non furono

mai così buone da permettere di allevare le larve fino al massimo grado di sviluppo, dopo circa 50 giorni esse erano lunghe soltanto due millimetri.

Non avendo potuto avere che un piccolissimo numero di larve, delle quali una parte ho dovuto conservare come documento di questo mio lavoro, non posso fornire intorno ad esse che notizie sistematiche, e anche queste non così complete come avrei desiderato.

Io non so quante mute subisca la larva, durante il suo accrescimento, però è certo che a quella, con cui si trasforma in ninfa, ne deve precedere un'altra; infatti io distinguo due sorta di larve, l' una di lunghezza superiore ai due millimetri (larva adulta o quasi), avente all'estremità posteriore quattro lunghe setole nere e l'altra di lunghezza inferiore — che raramente arriva a due millimetri — (larva più o meno giovane), avente due sole setole simili alle precedenti e invece delle due altre, due peli spinulosi, simili a tanti altri, che si trovano nel resto del corpo. Nella prima sorta di larve sono pigmentati in bruno, superiormente, l' ultimo e il penultimo anello circa nei loro tre quarti posteriori, venendo così a restare una striscia chiara tra la parte pigmentata dei due anelli, nella seconda invece è pigmentato soltanto l' ultimo (Tav. IV, figg. 2, 3 e 7, Tav. III, fig. 16). Evidentemente, di queste due larve, l'una deriva dall'altra: esse rappresentano due stadî di sviluppo, tra i quali deve intercalarsi almeno una muta.

In alcune larve lunghe un po' più di due millimetri, ossia in uno stadio intermedio tra i due qui descritti trovansi già le quattro setole, ma non è ancora pigmentato il penultimo segmento (Tav. IV, fig. 4). È possibile che questo fatto accenni ad un'altra muta che si intercalerebbe, sarebbero quindi almeno due le mute che subirebbe la larva prima di trasformarsi in ninfa.

Notisi inoltre che la larva, nata di recente e lunga già più di un millimetro, non ha ancora la testa evidentemente pigmentata e neanche l'estremità posteriore, e ciò potrebbe far pensare ad un'altra muta.

Vengo ora a descrivere la larva in particolare.

Essa raggiunge una lunghezza massima di poco inferiore a cinque millimetri. È a volte di un colore grigio, di solito di un bianco, che può essere più, o meno sporco, ovvero tendente al giallognolo; è più o meno trasparente. L'estremità anteriore e quella posteriore, dal di sopra, appaiono di colore oscuro; quella posteriore si continua in setole lunghe circa una metà del corpo, visibili perciò ad occhio nudo. Il corpo ha forma quasi cilindrica; la testa è piccola, l'estremità posteriore è poco assottigliata. I peli sono disposti in fasce, rari, piuttosto lunghi e di colore oscuro. (Tav. IV, fig. 1). Da questi caratteri è facile di riconoscere la larva già a primo aspetto. Si noti però che alle volte si presenta molto contratta, alle volte distesa e di conseguenza, appare più o meno lunga. Lasciata all'asciutto dissecca molto rapidamente e muore. Se nell'ambiente in cui si pone, si precipita molto vapor acqueo, essa muore pure facilmente. Occorre perciò molta cura per poterla conservare viva. Nella grande maggioranza dei casi la larva appare imbrattata di tritume organico, che ad essa aderisce con grande facilità, specialmente alla parte dorsale, e di cui è difficile liberarla.

La cuticola è sottile; a piccolo ingrandimento si direbbe finamente spinulosa; a

forte ingrandimento vedesi che in realtà è ornata di una scultura finissima e molto complicata (Tav. III, fig. 17) (papille striate per il lungo, ossia radialmente e terminanti a punta). Peli rari più o meno spiccatamente bruni, in generale piuttosto lunghi e forniti di corte e fitte spine e terminanti con una o anche più pallottoline incolori, che a me sembrano prodotte da secrezione (peli spinulosi) (Tav. III, figg. 17, 21, 23 ecc.).

Testa piccola, apparentemente ancora più piccola perchè un poco nascosta dal torace, in gran parte bruna; notasi però che dal lato dorsale la solita figura di ipsilon è incolore. La testa è fornita di alcuni peli spinulosi (v. sopra) e anche di qualche pelo semplice. Manca qualunque traccia di occhi (Tav. III, fig. 17 e IV, figg. 2, 3 ecc.).

Antenne (Tav. IV, figg. 18-21) molto corte, difficilmente visibili, fatte, per quanto ho rilevato, di tre articoli (fig. 18), il secondo quasi doppio del primo, ma più sottile; il terzo è lungo più del doppio del secondo, ovalare, un po' appiattito — inguisa che vi si distinguono due facce, una però più e l'altra meno convessa e due lati (fig. 20) — e termina con una papilla simile a quella delle antenne dell'insetto perfetto. Lungo la faccia più convessa di questo ultimo articolo notasi un ispessimento e certi peluzzi che meritano ulteriore studio; alla base di questo ispessimento sonvi due cortissimi peluzzi probabilmente sensitivi, che, a mio avviso, debbonsi riferire al secondo articolo (figg. 18 e 21).

Apparato boccale masticatorio (Tav. IV, figg. 9-16). Labbro superiore (*l. sup.*) corto con una delicata e complessa epifaringe (*epif.*). Mandibole (*man*) relativamente non molto robuste, che nelle preparazioni *in toto* mostransi di solito rivolte con i denti all'infuori (fig. 9): denti in numero di quattro cinque. La mascella (*mas.*) è formata da una lamina quadrangolare curva con un'insenatura anteriore accennante alla distinzione in lobo esterno e interno (fig. 15): sul margine della parte corrispondente al lobo interno rilevansi dentelli molto gracili e peluzzi. Sulla parte corrispondente al lobo esterno notasi un palpigero piccolissimo (fig. 16). che porta un palpo (*pal*) in cui distinguo con sicurezza un articolo, senza escludere che all'estremità distale vi possa essere traccia di un altro; peli sul lobo, sul palpigero e sui palpi molto corti e probabilmente, se non tutti, in parte sensitivi.

Al posto del labbro inferiore un pettine (*pet.*), corto, concavo (fig. 11) con la concavità rivolta dorsalmente (verso la cavità boccale) e fornito di robusti denti. Io ve ne ho distinti otto, cioè quattro a destra e quattro a sinistra. (Nella fig. 10 il pettine è fratturato per il lungo). I mediani sono più robusti dei laterali. Precisamente, i denti decrescono di robustezza andando dalla linea mediana ai lati. I mediani sono più robusti anche di quelli delle mandibole. Certamente questo pettine deve avere importanza nell'atto della masticazione. Sotto ad esso sta un altro corpo impari fornito, per quanto io ho veduto, di sei denti e di peli: lo denomino provvisoriamente ipofaringe (*ipof.*).

Confrontando questo apparato boccale con quello delle larve degli altri Psicodidi, per quanto si può giudicare dalle descrizioni imperfette che possediamo [1], si

[1] *The Life-history of Pericoma canescens (Psychodidae)* by Miall und Walker (Trans.

deduce che le differenze non devono essere molto considerevoli. Quella parte, che io ho detto pettine, venne appunto denominata così nelle larve degli Psicodidi dagli autori inglesi, i quali fanno osservare che una piastra simile è comune nelle larve dei Nemoceri, ed è stata identificata col *submentum* (Miall e Hammond, 1892 e 1900). Sembra però che in nessun caso i denti del pettine siano robusti come nella larva del pappataci. Aggiungerò che secondo il Brauer (1) le mandibole e le mascelle degli Psicodidi sarebbero fuse alla base e simultaneamente mobili.

Il tronco è sfornito di zampe: esso risulta almeno di dodici anelli. Veramente riesce alquanto dubbia la distinzione dei primi tre, che potrebbero da altri ritenersi quattro, come dirò più avanti; contandoli come quattro, gli anelli del tronco verrebbero ad essere tredici (Tav. IV, figg. 2, 3 e 4). Di essi sette e precisamente contandone in tutto dodici, il quarto ed i seguenti fino al decimo compreso, sono forniti di una peculiare estroflessione mediana impari, che io dirò disco succhiatore, perchè trova riscontro in organi così denominati in altri Psicodidi da Fritz Müller (v. più avanti) (Tav. IV, figg. 3, 6 e III, fig. 18).

La maggior parte degli anelli, e precisamente quelli stessi che sono forniti di dischi succhiatori, al lato dorsale sono caratterizzati dalla presenza di sei peli spinulosi (Tav. IV, fig. 2 ecc.), che ne adornano il margine posteriore. Di tali peli, quelli di mezzo sono, in complesso, più corti, ciò che risalta più specialmente nelle larve piccole (Tav. IV, fig. 7). Nella maggior parte degli anelli, il tergite presentasi ripartito, per mezzo di solchi, dall'avanti all'indietro in quattro fasce (Tav. III, fig. 19), di cui la posteriore, quella a cui corrispondono i peli suddetti, è più grande delle altre. Le pieghe scompaiono facilmente nei preparati. (Eccezionalmente qualche tergite presenta traccia di una divisione in cinque fasce. Tav. III, fig. 18). Ogni fascia presenta le papille, come ho detto, fornite di punta e striate radialmente. Queste papille nei solchi diventano molto più piccole, ma sono fatte nello stesso modo. Delle quattro fasce corrispondenti al tergite la seconda è caratterizzata dalla presenza di due cortissimi peli (Tav. III, figg. 17 e 19), che sono allargati all'apice, striati longitudinalmente, ossia simili a pennelli; essi meriterebbero uno studio più minuto. Anche dal lato ventrale trovasi la ripartizione in fasce simili, ma essa è meno facilmente rilevabile (Tav. III, fig. 18).

I dischi succhiatori (*dis.*) più o meno sporgenti a seconda delle differenti condizioni dell'animale, sono protuberanze, che sorgono dalla fascia posteriore di ogni segmento e presentano l'apice più o meno spiccatamente tronco, nudo, cioè sprovvisto delle papille caratteristiche. Io ritengo che questi dischi permettano alle larve di aderire alla superficie con cui vengono a contatto. Dalla parte laterale di ognuno sorgono uno o due peli, all'apice ingrossati a guisa di bottone. Più in là — lateralmente — si notano tre peli spinulosi, uno più piccolo, l'altro mediocre, l'altro maggiore (Tav. III, fig. 15).

Ent. Soc. Lond. 1895, part I); *Contribution* ecc, by Müller (id. id. part IV); *The structure* ecc. *of Psychoda sexpunctata* by Dell (id., 1905, part III).

(1) *Denkschriften* etc. Wien, vol. 47, 1883.

Passo ora alla descrizione degli altri anelli. Osservando la larva dal lato dorsale, tra la testa e il tronco rilevasi la traccia evidente di un collo. Quella parte che io denomino primo tergite (e che calcolando gli anelli come 13, sarebbe l'insieme del primo e del secondo tergite), è più ristretta in avanti che indietro, però anche la parte, che è più ristretta, lo è meno della testa. In questo tergite è bene evidente soltanto una distinzione in due fascie, una anteriore e l'altra posteriore, ciascuna delle quali mostra traccia di un solco longitudinale, che tende a dividerle in metà destra e metà sinistra. Quella anteriore presenta le solite setole spinulose caratteristiche degli altri tergiti, disposte però vicine al suo margine anteriore. Esse sono nel solito numero di sei, ma se ne possono contare anche otto, comprendendovene due laterali. La fascia posteriore presenta verso il suo mezzo le stesse sei setole spinulose. Dal lato ventrale il primo sternite appare come il tergite diviso in due fasce, che non corrispondono però a quelle del tergite: infatti la prima non trova riscontro nel tergite, e la seconda è la continuazione della prima e, se si vuole, anche della seconda del tergite. Vi sono peli spinulosi più corti rispetto a quelli dorsali, in una serie trasversale, come al dorso, sulla prima fascia dello sternite, serie ripetentesi sulla seconda.

La fascia anteriore del primo tergite, nella larva pronta a trasformarsi in ninfa, appare di color grigio (sempre ?).

Il secondo tergite (Tav. III, fig. 17) mostra evidente distinzione in due fasce, anteriore e posteriore; questa mal separata in due altre, una media e l'altra posteriore propriamente detta, la quale ultima finisce con un margine convesso. La fascia media porta le sei setole caratteristiche. Lo sternite corrispondente, cioè il secondo, mostra traccia di divisione in due fasce, la posteriore fornita di peli spinulosi come nel tergite, ma più corti.

Il terzo tergite (Tav. III, fig. 17) presentasi diviso in una fascia anteriore ed una posteriore; la fascia anteriore è foggiata come quella posteriore del secondo tergite; la fascia posteriore, alquanto incavata all'indietro, porta press'a poco nel suo mezzo i soliti sei peli spinulosi. Lo sternite corrispondente si comporta press'a poco come quello del secondo anello.

Specialmente il secondo anello (Tav. IV, 2, 3, 5 ecc.) può presentarsi in modo svariatissimo, lungo, corto, a seconda dei differenti movimenti dell'animale.

Passo agli ultimi due anelli (Tav. IV, figg. 2, 3, 7 e III, fig. 16). L'undicesimo o penultimo tergite mostra al margine posteriore quattro soli peli spinulosi, od è, nelle larve al disopra di due millimetri, più o meno pigmentato in bruno, tranne che alla parte anteriore. Nella larva giunta al massimo sviluppo si distinguono in mezzo al tratto bruno quattro punti incolori, disegnanti una linea trasversale; notasi inoltre spiccatissima la differenza di lunghezza tra i due peli mediani (corti) e i due laterali (lunghi). Talvolta mi è sembrato di poter osservare anche in questo undicesimo tergite tracce della distinzione in tre fasce. Il corrispondente sternite è fornito di una serie trasversale di peli spinulosi (circa 6). In complesso gli anelli si allargano gradatamente fino al sesto e poi vanno restringendosi fino al penultimo, che vien ad essere notevolmente stretto (Tav. III, fig. 16).

L'ultimo anello è ancora più stretto. Il suo tergite è pigmentato quasi come il

precedente ed ha il margine posteriore finamente dentellato (Tav. III, fig. 22). Sotto a questo margine l'anello si continua in due papille nerastre, quadrangolari, da ognuna delle quali si dipartono due setole molto robuste, nerastre, lunghe, una mediale e l'altra laterale: più attentamente osservando si rileva che le due setole mediali sono lunghe circa come una metà del corpo dell'animale; quelle laterali invece sono lunghe soltanto i due terzi di quelle mediali (Tav. IV, fig. I).

Nelle larve piccole, e ciò ebbi già occasione di accennare precedentemente, invece delle setole laterali, si trovano due peli spinulosi (Tav. IV, fig. 7).

Nella parte inferiore quest' ultimo anello forma una sorta di protuberanza, per effetto della quale a volte si direbbe che le papille fanno una sorta di tetto alla parte ventrale (Tav. IV, fig. 3), su cui si notano oltre a peli semplici, altre setole lunghe, curve (Tav. III, fig. 20). Lo sternite corrispondente all' ultimo anello è striato per il lungo e termina con una serie trasversale di peli non spinulosi.

L'apparato tracheale è caratterizzato da un sistema di trachee anastomizzantisi, le quali si aprono in due paia di stigmi laterali, uno anteriore e l'altro posteriore. Interpretando gli anelli in modo da contarne dodici, gli stigmi anteriori vengono a trovarsi in corrispondenza ai lati della fascia posteriore del primo tergite (indicati con una macchiolina e richiamati *st. a.* nella fig. 5 della Tav. IV) e quelli posteriori all' undicesimo (penultimo) anello (indicati e richiamati *st. p.* nella fig. 7 della Tav. IV). Lo stigma posteriore sta evidentemente all'estremità di una piccola eminenza, meno segnata per quello anteriore, che è anche più piccolo. L' uno e l'altro sono complicati (Tav. III, fig. 23-26). A ciascuno stigma (*st.*) corrisponde una trachea, a piccola distanza dalla sua origine ravvolta da una sorta di manicotto (*man.*). Bisognerebbe aver sott'occhio molto materiale per precisare questi ed altri particolari, che io ho in parte riprodotti nelle citate figure. In complesso ritengo che ogni stigma sia cribroso, ossia fornito di vari forellini.

Ho trovato le larve dei pappataci soltanto in cantine poco pulite, cioè in ambienti oscuri, umidi, dove non mancavano materiali di costruzione come pietre, mattoni, pezzi di cretone ecc. e spazzature, o immondizie poco o punto puzzolenti, risultanti per lo più di vegetali, quali legno marcio, frammenti di paglia, feccia di erbivori disseccata, cartaccia ecc., il tutto per lo più commisto a terra. Si deve ritenere che le condutture delle fogne, dove s'immette molt'acqua e con tubi di sfogo dei gas putridi, e sopratutto i tratti di esse, che col succedersi dei rinnovamenti nelle case restano del tutto o quasi fuori d'uso, vengano a costituire un'ambiente oltremodo favorevole per la propagazione dei flebotomi (v. più avanti). In mezzo alle indicate materie di rifiuto riesce oltremodo difficile di poter distinguere le larve, molto più, che come ho già detto, il tritume resta loro aderente e le nasconde.

Di regola, esse si trovano soltanto cercando sulla superficie inferiore dei suddetti materiali di costruzione, a caso ammucchiati insieme con immondizie. Le larve vi restano appiccicate (talvolta intrigate in mezzo a ragnatele). È certo che quivi si raccolgono per trovare un opportuno appoggio durante la ninfosi. A farci ammettere questa spiegazione concorrono tre circostanze: 1° riesaminando i materiali in discorso, alla distanza di qualche giorno, vi si rinvengono altre larve; 2° le larve, che vi si trovano, sono grosse, pronte o prossime alla ninfosi; 3° è appunto sulla superficie

poggiante del materiale di costruzione, che, nelle condizioni sopra indicate, si trovano le ninfe (V. più avanti).

Le larve vennero da me rinvenute nei mesi estivi, autunnali e invernali. D'inverno si presentano ricurve (Tav. IV, fig. 3), immobili o quasi: hanno però sempre alimento nell'intestino. Io ho verificato che anche dalle uova deposte in settembre e in ottobre nascono dopo pochi giorni le larve; escludo perciò che i pappataci possano svernare anche allo stadio d'uovo, come pure dalla circostanza che non ho potuto procurarmi alcun alato nè maschio nè femmina dopo il novembre fino al maggio, sono indotto a concludere che essi non passino l'inverno neppure nello stato d'insetto perfetto. *In conclusione il pappataci sverna allo stato di larva.*

La larva si locomove molto lentamente e appare impacciata. Procede a passi cortissimi. Tra un passo e l'altro può riposare alquanto. È facile rilevare, quando comincia a muoversi, per es. sulla carta bibula inumidita, che in un primo tempo curva la parte anteriore del corpo a destra o a sinistra (talvolta alterna questi movimenti); che in un secondo tempo solleva l'estremità posteriore contraendola, ricurvandola e la appoggia in avanti e che finalmente in un terzo tempo tutt'il corpo si sposta dall'indietro all'avanti. Se l'animale non fa pause, questo movimento dall'indietro all'avanti finisce con un sollevamento della parte anteriore del corpo e uno spostamento dello stesso in avanti, anche un po' a destra, o a sinistra, a seconda dei casi, al qual movimento segue subito quello sopradetto dell'estremità posteriore del corpo. Io non ho fatto più esatte ricerche e mi limito ad aggiungere che la larva nel muoversi può presentarsi quasi dritta ovvero incurvata a destra o a sinistra o anche a S; qualche volta, mentre cammina, tiene sollevate le quattro setole posteriori.

La larva si nutre di detriti organici che non siano però in attiva putrefazione, qualche volta mangia anche alghe unicellulari.

Confrontando la larva del Pappataci con quella di *Pericoma canescens* (v. sopra), si rilevano parecchie somiglianze, come risulta dai seguenti confronti, nei quali non tengo conto dell'apparato boccale, di cui ho già fatto cenno.

I. Anche nella larva di *Pericoma*, sulla seconda fascia dell'anello protoracico si trovano gli stigmi anteriori, che però stanno agli apici di tubilli cilindrici. Alla estremità posteriore dell'addome esiste nella larva di *Pericoma* un altro paio di stigmi evidentemente omologhi a quelli posteriori di *Phlebotomus*. È vero che nella larva di *Pericoma* corrispondono all'ultimo segmento, ma bisogna notare che in questa larva gli anelli vengono calcolati in numero di undici.

II. Nella larva di *Pericoma* vi sono due paia di processi anali, che potrebbero paragonarsi alle quattro setole terminali della larva di *Phlebotomus*. Il confronto però non regge bene, perchè due di questi processi sono dorsali e due ventrali.

III. Nella larva di *Pericoma* su sette anelli notasi dal lato ventrale un paio di piccole e distinte piastre, che servirebbero a rinforzarli. È possibile che il tratto mediano delimitato da queste piastre sia una formazione paragonabile ai dischi succhiatori, che ho descritto nel *Phlebotomus*.

Anche la larva di *Psychoda sexpunctata* ha somiglianza con quella del *Phlebotomus*, anzi in un punto ancor di più: infatti l'estremità posteriore invece di por-

tare quattro appendici come nella larva di *Pericoma*, ne porta due sole. Queste due appendici sono molto bene confrontabili colle due papille che sostengano le quattro setole del *Phlebotomus*.

È qui opportuno accennare all'*habitat* delle larve di varie specie di Psicodidi. Quelle di *Pericoma canescens* stanno in luoghi molto umidi e spesse volte restano sommerse per lungo tempo. Quelle di *Psycoda sexpunctata* si trovano dentro mucchi di coke, su cui vengono riversate le acque luride per purificarle (DELL). Esse vivono anche nei mucchi di letame insieme con le larve di *P. phalaenoides* L. La larva di *P. humeralis* M. si trova nelle patate marce. Altre vivono nei funghi. Quella di *Ulomyia* vive invece nell'acqua chiara corrente, ma è molto differente dalle precedenti; essa ha infatti invece di peli al dorso, una doppia serie di piastre lanceolate simili a branchie. FRITZ MÜLLER ci ha fatto conoscere tre nuove larve di *Psychodidae* da lui riferite ad un nuovo genere (*Maruina*), che vivono in vicinanza delle cascate, sulle pareti delle rocce coperte da un tappeto di alghe e tenute umide dagli spruzzi dell'acqua che cade, o da gocce d'acqua che vengono giù dall'alto. Queste larve per altri caratteri (sopratutto quelli dell'estremità posteriore) molto differenti dalla nostra, le si avvicinano però molto perchè la faccia ventrale è provvista di otto dischi succhiatori, l'ultimo dei quali corrisponde al penultimo anello.

Le larve degli Psicodidi, per quanto finora si sa, sono tutte provviste di organi visivi, mancanti in quella di flebotomo, che, a differenza delle altre, vive però esclusivamente all'oscuro.

D) *Ninfa* (Tav. IV).

La larva si trasforma in ninfa, la quale si riconosce molto facilmente perchè all'estremità posteriore e precisamente agli ultimi suoi due segmenti porta attaccata la spoglia o esuvie, che si voglia dire, della larva (Tav. IV, fig. 22).

Questa ninfa, a differenza di altre dello stesso gruppo, punto appiattita, presentasi più o meno curva e la concavità corrisponde dal lato dorsale (Tav. IV, fig. 27 ecc.). Essa è di color giallo chiaro, talvolta biancastro, talvolta tendente al bruno, ossia di colore quasi uguale a quello dell'insetto perfetto. Quando è però vicina a trasformarsi in esso, dapprima agli occhi e poi anche agli arti e specialmente alle zampe appare di color molto più oscuro.

L'estremità posteriore si presenta bruna perchè è ricoperta, come ho già detto, dalla cuticola abbrunita dell'ultima muta, che quivi si è tutta quanta raccolta (Tav. IV, fig. 22). La ninfa ha una sottile cuticola e consta di tredici anelli, quasi tutti ben distinti perchè il margine posteriore sporge, ciò che è molto evidente quando la ninfa si osserva come di solito si presenta, cioè di lato. La ninfa è lunga fino a 5 mm., ma ve ne sono di quelle più piccole e perfino di poco più di 2 mm.

La testa (Tav. IV, fig. 25) sta in gran parte nascosta sotto il torace, per cui osservando la ninfa dalla faccia superiore (Tav. IV, fig. 23) si vedono appena in parte le antenne (*ant.*) e gli occhi (*oc.*), mentre se la si osserva di lato si distinguono le antenne nella stessa direzione delle zampe e delle ali. Il pronoto (Tav. IV, figg. 23 e 24, *prn.*) presenta una cresta logitudinale e due cortissime papille respi-

ratorie (*ps. re.*), una a destra e l'altra a sinistra, percorse ciascuna da una trachea, che sbocca all'apice (stigma anteriore).

Il mesonoto (*mes.*) offre nel mezzo anteriormente un rialzo triangolare che indietro si continua in una cresta. Il margine anteriore presenta tre gobbe per ogni lato, una maggiore più mediale, una minore intermedia ed una più grande, laterale fornita di due peli (Tav. IV, fig. 24, *al.*?). Trovasi un'altra gibbosità vicino a questa ultima, ma più posteriore; ad esse corrisponde l'inserzione dell'ala ed io credo che accennino anche all''alula. Vicino al margine posteriore del mesotorace notansi due altre creste, una destra ed una sinistra; esse decorrono in direzione trasversale: io credo che siano in rapporto colle ali. Le zampe talora sembrano appiccicate tra loro, ma altre volte sono libere. Il metanoto (*met.*) e i sette tergiti (*1. add.*, *2. add.*) ad esso seguenti presentano posteriormente due piccole sporgenze, ognuna fornita di un corto pelo a pennello (Tav. IV, fig. 26) molto simile a quelli, che ho descritto sulla seconda fascia di ogni tergite della larva. Questi peli in tutti gli anelli sorgono, più precisamente, dal margine posteriore, mentre restano da esso alquanto discosti nel metanoto. Essi mancano in corrispondenza degli ultimi tre anelli. Peli simili ma più piccoli si notano anche ai margini posteriori degli sterniti. In complesso la ninfa è caratterizzata dalla mancanza di quei peli lunghi che si trovano nella larva e nell'insetto alato.

Al margine posteriore del terzultimo anello si trova un altro paio di stigmi collocati sopra piccoli rilievi.

La ninfa immobile si trova attaccata alle pietre, ai mattoni, alla calce, al cretone, ecc., il più delle volte dentro fenditure, ovvero in spazi lasciati dal sovrapporsi di questi materiali, od anche in spazi compresi tra terra e mattoni. L'attacco si stabilisce alla parte posteriore del corpo, per mezzo dell'esuvie della larva colle relative setole (Tav. IV, figg. 27 e 28); esso è così esteso che la ninfa non si sposta neanche capovolgendo il pezzo di materiale su cui poggia, e infatti battendo la pietra, la larva cade sovente e invece la ninfa resta attaccata.

Precisando, la larva, che sta per diventare ninfa, si stende in posizione orizzontale, tenendosi prona. La ninfa, che ne deriva, anteriormente, cioè nella parte non attaccata, è alquanto curva, colla concavità dorsale, cioè rivolta in alto. Mano mano che matura, essa va diventando sempre più curva (Tav. IV, figg. 31 *a* e 31 *b*); con altre parole va sollevandosi; il sollevamento procede dall'avanti all'indietro; l'estremità anteriore arriva talvolta a descrivere un arco di circa 90°.

Per quanto io ho potuto osservare, tranne che nella parte corrispondente alla spoglia, la ninfa è del tutto libera (Tav. IV, figg. 29 *a*, *b*, e *c*), quantunque nella parte anteriore si presenti alle volte tanto avvicinata alla parete della fenditura da lasciar adito al dubbio se sia o no aderente. Quando però, essendo vicina la fuoruscita dell'insetto perfetto, la ninfa si è sollevata, come ho detto, diventa evidente che tale aderenza non esiste. Una volta uscito l'insetto perfetto resta indietro l'esuvie della ninfa con quella della larva, nella posizione caratteristica sopradescritta (Tav. IV, fig. 28). Essa si trasforma in insetto perfetto anche se tolta dalla fenditura in cui si trova, viene poggiata su carta bibula umida in una capsula di Petri. L'insetto perfetto si sviluppa di notte (sempre?).

La ninfa irritata fa movimenti di contrazione senza però arrivare a spostarsi.

Dalla ninfa di *Phlebotomus* differisce molto la ninfa di *Pericoma canescens*, benchè anche essa viva fuori dell'acqua. È bene osservare che questa ninfa di *Pericoma* rassomiglia molto a quelle dei Tipulidi ha, cioè, un addome flessibile, i cui segmenti sono provvisti di cerchi di uncini e di alcune spine più grandi, per la locomozione. La ninfa della *Maruina*, che convive colla larva, è scutiforme, piatta, aderente e apparentemente inetta alla locomozione. Notevoli differenze presenta anche la ninfa della *Psychoda sexpunctata*, che vive sepolta nelle lordure, tenendo le lunghe appendici respiratorie (protoraciche) esposte all'aria e porta quattro spine all'ultimo segmento, nonchè altre sparse alle facce dorsale e ventrale.

PARTE TERZA.

Conclusioni pratiche.

I pappataci sono da noi molto diffusi e in non pochi luoghi creano un vero flagello. Quando si seppe che io me ne occupavo, ho ricevuto dalle più diverse parti d'Italia a centinaia le preghiere di consigli contro questo molestissimo insetto. Nella città di Roma essi s'incontrano in moltissime case, e in parecchie anche del centro della città, come per es. il palazzo G . . . . . , dove da qualche anno, e precisamente dopo considerevoli modificazioni murarie fatte all'ultimo piano dell'edificio, sono diventati così abbondanti da indurre gli inquilini ad abbandonare gli appartamenti e disdire i contratti di affitto. Dalle notizie da me raccolte risulta che i pappataci a Roma si facevano sentire anche molti anni fa, certo è però che oggigiorno sono diventati molto più abbondanti.

Con questa abbondanza contrasta la difficoltà di trovarne le ninfe e sopratutto le larve. Come ho già detto, io ho raccolto larve e ninfe nelle cantine oscure, ove si trovavano accumulate insieme con spazzature, pietre, mattoni e più specialmente pezzi di cretone — così si chiama a Roma una malta molto magra, fatta, cioè, di pozzolana piuttosto grossa con scarsa calce —. Non v'ha dubbio che queste cantine, dove sta depositato materiale da costruzione, ciò che a Roma verificasi molto spesso, costituiscono un buon ambiente per la moltiplicazione dei pappataci, come dimostra il fatto che, nella stagione opportuna, spostando il materiale suddetto è facile di mettere in moto femmine mature e anche maschi.

Senonchè il numero delle larve e delle ninfe da me quivi rinvenute è stato scarsissimo ed evidentemente del tutto sproporzionato alla quantità enorme di flebotomi che infestano le abitazioni soprastanti. Vero è che le pochissime larve, che io ho potuto procurarmi soltanto dopo lunghe ricerche, stavano attaccate quasi tutte a pietre o mattoni dalla parte che poggiava sul suolo, e che raramente ne ho rinvenuto qualcuna tra le immondizie, i detriti di paglia, ecc. È senza dubbio difficile distinguerle in mezzo a queste materie; devo perciò ammettere che molte mi saranno sfuggite, ma non mai tante da rendere il loro numero paragonabile a quello degli insetti adulti. Devono perciò esservi altri focolai, dove i flebotomi si sviluppano in molto maggior numero. Infatti io ho veduto qualche ninfa nelle fenditure della parete di un canale, che serviva a scaricare materie di dejezione. Benchè alcune altre ricerche in ambienti simili siano riuscite infruttuose, sono d'avviso che dalle fogne si sviluppino la maggior parte dei pappataci. Come è noto, le fogne domestiche sono provviste di tubi di ventilazione, che vanno a sboccare nel punto più alto delle case, cioè sui tetti, o sulle terrazze che di solito coprono i palazzi; in questi tubi, o anche direttamente nelle fogne, a volte si raccolgono attraverso apposite imboccature anche acque piovane,

che provengono da terrazze situate nei vari piani, ovvero acque luride di lavandini, ecc. Orbene io ho veduto molte volte i flebotomi alati entrare e uscire da siffatte aperture e ho notato anche che gli appartamenti più vicini ad esse erano i più invasi, anzi in certe case i flebotomi si facevano sentire soltanto all'ultimo piano. Talvolta essi infestavano appena un appartamento prospiciente sulla strada in un punto dove al lato del marciapiede si vedevano le ben note bocchette della fogna, dentro le quali si poteva sorprendere qualche flebotomo alato.

Io sono convinto che se per es. nel palazzo G . . . . . io potessi scoperchiare estesamente quelle complicatissime fogne — fatte in epoche differentissime e poi in parte adattate a nuovi usi, qua e là prolungate, ovvero abbandonate —, le quali formano un vero labirinto nei muri e nei sotterranei del palazzo, potrei raccogliere un numero sterminato di larve e di ninfe.

Lo scorrere di abbondanti acque nelle fogne, rallentando i processi di putrefazionne e diminuendo moltissimo i gas putridi, viene a creare un ambiente favorevole ai flebotomi, che certamente non prosperano là dove la putrefazione è molto attiva. A mio avviso sta in rapporto con questo fatto la circostanza che le case dei poveri ne sono molto meno infestate. In conclusione, l'ambiente ottimo per la prole del flebotomo viene costituito dalle piccole anfrattuosità lungo le fogne: quivi manca la luce e c'è molta umidità: qualche spruzzo d'acqua lurida, o di materia di dejezione che può arrivarvi non riesce di certo ad ucciderla, ma può servirle di nutrimento. Le comunicazioni delle fogne domestiche con quelle cittadine facilitano senza dubbio la diffusione dei flebotomi.

Io non ho mai incontrato ninfe sopra pareti liscie e credo che uno dei migliori provvedimenti da consigliarsi sia di possibilmente levigare le pareti delle fogne e delle cantine. Occorre inoltre liberare quest'ultime dai materiali da costruzioni che le ingombrano e tenerle scrupolosamente pulite. Il pavimento di esse deve costruirsi in cemento liscio. Le fogne devono essere fatte in modo che non resti parte nè grande nè piccola, la quale non venga abbondantemente lavata dall'acqua, che giornalmente vi si immette. A quelle aperture delle fogne, attraverso le quali possano insinuarsi flebotomi per deporre le uova, si applichino duplici, o triplici reticelle metalliche. Per mezzo di opportuni sistemi di sifoni si mantenga isolata con acqua la fognatura dei vari piani della casa dalla fognatura sotterranea.

Il volgo crede che i pappatacci provengano dalle scuderie e che basti allontanarle per farli scomparire; ma questo è un pregiudizio, che non ha alcun fondamento.

Vennero proposte per difendersi dai pappataci molte sostanze da applicarsi alla pelle, ma nessuna delle tante da me sperimentate si è dimostrata veramente efficace. Qualche volta, se questi insetti non sono molto numerosi, si ottiene da principio un certo effetto, ma dopo qualche giorno anche questo piccolo vantaggio scompare. Degno di menzione è il fatto che se con queste sostanze insettifughe ci ungiamo per es. faccia e mani, i pappataci si insinuano tutti sotto le lenzuola, pungendoci molto in punti dove di solito non arrivano che in piccolo numero; essi si affollano verso il condotto uditivo o verso le narici, se queste parti non sono state spalmate coll'insettifugo.

Sulle carte invischiate, con cui si acchiappano le mosche, i pappataci si posano, ma prontamente se ne allontanano senza difficoltà (Mascitti). Poco vantaggio si ottiene anche dai zampironi, dai coni, ecc.

Finora io non ho trovato alcun parassita nei flebotomi e i loro nemici, a me noti, sono soltanto gli uccelli e i ragni.

Quanto agli effetti patologici, che i flebotomi possono produrre, non si sa nulla di positivo. Si pretende che molte punture bastino per suscitare un accesso febbrile, ma ciò non è dimostrato. È molto verosimile che essi debbano avere speciale importanza nella diffusione di alcune malattie parassitarie e sopratutto nei paesi caldi; purtroppo però esatte ricerche in proposito non sono ancora state fatte e per ora non si hanno che supposizioni (V. per es. quanto ho detto nei cenni bibliografici a proposito del bottone d'Aleppo).

RIASSUNTO

Il lavoro non si presta bene per un riassunto, e perciò mi limiterò ad indicarne alcuni punti più importanti.

I flebotomi sono sparsi per tutta l'Italia e, per quanto finora ho veduto, debbono riferirsi ad una sola specie: *Phlebotomus papatasii*. Di quelli esotici non mi sono occupato.

Nelle forme adulte meritano particolar menzione i gonodotti maschili che sono doppi e si fondono soltanto in un tratto, lungo il loro decorso (Tav. II, fig. 1); ho perciò distinto condotti deferenti pari, ai quali segue un condotto ejaculatore impari, che si prolunga nei condotti ejaculatori pari. Più precisamente, il condotto ejaculatore impari si apre in una piccola dilatazione, da cui si dipartono quelli pari; con questa dilatazione è in rapporto una sorta di stantuffo cuticulare, ricco di muscoli, che deve regolare la fuoruscita degli spermatozoi.

Le uova (Tav. II, fig. 20 e Tav. III, fig. 6) sono brune, a superficie reticolare, lunghe poco più di mezzo millimetro.

Le larve (Tav. III e IV), molto lente nei loro movimenti, raggiungono la lunghezza massima di circa mezzo centimetro, sono cilindriche, colla testa piccola, ceche, incolori eccetto all'estremità anteriore (testa) e all'estremità posteriore (ultimi due anelli nelle larve prossime a maturare o mature, ultimo anello nelle larve giovani) che sono nerastre. Gli anelli sono indicati anche da serie trasversali di rari peli, oscuri, piuttosto lunghi. All'estremità posteriore del corpo si trovano due (larve giovani) o quattro (larve vicine a maturare o mature) lunghe setole nerastre.

Distinguo nel tronco dodici anelli, in generale ripartiti ognuno in quattro fasce. Gli anelli dal quarto al decimo compreso, presentano ciascuno dal lato ventrale, sulla quarta fascia, una protuberanza impari, che trova riscontro nel disco succhiatore di altre larve di *Psychodidae*, del resto molto differenti da quelle del *Phlebotomus*. L'apparato boccale è masticatore; il labbro inferiore è trasformato in pettine con denti robusti, che evidentemente partecipa alla masticazione. Un paio di stigmi si trova al protorace e uno al penultimo anello addominale.

La ninfa (Tav. IV) immobile, curva a concavità dorsale, giallognola lunga, da 2 a 5 mm., si riconosce molto facilmente perchè all'estremità posteriore (ultimi tre segmenti) porta la spoglia della larva, raggrinzata e diventata bruniccia, che le serve come mezzo di attacco. È tondeggiante, ingrossata nella metà anteriore, assottigliata in quella posteriore, col margine posteriore dei tergiti sporgente. Veduta colla lente sembra nuda. Le papille (tubi) respiratorie sono minime, due anteriori e due posteriori.

Le larve vivono in luoghi oscuri e umidi, in mezzo ad ogni sorta di tritume; predilogono i sotterranei, le cantine e più specialmente i punti delle fogne, dove non possono arrivare che spruzzi di acqua lurida.

Le ninfe si trovano nelle stesse località; a preferenza stanno nascoste in anfrattuosità delle pietre, dei mattoni, del cosidetto cretone.

Gli adulti vivono a preferenza nelle camere; le femmine succhiano sangue, il che non è possibile ai maschi, che sono sprovvisti di mandibole.

Le generazioni annuali dei Flebotomi debbono essere in generale in numero di tre: esse hanno luogo nei mesi caldi. I Flebotomi ibernano allo stadio di larva.

In conclusione le mie ricerche fanno conoscere il ciclo di sviluppo, prima d'ora ignoto, di un animale che è pure tanto comune; questo ciclo che venne prima di me invano ricercato da non pochi naturalisti, contrariamente a quanto si supponeva per analogia colle zanzare, non si verifica in un ambiente liquido e appunto perciò molte località, dove si è potuto sopprimere le zanzare, restano tuttora infestatissime dai Flebotomi.

Riguardo alla loro influenza patologica, le indagini sono appena incominciate: certo è che quell'insetto, che, secondo PRESSAT, diffonde il bottone d'Aleppo, è un flebotomino, e ognuno può persuadersene confrontando i disegni annessi a questo mio lavoro colle copie delle fotografie pubblicate dal PRESSAT stesso.

Mentre sto per licenziare per la stampa questo mio lavoro, con mia meraviglia mi si sviluppa in una capsula di Petri con carta bibula inumidita, un maschio avente caratteri da me non mai riscontrati nelle centinaia che ho avuto sott'occhi. Invece delle tre palette all'estremità distale delle gonapofisi dorsali trovo due setole falciformi, molto lunghe. Pressochè uguali a queste sono due altre setole, che riscontransi, invece delle altre due palette, a breve distanza dall'estremità distale: esse sono molto più lunghe della distanza che separa la loro inserzione dall'apice della gonapofisi, mentre ad essa sono pressochè eguali le palette. Vicino a queste setole ne sorgono, per quanto posso rilevare, quattro altre minori. Alle appendici laterali della lamina subgenitale mancano le due palette. Invece delle tre gonapofisi intermedie ne rilevo una sola, che vista di lato si presenta ristretta alla parte distale, allargata a quella prossimale.

Questo maschio che rappresenta una specie nuova, proveniva da una larva la quale, due giorni dopochè era stata raccolta, si era trasformata in ninfa. Il periodo di ninfa era durato otto giorni.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Le figure furono copiate quasi tutte colla camera lucida. Microscopio Koritska. Quando non vi è altra indicazione, s'intende a tubo accorciato. La prima cifra, dopo la spiegazione d'ogni figura, indica l'oculare, la seconda l'obiettivo.

TAVOLA I. — *Insetto perfetto.*

FIG. 1. — *Phlebotomus papatasi* veduto di lato, ingrandito circa 25 volte. ♀.
» 2. — Dal dorso, in estensione forzata. Disegno un po' schematico. ♀. 4 comp-.5 (ridotto a metà).
» 3. — Dimostra come poggia su di un sostegno verticale. ♀.
» 4. — Testa veduta dal di sopra. ♀. 4 comp.-4. (I cerchiettini indicano l'inserzione di lunghi peli).
» 5. — Antenna. ♀. 4 comp.-4.
» 6. — Due ultimi articoli dell'antenna. Non vi è disegnata che una parte dei peli. ♀. 4 comp.-8.
» 7. — Palpi (*pal*), proboscide (*pro*), estremo prossimale dell'antenna (*ant*) e occhio (*oc*). ♀. 2-2.
» 8 e 9. — Contorno dei palpi di un ♂ (9) e di una ♀ (8). I peli sono stati tralasciati. 4 comp.-2.
» 10. — Estremità anteriore del labbro inferiore veduto dal dorso (dall'interno). ♀. 6 comp -4. Glossa (*gl*), paraglossa? (*pagl*) e labello (*lab*).
» 11. — Labbro inferiore veduto dal ventre (dall'esterno). ♀. 4 comp.-5.
» 12. — Estremità anteriore del labbro inferiore dal dorso. ♀. 4 comp.-5. Lettere come nella Fig. 10.
» 13. — Ipofaringe (*ip*), epifaringe (*ep*) e mascella (*mas*). ♂. 4 comp.-8. *ap* = appendice speciale dell'ipofaringe del ♂.
» 14. — Mascella ♂ 4 comp. 8,
» 15. — Mandibola (*man*), epifaringe (*ep*), ipofaringe (*ip*) e mascella (*mas*) ♀ 4 comp.-8.
» 16. — Mandibola (*man*) e mascella (*mas*) ♀ 4 comp.-8.
» 17. — Idem a piccolo ingrandimento, mostrante anche l'inserzione della mandibola e il processo interno (*pr*) che serve di sostegno alla mascella e al palpo.
» 18. — Sezione trasversa della proboscide. Lettere come sopra: *sa* = condottino salivare, *lab. i.* = labbro inferiore. ♀. 4 comp.-8.
» 19. — Torace veduto lateralmente. ♀ 4 comp.-4. *oc* = occhio, *t* = testa, *prn* = pronoto, *mst* = mesotergite, *prt* = protergite, *mst?* = mesotergitej? *mtt* = metatergite, *msn* = mesonoto, *ins. a* = inserzione dell'ala, *mtn* = metanoto, *bil* = bilanciere, *ad* = addome.
» 20. — Alula e inizio dell'ala ♂. 4 comp.-5.
» 21. — Ala denudata tranne che al margine. *a* = cellula basale anteriore, *b* = id. posteriore. ♀. 4 comp. a_1 Zeiss.
» 22. — Zampe *a* = ant. *b* = media, *c* = post. ♀. 4 comp.-a_1 Zeiss.
» 23. — Ultimo articolo del tarso, apparentemente grosso per la presenza di squamette: *ung* = unguicola. 4 comp.-8.
» 24. — Squamule *a* = delle ali, *b* = delle zampe.

E. Battisti lit. Via Depretis 92 Roma

Tavola II. — *Insetto perfetto.*

Fig. 1. — Genitali maschili. *te* = testicoli, *de* = condotti deferenti, *prs* = vescicola spermatica, funzionante anche da prostata, *ej. im* = condotto ejaculatore impari, *pm* = pompetta (stantuffo) *ej. pa* = condotti ejaculatori pari, *pn* = peni in tre diverse posizioni, in due di esse i condotti ejaculatori sporgono.

» 2. — Sezione quasi longitudinale della pompetta e parti vicine. *camp. a.* = campana anteriore, *camp. p.* = campana posteriore, *m* = muscoli, *n* = nervo, *ej. p.* = condotti ejaculatori pari, *ch.* = chitina. 4 comp.-8.

» 3. — Pompetta e condotti ejaculatori. Lettere come sopra: *dil. ej. im.* = dilatazione del condotto ejaculatore impari. Animale trattato colla potassa e colla glicerina. 4 comp.-8.

» 4. — Campana posteriore. Preparato come quello rappresentato nella fig. 3. Lettere come sopra. 4 comp.-9.

» 5. — Estremità posteriore del maschio visto di lato. Si distinguono le gonapofisi d'un lato. 2-6. *d* = gonapofisi dorsale, *int. l. d.* = gonapofisi intermedia laterale dorsale, *int. med.* = intermedia mediale, *int. l. v.* = gonapofisi intermedia laterale ventrale, *lam* = lamina subgenitale colle relative appendici, *pn* = pene.

» 6. — Estremità posteriore del maschio vista di lato. Alcuni pezzi sono stati distaccati via. Lettere come sopra. 4 comp.-4: tubo allungato.

» 7. — Gonapofisi ♂ (in parte) vedute medialmente. Lettere come sopra: *pa* = papilla mediale della gonapofisi dorsale.

» 8. — Pezzo distale (lacinia) della gonapofisi dorsale.

» 9. — Lamina subgenitale veduta dalla faccia ventrale (in fuori). Si vedono due paia di appendici, mediali (*m*) e laterali (*l*). 4 comp.-4: tubo allungato.

» 10. — Idem veduta dalla faccia dorsale (all'interno). Si vede anche la sporgenza impari o quinta appendice (*i*) *ins* = inserzione della lamina subgenitale. 4 comp.-5. Altre lettere come sopra.

» 11 e 12. — Da sezioni subtrasverse del maschio, in corrispondenza alle gonapofisi. *int.* = intestino posteriore: le altre lettere come sopra. Fig. 11, 4 comp.-8. Fig. 12, 6 comp.-8.

» 13. — Sezioni subtrasverse in corrispondenza alla pompetta (*a*, *b*, *c*) e alla campana posteriore (*d*, *e*, *f*, *g*, *h*). Sono rappresentate in ordine dall'avanti all'indietro, tralasciandone però parecchie intermedie. Nella dilatazione del condotto ejaculatore impari si vede lo sperma (Fig. *e*). Lettere come sopra. 4 comp. $^{1}|_{15}$ semiap.

» 14. — Sezione subtrasversa in corrispondenza alla vescicola spermatica funzionante anche da prostata, vicino allo sbocco dei deferenti dentro di essa. Per gli altri organi, la figura è incompleta. *gang* = catena ganglionare ventrale. Le altre lettere come sopra. 4 comp.-4.

» 15. — Da una sezione subsagittale (alquanto schematizzata) in corrispondenza alla vescicola spermatica funzionante anche da prostata come nella figura 14. Lettere come sopra. 4 comp.-8.

» 16 *a* e *b*. — idem 15 di altro individuo. Lettere come sopra. 6 comp.-5.

» 17. — Figura semischematica del digestorio. *ant* = antenna, *oc* = occhio, *gh. sa.* = ghiandola salivare, *c. i* = condotto impari delle ghiandole salivari, *su* = stomaco succhiatore medio, *int. m.* = intestino medio (la parte oscura indica il sangue che vi stava raccolto) *m* = tubi malpighiani, *int. p* = intestino posteriore, *pl* = pliche rettali.

» 18. — Da una sezione subtrasversa a livello dei tre succhiatoi *su. l.* = succhiatoio laterale, *su. m.* = succhiatoio mediano, *gang.* = ganglio ventrale, *es.* = esofago. 4 comp.-5.

Fig. 19. — Figura semischematica rappresentante i genitali femminili. *ov* = ovario, *seb* = ghiandola sebifica, *spt* = spermateca, *ovd* = ovidotto, *vag* = vagina, *s. seb* = sbocco delle ghiandole sebifiche, *c* = cerchio (vedi spiegazione nel testo), *a. s.* = appendici superficiali pari, *a. p.* = appendici profonde pari, *a. i* = appendice impari, *g. d* = gonapofisi dorsale.

» 20. — Estremità posteriore della femmina che sta deponendo l'uovo. *u* = uovo. Le altre lettere come sopra. I numeri corrispondono a quelli degli anelli. 4 comp.-2. A sinistra sono rappresentate alcune uova, vedute con una lente.

» 21. — Appendici genitali femminili del nono anello, vedute dall'interno, ossia distaccate dal resto e vedute dal lato dorsale. Sono state spostate: quella impari asimmetricamente. Lettere come sopra.

» 22. — Estremità posteriore dell'addome di una femmina, veduta di lato un po' obliquamente. Traspaiono le spermateche (*spt*) coi loro condottini e un pezzo chitinoso (*ch*) impari, a cui si attaccano robusti muscoli e che è in rapporto colla vagina. Esso sembra omologo al bastoncello impari della pompetta del maschio. I numeri indicano gli anelli: *te* = tergite, *st* = sternite. La linea corrispondente alle due crocette indica il confine anteriore del decimo segmento, coperto in parte dal nono. La linea segnata da una crocetta perciò non corrisponde al confine del nono col decimo, bensì indica fin dove si estende il nono sopra il decimo. Le altre lettere come sopra.

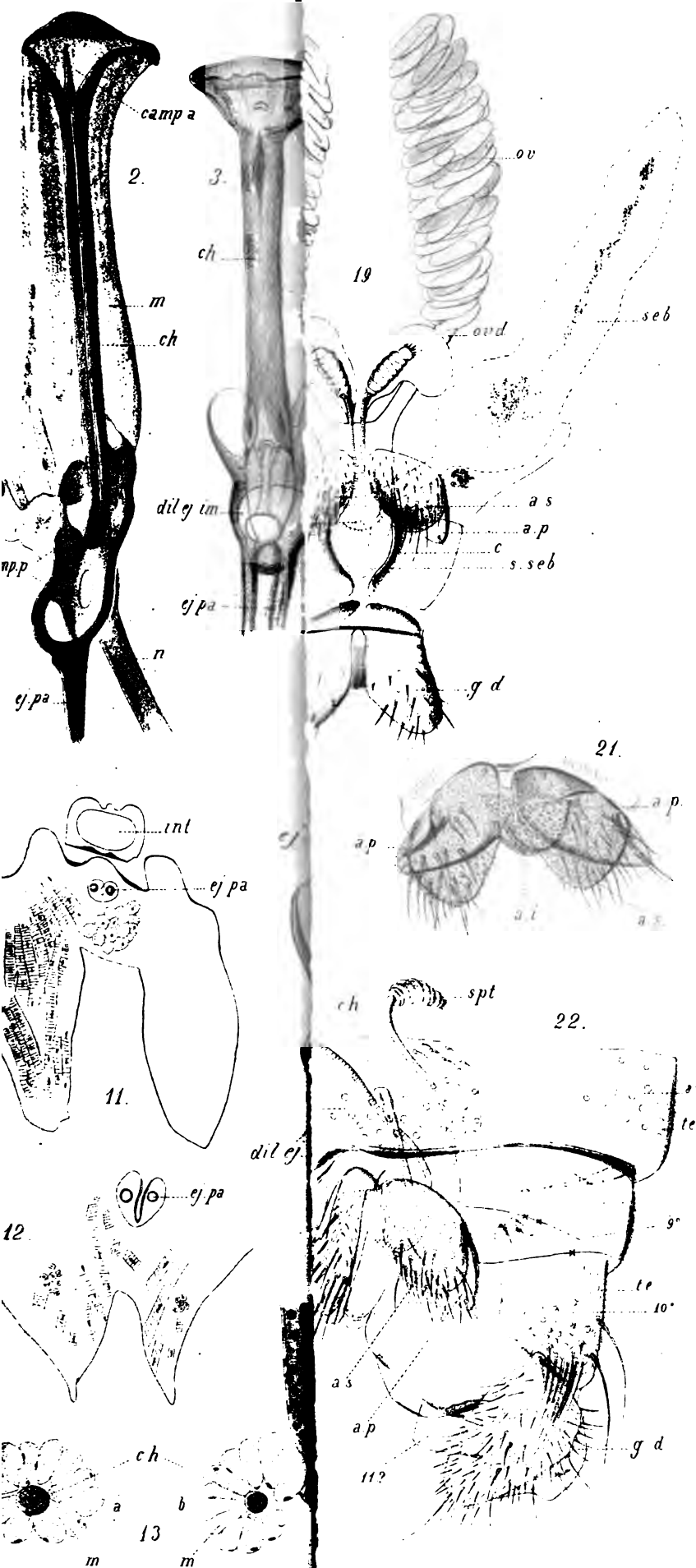



Tavola III.

Le prime 15 figure (parte sinistra della tavola) si riferiscono all' insetto perfetto ♀, le altre (parte destra) alla larva.

Fig. 1. — Estremità posteriore, veduta dal lato dorsale, ma un po' obliquamente, resa trasparente in potassa e glicerina. I numeri indicano gli anelli. Lettere come nella Tav. II.

» 2. — Estremità posteriore, veduta di lato un po' obliquamente, resa trasparente in potassa e glicerina. Alcune parti sono state artificialmente un po' allontanate. Si sono tralasciati molti particolari. Il decimo segmento è parzialmente coperto dal nono. Numeri e lettere come sopra.

» 3. — Estremità posteriore veduta di lato. Numeri e lettere come sopra. *ipss* = ispessimento e piega.

» 4. — Estremità posteriore veduta dal lato ventrale, ma un po' obliquamente. Il decimo anello è parzialmente coperto dal nono. Lettere e numeri come sopra.

» 5. — Estremità posteriore veduta di lato (si confronti con la Fig. 3 di questa tavola e con la Fig. 19 della tavola II). Lettere e numeri come sopra.

» 6. — Metà circa di un uovo appena deposto. 4 comp.-8.

» 7 e 8. — Sezione submediale (7) e submediana (8). Nelle figure si sono tralasciati molti particolari. Le parti in cui la cuticula è ispessita sono segnate fortemente. *vag.* = vagina, *vul.* = vulva, *m* = muscolo, *s. spt* = sbocco dei condottini della spermateca. Altre lettere e numeri come sopra.

» 9. — Sezione submediana di un'altro individuo. *gang* = ganglio. Le altre lettere e numeri come sopra.

» da 10 a 15. — Sezioni trasversali in corrispondenza all'estremità posteriore. 10, 11 e 12 appartenenti ad un medesimo individuo e succedentisi dall'avanti all'indietro, notando però che ne furono tralasciate varie intermedie. Le stesse osservazioni valgono per le 13, 14 e 15. *int. p* = intestino posteriore. *gu* = guida per le uova. (Vedi spiegazione nel testo). *i. seb.* = tratto impari delle ghiandole sebifiche, *c. spt* = condotto delle spermateche. Le altre lettere e i numeri come sopra.

» 16. — Larva quasi giunta al massimo sviluppo, veduta dal dorso, uccisa in formalina. Una parte delle setole è stata tralasciata, come pure la scultura della cuticola. La distinzione dei singoli anelli in fasce non si rileva bene.

» 17. — Parte anteriore di una larva quasi giunta al massimo sviluppo veduta dal dorso. *ant* = antenna, *c* = confine degli anelli. Del quarto anello sono state rappresentate le prime tre fasce e soltanto l'inizio della quarta.

» 18. — Anelli della parte media del corpo di una larva giunta al massimo sviluppo, veduti di lato. *dis* = disco succhiatore.

» 19. — Alcuni anelli della larva, giunta al massimo sviluppo, veduti dal dorso. I numeri come sopra.

» 20. — I due ultimi anelli della larva, giunta al massimo sviluppo, veduti di lato. Intestino posteriore alquanto prolassato. *a* = ano, *pap* = papilla posteriore. I numeri come sopra. 6 comp.-5.

» 21. — Pelo spinuloso della larva. 4 comp.-8.

Fig. 22. — Margine posteriore dell'ultimo anello. Lettere come sopra. 4 comp.-5.

» 23. — Stigma posteriore (*st. p.*) 6 comp. $^1/_{15}$ imm. om. Attorno allo stigma vedesi una massa densa il cui significato mi sfugge.

» 24 e 25. — Stigma anteriore (*st. a*), trachea corrispondente e relativo manicotto (*man*). 6 comp. — $^1/_{15}$.

» 26. — Stigma posteriore (*st. p*) e relativa trachea e manicotto. 6 comp. — $^1/_{15}$ imm. om.

A. Battisti lit. Via Depretis 92 Roma

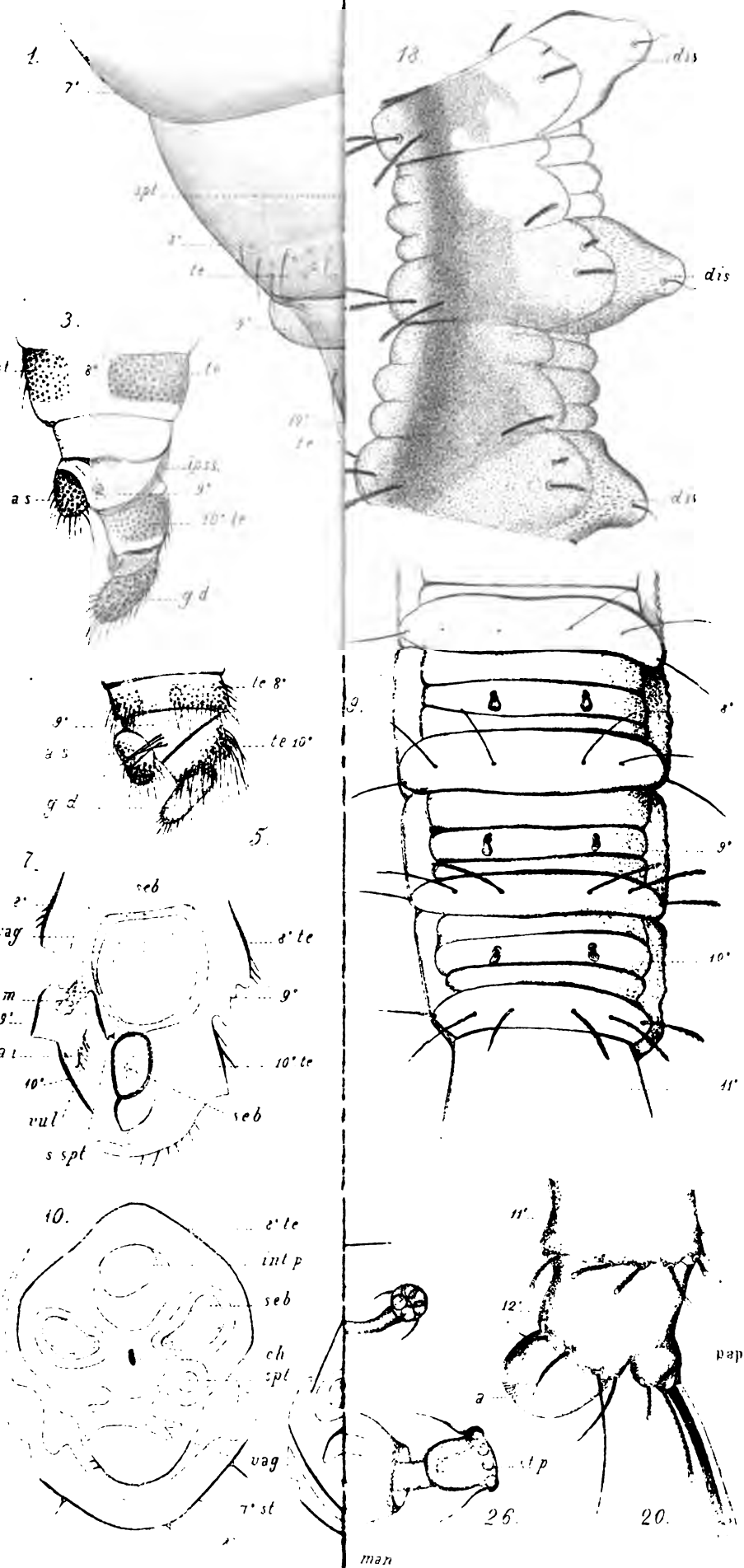



Tavola IV.

Le prime 21 figure si riferiscono alla larva; le altre (a destra) alla ninfa.

Fig. 1. — Larva giunta al massimo sviluppo, ingrandita dieci volte: vista dal dorso.
» 2. — Larva di media età, in riposo invernale: vista dal dorso (penultimo tergite lievemente pigmentato). *pap* = papilla posteriore. 2-4.
» 3. — Larva quasi adulta, vista di lato (trovata alla fine di gennaio 1907 in una cantina) *dis* = disco succhiatore.
» 4. — Larva relativamente piccola. Penultimo tergite non ancora pigmentato. 4 comp.-2.
» 5. — Schizzo della parte anteriore della stessa larva per mostrare come si può presentare il torace quando l'animale si muove (ingr. più forte) *st. a.* = stigma anteriore.
» 6. — Porzione di una larva quasi adulta, veduta dal lato ventrale, per mostrare i dischi succhiatori (*dis*) 4 comp.-2.
» 7. — Estremità posteriore di una larva piccola. *st. p.* = stigma posteriore 4 comp.-5.
» 8. — Estremità anteriore di una larva lunga circa 2 mm., veduta dal dorso *ant.* = antenne, *mas.* = mascelle, *man.* = mandibole, *1ª f.* = prima fascia del primo tergite. 4 comp.-5.
» 9. — Testa di una larva di 2 mm. circa, veduta dal lato ventrale. *pet.* = pettine (vedi spiegazione nel testo), *l. sup.* = labbro superiore, *epif.* = epifaringe, *p. mas.* = palpo mascellare. Le altre lettere come sopra. 4 comp.-8.
» 10. — Porzione della testa veduta dal lato ventrale. Nella parte *a* della figura il pettine, spezzato per il lungo quasi in due metà spostate; anteriormente lascia vedere un pezzo singolare, che io denomino provvisoriamente ipofaringe (*ipof*). Più dorsalmente rispetto ad essa rilevasi una linea sporgente di significato incerto; ancora più dorsalmente sorge l'epifaringe a cui segue il labbro superiore molto più corto. Nella parte *a* della figura l'epifaringe è rappresentata come si vede nella sua parte di mezzo, nella parte *b* come si vede più ventralmente, nella parte *c* come si vede più dorsalmente.
» 11. — Apparato boccale di una larva di 2 mm. veduto di lato, artificialmente un po' spostato. Lettere come sopra. 4 comp.-$^1|_{15}$.
» 12. — Pettine (vedi spiegazione nel testo) da una parte si presenta di scorcio. 4 comp.-8.
» 13 e 14. — Mandibole. 4 comp.-8.
» 15. — Mascella. 4 comp.-8.
» 16. — Mascella. *pal* = palpo. 6 comp.-6.
» 17. — Pelo spinuloso della larva.
» 18. — Antenna veduta di fronte e precisamente dalla faccia più convessa. 4 comp.-$^1|_{15}$.
» 19. — Estremità distale dell'antenna veduta dalla faccia meno convessa. Ingrandimento come sopra.
» 20. — Antenna veduta di lato. Ingrandimento come sopra.
» 21. — Estremità distale dell'antenna veduta dalla faccia più convessa. Ingrandimento come sopra.
» 22. — *a*) Ninfa ingrandita dieci volte; l'estremità posteriore è stata liberata dalla spoglia larvale; *b*) si vede l'estremità posteriore della ninfa rivestita della spoglia larvale.
» 23. — Estremità anteriore della ninfa, veduta dal lato dorsale. *ant.* = antenna, *oc* = occhio, *pa. re.* = papilla respiratoria (protoracica), *prn.* = pronoto, *mes.* = mesonoto, *met* = metanoto, 1. *add.* = primo anello addominale, 2. *add.* = secondo anello addominale, *al?* = alula? *pen.* = pelo a pennello. 4 comp.-5.

Fig. 24. — Parte anteriore della ninfa veduta di lato. *al.* = ala. Le altre lettere come nella figura precedente.

» 25. — Parte anteriore di una ninfa. *zam* = zampe. Le altre lettere come sopra.

» 26. — Pelo a pennello (*pen.* della Fig. 23). 6 comp.-8.

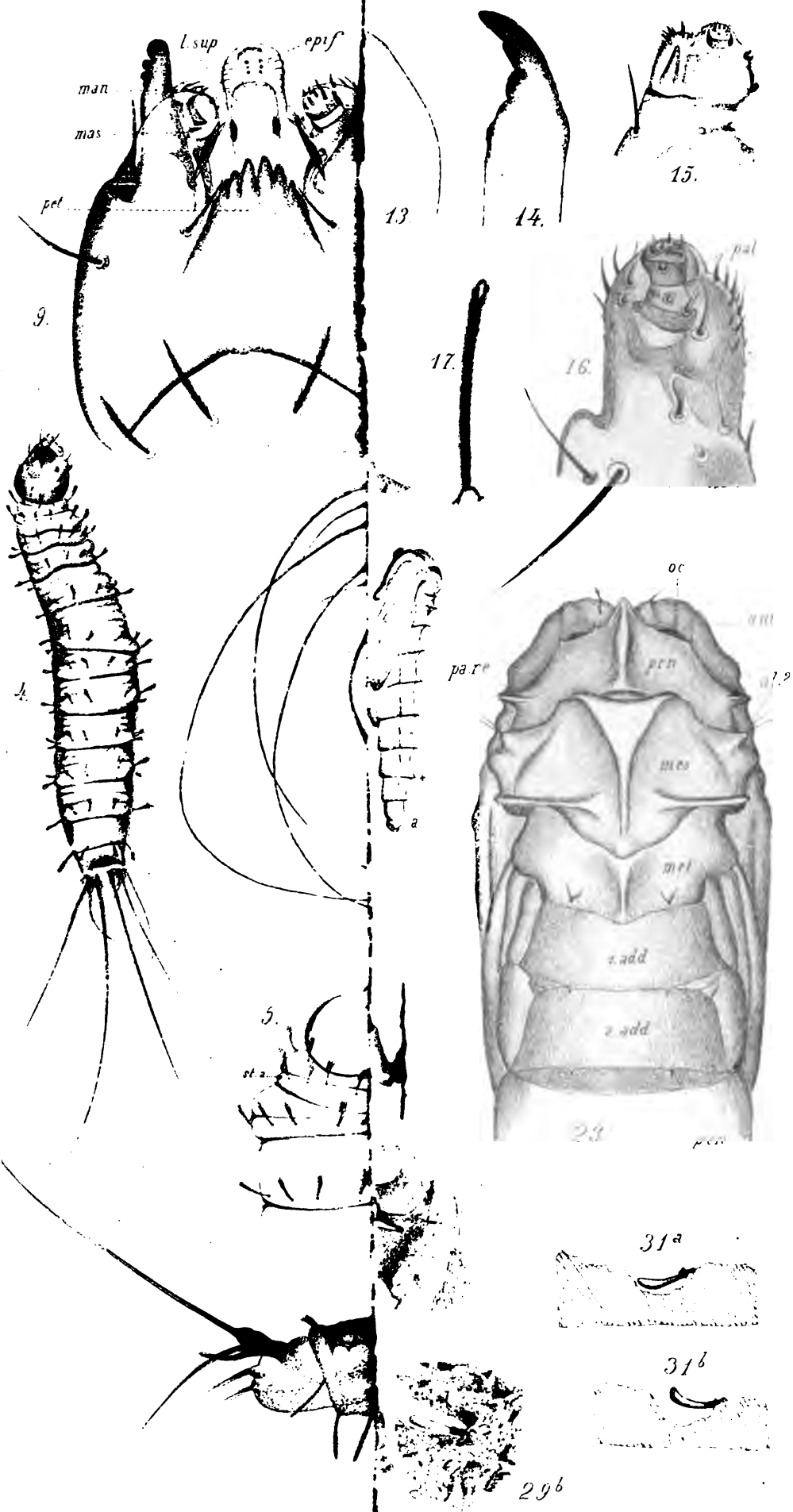
» 27. — Si vede una ninfa attaccata ad un'anfrattuosità per mezzo dell'estremità posteriore (*a*).

» 28. — Spoglia della ninfa ancora attaccata ad un mattone.

» 29. — *a. b. c.* figure semischematiche per dimostrare la posizione della ninfa in un'anfrattuosità (piccolissimo ingrandimento); *a*) rappresenta una sezione ideale dell'anfrattuosità e della ninfa in senso trasversale; *b*) la stessa ninfa veduta dal dorso; *c*) la stessa ninfa veduta obliquamente di lato.

» 30. — Ninfa veduta dal lato dorsale nella sua posizione naturale dentro un'anfrattuosità; piccolissimo ingrandimento.

» 31. — Figure schematiche per dimostrare come la ninfa si va sollevando man mano che matura; *a*) posizione della ninfa formatasi di recente; *b*) posizione della ninfa, quasi giunta al massimo incurvamento.

E. Battisti lit. Via Depretis 92 Roma

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME